УДК 517.937

С. А. Щоголев, В. В. Джашитова

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ КОЛИВНОГО ТИПУ ЗЛІЧЕННИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ ІЗ ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Для зліченної квазілінійної системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої мають вигляд абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є із повільно змінними коефіцієнтами та частотою, отримано ознаки існування часткового розв'язку аналогічної структури. Як наслідок отримано умови можливості повного розщеплення зліченної лінійної однорідної диференціальної системи з коефіцієнтами такої ж структури.

Вступ. Зліченні системи диференціальних рівнянь займають помітне місце в сучасній теорії диференціальних рівнянь, їм присвячено численні дослідження [2, 7, 9, 10]. Як зазначено в монографії [7], незважаючи на те, що зліченні системи диференціальних рівнянь є частковим випадком диференціальних рівнянь у банахових просторах [3, 6], вони мають ряд специфічних властивостей, що зумовлює необхідність розробки теорії таких рівнянь. Статтю присвячено розширенню результатів з праці [5] на випадок зліченних диференціальних систем стосовно існування часткових розв'язків цих систем таких, що мають вигляд абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотами. Також досліджено питання про повне розщеплення лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь такої структури [8].

1. Основні означення. Нехай $G = \{t, \varepsilon : t \in \mathbb{R}, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}$.

Означення 1. Говоримо, що функція $p(t,\varepsilon)$ належить до класу $S(m;\varepsilon_0)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, якщо виконуються такі умови:

1) $p : G \to \mathbb{C}$;

2) $p(t,\varepsilon) \in C^m(G)$ за t;

3) $\dfrac{d^k p(t,\varepsilon)}{dt^k} = \varepsilon^k p_k^*(t,\varepsilon), \quad \sup\limits_G \left|p_k^*(t,\varepsilon)\right| < +\infty, \quad 0 \le k \le m$.

Прикладами функцій з класу $S(m;\varepsilon_0)$ є у загальному випадку комплекснозначні, обмежені разом зі своїми похідними до m-го порядку включно, функції, що залежать від «повільного часу» $\tau = \varepsilon t$, наприклад, $\sin\tau$, $\operatorname{arctg}\tau$ тощо.

Означення 2. Говоримо, що функція $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ належить до класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, якщо ця функція зображується у вигляді

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon) e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

і виконуються такі умови:

1) $f_n(t,\varepsilon) \in S(m;\varepsilon_0), \quad \dfrac{d^k f_n(t,\varepsilon)}{dt^k} = \varepsilon^k f_{nk}(t,\varepsilon), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le k \le m$;

2) $\|f\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \sup\limits_G |f_{nk}(t,\varepsilon)| < +\infty$;

3) $\theta(t,\varepsilon) = \int\limits_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \quad \varphi : G \to \mathbb{R}^+, \quad \varphi \in S(m;\varepsilon_0), \quad \inf\limits_G \varphi > 0$.

Множина функцій класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ утворює лінійний простір, який перетворюється на повний нормований простір введенням норми $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Справджується такий ланцюжок включень:

$$F(0;\varepsilon_0;\theta) \supset F(1;\varepsilon_0;\theta) \supset \ldots \supset F(m;\varepsilon_0;\theta).$$

Нехай задано дві функції з класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$:

$$u(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t,\varepsilon) e^{in\theta(t,\varepsilon)},$$

$$v(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(t,\varepsilon) e^{in\theta(t,\varepsilon)}.$$

Добуток цих функцій визначимо формулою [1]

$$(uv)(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{n-s}(t,\varepsilon) v_s(t,\varepsilon) \right) e^{in\theta(t,\varepsilon)}. \tag{1}$$

Очевидно, що $u\,v \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Сформулюємо деякі властивості норми $\|\cdot\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Нехай $u, v \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$ і $k = \mathrm{const}$. Тоді:

1°) $\|ku\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = |k| \cdot \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$,

2°) $\|u+v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} + \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$,

3°) $\|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \sum\limits_{k=0}^{m} \left\| \dfrac{1}{\varepsilon^k} \cdot \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k} \right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}$,

4°) $\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le 2^m \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \cdot \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}$.

Властивість ***4°*** потребує д о в е д е н н я. Дійсно, при $m = 0$ для норми добутку $u\,v \in F(0;\varepsilon_0;\theta)$ згідно з (1) маємо нерівність

$$\|uv\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \le \|u\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \cdot \|v\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Далі, використовуючи властивості ***1°–3°***, отримуємо потрібну оцінку:

$$\begin{aligned}
\|uv\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} &= \sum_{k=0}^{m} \left\| \frac{1}{\varepsilon^k} \frac{\partial^k (uv)}{\partial t^k} \right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \le \\
&\le \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\varepsilon^k} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \cdot \left\| \frac{\partial^{k-j} v}{\partial t^{k-j}} \right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \le \\
&\le 2^m \left[\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\varepsilon^j} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \right] \cdot \left[\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\varepsilon^j} \left\| \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \right\|_{F(0;\varepsilon_0;\theta)} \right] = \\
&= 2^m \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \cdot \|v\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.
\end{aligned}$$

Наслідок 1. *Якщо* $u \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, *то* $\forall\, k \in \mathbb{N}$ *виконується* $u^k \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, *причому*

$$\left\|u^k\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le 2^{m(k-1)} \|u\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}^k.$$

На підставі властивості ***4°*** можемо стверджувати, що простір $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ утворює банахову алгебру [4, с. 513].

2. Постановка задачі. Розглянемо зліченну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(t,\varepsilon) x_k + f_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \\
+ \mu X_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x_1,x_2,\ldots), \qquad j = 1,2,\ldots,
\end{aligned} \tag{2}$$

де $t, \varepsilon \in G$, $p_{jk} \in S(m; \varepsilon_0)$, $f_j \in F(m; \varepsilon_0; \theta)$, $x_1, x_2, \ldots \in D \subset \mathbb{C}$, функції X_j належать до класу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$ відносно аргументів t, ε, θ і неперервні в D за сукупністю змінних $x_1, x_2, \ldots$.

Метою статті є встановлення умов, за яких система (2) має часткові розв'язки з класу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, а також використання цих результатів для дослідження питання про повне розщеплення зліченної лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої належать до класу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$.

3. Основні результати. Поряд із системою (2) розглянемо породжуючу зліченну лінійну неоднорідну систему, яку отримуємо з системи (2) при $\mu = 0$:

$$\frac{dx_j^0}{dt} = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(t,\varepsilon) x_k^0 + f_j(t, \varepsilon, \theta(t,\varepsilon)), \qquad j = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Теорема 1. *Нехай система* (3) *задовольняє такі умови:*

(***i***) $\left|\operatorname{Re} p_{jj}(t,\varepsilon)\right| \geq \gamma > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots;$

(***ii***) $\displaystyle\sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{j-1} \left\| p_{jk}(t,\varepsilon) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \mathcal{P} < +\infty$

(*тут враховано, що* $S(m; \varepsilon_0) \subset F(m; \varepsilon_0; \theta)$);

(***iii***) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \left\| f_j(t,\varepsilon,\theta) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \mathcal{F} < +\infty$.

Тоді система (3) *має єдиний частковий розв'язок* $x_j^0(t, \varepsilon, \theta(t,\varepsilon))$, $j = 1, 2, \ldots$, *всі компоненти якого належать до класу* $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, *причому існує* $\mathcal{K} \in (0, +\infty)$, *яке не залежить від функцій* f_j, $j = 1, 2, \ldots$, *таке, що*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| x_j^0(t,\varepsilon,\theta) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leq \mathcal{K}\mathcal{F}. \tag{4}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо спочатку зліченну діагональну систему

$$\frac{dz_j}{dt} = p_{jj}(t,\varepsilon) z_j + f_j(t,\varepsilon,\theta), \qquad j = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

На підставі умови (***i***) теореми та результатів роботи [5] можемо стверджувати, що система (5) має єдиний частковий розв'язок $z_j(t,\varepsilon,\theta)$, $j = 1, 2, \ldots$, всі компоненти якого належать до класу $F(m; \varepsilon_0; \theta)$, причому існує $\mathcal{K}_0 \in (0, +\infty)$, яке не залежить від функцій $f_j(t,\varepsilon,\theta)$, $j = 1, 2, \ldots$, таке, що

$$\left\| z_j \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leq \mathcal{K}_0 \left\| f_j \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}, \qquad j = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Позначимо

$$\mathcal{P}_j = \sum_{k=1}^{j-1} \left\| p_{jk} \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}, \qquad j \geq 2.$$

З огляду на умову (***ii***) теореми існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\sum_{j=2}^{\infty} \mathcal{P}_j = \mathcal{Q}_N + \mathcal{R}_N, \tag{7}$$

де

$$\mathcal{Q}_N = \sum_{j=2}^{N} \mathcal{P}_j, \qquad \mathcal{R}_N = \sum_{j=N+1}^{\infty} \mathcal{P}_j, \qquad \mathcal{K}_0 \mathcal{R}_N < 1.$$

Розглянемо скінченну трикутну систему

$$\frac{dx_j^0}{dt} = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(t,\varepsilon)x_k^0 + f_j(t,\varepsilon,\theta), \qquad j = 1,\ldots,N. \tag{8}$$

Застосовуючи послідовно нерівність (6) до рівнянь системи (8), дістанемо

$$\sum_{j=1}^{N} \left\| x_j^0 \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le \mathcal{H}_N \mathcal{F}, \tag{9}$$

де

$$\mathcal{H}_N = \frac{(1+\mathcal{Q}_N\mathcal{K}_0)^N - 1}{\mathcal{Q}_N}$$

(якщо $\mathcal{Q}_N = 0$, то $\mathcal{H}_N = N\mathcal{K}_0$).

Розглянемо тепер рівняння системи (3) при $j \ge N+1$:

$$\frac{dx_j^0}{dt} = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(t,\varepsilon)x_k^0 + y_j(t,\varepsilon,\theta) + f_j(t,\varepsilon,\theta), \quad j = N+1, N+2, \ldots, \tag{10}$$

де

$$y_j(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{k=1}^{N} p_{jk}(t,\varepsilon)x_k^0 \in F(m;\varepsilon_0;\theta).$$

Враховуючи результати з [8], запишемо

$$\left\| x_{N+1}^0(t,\varepsilon,\theta) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le \mathcal{K}_0 \left(\left\| y_{N+1}(t,\varepsilon,\theta) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} + \left\| f_{N+1}(t,\varepsilon,\theta) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \right),$$

$$\left\| x_{N+k}^0(t,\varepsilon,\theta) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le \mathcal{K}_0 \Bigg(\left\| y_{N+k}(t,\varepsilon,\theta) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} + \left\| f_{N+k}(t,\varepsilon,\theta) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} +$$
$$+ \mathcal{P}_{N+k} \sum_{s=1}^{k-1} \left\| x_{N+s}^0(t,\varepsilon,\theta) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \Bigg), \qquad k = 2,3,\ldots.$$

Позначимо

$$\xi_k = \sum_{s=1}^{k} \left\| x_{N+s}^0(t,\varepsilon,\theta) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}, \qquad \mathcal{F}_k = \sum_{s=1}^{k} \left\| f_{N+s}(t,\varepsilon,\theta) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)}.$$

Тоді при $k \ge 2$ маємо

$$\xi_k \le \mathcal{K}_0 \left(\mathcal{H}_N \mathcal{F} \sum_{s=1}^{k} \mathcal{P}_{N+s} + \mathcal{F}_k + \left(\sum_{s=2}^{k} \mathcal{P}_{N+s} \right) \xi_{k-1} \right) \le \mathcal{K}_0 \left(\mathcal{H}_N \mathcal{F} \mathcal{R}_N + \mathcal{F}_k + \mathcal{R}_N \xi_{k-1} \right).$$

Внаслідок (7) існує

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi = \sum_{s=N+1}^{\infty} \left\| x_s^0(t,\varepsilon,\theta) \right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)},$$

причому

$$\xi \le \frac{\mathcal{H}_N \mathcal{F} + \mathcal{K}_0 \mathcal{F}}{1 - \mathcal{R}_N \mathcal{K}_0}.$$

Поєднуючи цю оцінку з нерівністю (9), одержимо нерівність (4), у якій

$$\mathcal{K} = \mathcal{H}_N + \frac{\mathcal{H}_N + \mathcal{K}_0}{1 - \mathcal{R}_N \mathcal{K}_0}.$$

Теорему 1 доведено. ♦

Позначимо

$$\Omega = \left\{ x_j \in F(m,\varepsilon_0,\theta) : \sum_{j=1}^{\infty} \left\| x_j - x_j^0 \right\|_{F(m,\varepsilon_0,\theta)} \le d,\ 0 < d < +\infty \right\},$$

де x_j^0, $j = 1,2,\ldots$, – розв'язок системи (3), всі компоненти якого належать до класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Теорема 2. *Нехай система* (2) *така, що:*

1°) *породжуюча для неї система* (3) *задовольняє всі умови теореми* 1*;*

2°) *функції* X_j , $j = 1,2,\ldots$, *підпорядковано таким обмеженням:*

(***i***) $\forall\, x_k \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $k = 1,2,\ldots$: $X_j(t,\varepsilon,\theta,x_1,x_2,\ldots) \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $j = 1,2,\ldots$;

(***ii***) $\sup\limits_{x_k\in\Omega}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left\| X_j(t,\varepsilon,\theta,x_1,x_2,\ldots)\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \mathcal{M}(d) < +\infty$;

(***iii***) *існує таке* $\mathcal{L}(d) \in (0,+\infty)$, *що* $\forall\, x_k, y_k \in \Omega$, $k = 1,2,\ldots$, *виконується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\| X_j(t,\varepsilon,\theta,x_1,x_2,\ldots) - X_j(t,\varepsilon,\theta_1,y_1,y_2,\ldots)\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le$$

$$\le \mathcal{L}(d)\sum_{k=1}^{\infty}\left\| x_k - y_k\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} ;$$

3°) *параметр* μ *задовольняє нерівності*

$$\mu\mathcal{K}\mathcal{M}(d) \le d_0 < d, \qquad \mu\mathcal{K}\mathcal{L}(d) < 1 . \tag{11}$$

Тоді система (2) *має в* Ω *єдиний частковий розв'язок* $x_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, $j = 1,2,\ldots$, *всі компоненти якого належать до класу* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, *причому справджується оцінка*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\| x_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \le \mathcal{K}\mathcal{F} + \frac{\mu\mathcal{K}\mathcal{M}(d)}{1-\mu\mathcal{K}\mathcal{L}(d)} . \tag{12}$$

Д о в е д е н н я. Розв'язок системи (2), всі компоненти якого належать до класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, шукатимемо методом послідовних наближень, вибираючи за початкове наближення $x_j^0(t,\varepsilon,\theta)$, $j = 1,2,\ldots$, і визначаючи подальші наближення як розв'язки з класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$ зліченних лінійних неоднорідних систем

$$\frac{dx_j^{r+1}}{dt} = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(t,\varepsilon)x_k^{r+1} + f_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \mu X_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x_1^r,x_2^r,\ldots),$$

$$j = 1,2,\ldots, \qquad r = 0,1,2,\ldots . \tag{13}$$

Використовуючи звичайну методику принципу стискуючих відображень [4], легко показати, що умови (11) забезпечують належність всіх наближень до множини Ω, збіжність процесу (13) до розв'язку системи (2), всі компоненти якого належать до класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, а також виконання оцінки (12).

Теорему 2 доведено. ♦

Наслідок 2. *Нехай задано зліченну систему диференціальних рівнянь*

$$\frac{d\xi_j}{dt} = a_j(t,\varepsilon)\xi_j + \mu b_j(t,\varepsilon,\theta)\xi_j + \mu g_j(t,\varepsilon,\theta) + \mu\sum_{k=1}^{\infty} c_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_k +$$

$$+ \mu\xi_j\sum_{k=1}^{\infty} r_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\xi_k, \qquad j = 1,2,\ldots, \tag{14}$$

де $a_j \in S(m;\varepsilon_0)$, $b_j, g_j, c_{jk}, r_{jk} \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $j,k = 1,2,\ldots$, $\mu \in (0,\mu_0)$, *причому виконуються такі умови*:

$$\left|\operatorname{Re} a_j(t,\varepsilon)\right| \geq \gamma > 0, \qquad j = 1,2,\ldots,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|b_j(t,\varepsilon,\theta)\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \mathcal{B} < +\infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\left\|g_j(t,\varepsilon,\theta)\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \mathcal{G} < +\infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\|c_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = C < +\infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\|r_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} = \mathcal{R} < +\infty.$$

Тоді існує $\mu_1 \in (0,\mu_0)$ *таке, що* $\forall\,\mu \in (0,\mu_1)$ *система* (14) *має єдиний частковий розв'язок* $\xi_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, $j = 1,2,\ldots$, *всі компоненти якого належать до класу* $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, *причому*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\xi_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} < +\infty. \tag{15}$$

Д о в е д е н н я. Поряд із системою (14) розглянемо породжуючу зліченну лінійну неоднорідну систему

$$\frac{d\xi_j^0}{dt} = a_j(t,\varepsilon)\xi_j^0 + \mu g_j(t,\varepsilon,\theta), \qquad j = 1,2,\ldots. \tag{16}$$

Ця система є частковим випадком системи (3). Умови ***1***°, ***2***° теореми 2 гарантують виконання всіх умов теореми 1, тому на підставі цієї теореми система (16) має єдиний частковий розв'язок $\xi_j^0(t,\varepsilon,\theta)$, $j = 1,2,\ldots$, всі компоненти якого належать до класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, причому існує $\mathcal{K}_1 \in (0,+\infty)$ таке, що

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\xi_j^0(t,\varepsilon,\theta)\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leq \mu_0\mathcal{K}_1\mathcal{G}.$$

Позначимо

$$\Omega_1 = \left\{\xi_j \in F(m;\varepsilon_0;\theta) : \sum_{j=1}^{\infty}\left\|\xi_j - \xi_j^0\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} \leq d_1,\ 0 < d_1 < +\infty\right\}.$$

Легко бачити, що система (14) задовольняє всі умови теореми 2. Отже, якщо параметр μ задовольняє нерівності

$$\mu\mathcal{K}_1\mathcal{M}_1(d_1) \leq d_{10} < d_1, \qquad \mu\mathcal{K}_1\mathcal{L}_1(d_1) < 1,$$

де

$$\mathcal{M}_1(d_1) = (\mathcal{B} + C)(\mu_0\mathcal{K}_1\mathcal{G} + d_1) + \mathcal{R}(\mu_0\mathcal{K}_1\mathcal{G} + d_1)^2,$$

$$\mathcal{L}_1(d_1) = \mathcal{B} + C + 2(\mu_0\mathcal{K}_1\mathcal{G} + d_1)\mathcal{R},$$

то система (14) має єдиний частковий розв'язок $\xi_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, $j = 1,2,\ldots$, всі компоненти якого належать до класу $F(m;\varepsilon_0;\theta)$, і виконується нерівність (15), що й потрібно було довести. ♦

Розглянемо наступну зліченну лінійну однорідну систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_j}{dt} = \lambda_j(t,\varepsilon)x_j + \mu\sum_{k=1}^{\infty} b_{jk}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))x_k, \qquad j = 1,2,\ldots, \tag{17}$$

де $\lambda_j \in S(m;\varepsilon_0)$, $b_{jk} \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, $\mu \in (0,\mu_0)$.

Теорема 3. *Нехай для системи* (17) *виконуються такі умови:*

$$\left|\operatorname{Re}(\lambda_j(t,\varepsilon)-\lambda_k(t,\varepsilon))\right| \ge \gamma > 0, \qquad j,k = 1,2,\ldots, \qquad j \ne k,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\|b_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} < +\infty .$$

Тоді існує $\mu_2 \in (0,\mu_0)$ *таке, що* $\forall\,\mu \in (0,\mu_2)$ *існує перетворення вигляду*

$$x_j = y_j + \sum_{k=1\,(k\ne j)}^{\infty} q_{jk}(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),\mu)y_k, \qquad j = 1,2,\ldots, \tag{18}$$

де $q_{jk} \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$, *причому*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\|q_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right\|_{F(m;\varepsilon_0;\theta)} < +\infty ,$$

що зводить систему (17) *до такої*:

$$\frac{dy_j}{dt} = d_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),\mu)y_j, \qquad j = 1,2,\ldots, \tag{19}$$

де $d_j \in F(m;\varepsilon_0;\theta)$.

Д о в е д е н н я. Підставляючи вирази (18) у систему (17), з огляду на умову діагональності перетвореної системи, отримуємо таку систему диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів q_{jk}:

$$\begin{aligned}\frac{dq_{jk}}{dt} &= (\lambda_j(t,\varepsilon)-\lambda_k(t,\varepsilon))q_{jk} + \mu(b_{jj}(t,\varepsilon,\theta)-b_{kk}(t,\varepsilon,\theta))q_{jk} + \\ &+ \mu b_{jk}(t,\varepsilon,\theta) + \mu\sum_{s=1\,(s\ne j,s\ne k)}^{\infty} b_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{sk} - \\ &- \mu q_{jk}\sum_{s=1\,(s\ne k)}^{\infty} b_{ks}(t,\varepsilon,\theta)q_{sk}, \quad j,k = 1,2,\ldots, \quad j\ne k.\end{aligned} \tag{20}$$

Легко бачити, що система (20) є зліченною сукупністю незалежних одна від одної зліченних систем, кожна з яких має вигляд (14) і задовольняє наслідок 2 з теореми 2. Отже, теорему 3 доведено. ♦

Функції $d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)$, $j = 1,2,\ldots$, мають вигляд

$$\begin{aligned}d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) &= \lambda_j(t,\varepsilon) + \mu b_{jj}(t,\varepsilon,\theta) + \\ &+ \mu\sum_{s=1\,(s\ne j)}^{\infty} b_{js}(t,\varepsilon,\theta)q_{sk}(t,\varepsilon,\theta,\mu), \qquad j = 1,2,\ldots .\end{aligned}$$

Висновки. Таким чином, знайдено умови, за яких зліченна квазілінійна диференціальна система (2) має частковий розв'язок, всі компоненти мають вигляд абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою, а також досліджено питання про повне розщеплення зліченної лінійної однорідної системи з коефіцієнтами подібної структури.

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – Москва: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. *Валеев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1974. – 412 с.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – Москва: Наука, 1970. – 536 с.
   Те саме: *Daleckij J. L., Krein M. G.* Stability of differential equations in Banach space. – Providence: Amer. Math. Soc. 1974. – 386 p.

4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1976. – 543 с.
5. *Костин А. В., Щёголев С. А.* Об устойчивости колебаний, представимых рядами Фурье с медленно меняющимися параметрами // Дифференц. уравнения. – 2008. – **44**, № 1. – С. 45–51.
   Те саме: *Kostin A. V., Shchegolev S. A.* On the stability of oscillations representable by Fourier series with slowly varying parameters // Differ. Equat. – 2008. – **44**, No. 1. – P. 47–53.
6. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – Москва: Мир, 1970. – 456 с.
   Те саме: *Massera J. L., Schäffer J. J.* Linear differential equations and function spaces. – New York: Acad. Press, 1966. – xx+404 p.
7. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счётные системы дифференциальных уравнений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – 308 с.
8. *Щёголев С. А.* Об одном варианте теоремы полного разделения линейной однородной системы дифференциальных уравнений // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – Вип. 4. – С. 213–220.
9. *Almanassa M., Suwan I.* The explicit solution to the countable system of linear ordinary differential equation with constant coefficients // Mathematica Antenna. – 2014. – **4**, No. 8. – P. 827–837.
10. *Banaś J., Lecko M.* Solvability of infinite systems of differential equations in Banach sequence spaces // J. Comput. Appl. Math. – 2001. – **137**, No. 2. – P. 363–375.

О РЕШЕНИЯХ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ТИПА СЧЁТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Для счётной квазилинейной системы дифференциальных уравнений, коэффициенты которой представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов Фурье с медленно меняющимися коэффициентами и частотой, получены условия существования частного решения аналогичной структуры. Как следствие получены условия возможности полного разделения счётной линейной однородной дифференциальной системы с коэффициентами такой же структуры.

ON SOLUTIONS OF OSCILLATING TYPE OF THE COUNTABLE DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH SLOWLY VARYING PARAMETERS

For the countable quasilinear system of differential equations, whose coefficients are represented as absolutely and uniformly convergent Fourier-series with slowly varying coefficients and frequency, the conditions of the existence of the particular solution of analogous structure, are obtained. As a result the conditions of the possibility of the full separation of the countable linear homogeneous differential system with coefficients of similar structure are established.

Одеськ. нац. ун-т ім. І. І. Мечнікова, Одеса

Одержано
24.07.15