УДК 517.983

Ю. С. Лінчук

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ОПЕРАТОР БЕССЕЛЯ – СТРУВЕ ТА ДЕЯКІ ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

У просторі функцій, аналітичних у довільній області, означено узагальнений оператор Бесселя – Струве. Досліджено умови еквівалентності узагальненого оператора Бесселя – Струве та оператора двократного диференціювання. Описано комутант узагальненого оператора Бесселя – Струве, а також встановлено його гіперциклічність і хаотичність.

Вступ. Нехай G – довільна область комплексної площини і $\mathcal{H}(G)$ – простір усіх аналітичних в G функцій, наділений топологією компактної збіжності, а $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ – множина всіх лінійних неперервних операторів, що діють у $\mathcal{H}(G)$.

У роботі [9] формулою

$$(\ell_\alpha f)(z) = f''(z) + \alpha \frac{f'(z) - f'(0)}{z}$$

означено оператор Бесселя – Струве у просторі цілих функцій. При виконанні умови $\alpha > 0$ у [9] також досліджується гармонічний аналіз, пов'язаний з цим оператором у просторі цілих функцій, а у [8] подібні дослідження проведено в просторі функцій, аналітичних у кругових областях. Подальше вивчення різноманітних властивостей оператора Бесселя – Струве у різних функціональних просторах наведено у працях [12, 13, 15].

У цій статті узагальнюємо оператор Бесселя – Струве і вивчаємо деякі його властивості у просторах функцій, аналітичних в областях. Нехай m – довільне фіксоване натуральне число і G – довільна область комплексної площини, яка містить точку 0 і є m-симетричною відносно початку координат, тобто $\omega G = G$, де $\omega = \exp\dfrac{2\pi i}{m}$. Для довільних комплексних чисел α_j, $j = 0,\ldots, m-1$, через B позначимо оператор, який діє у просторі $\mathcal{H}(G)$ за правилом

$$(Bf)(z) = f''(z) + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \frac{f'(\omega^j z) - f'(0)}{z}. \tag{1}$$

Якщо область G є зірковою відносно початку координат, то оператор B можна подати також формулою

$$(Bf)(z) = f''(z) + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \int_0^{\omega^j} f''(tz)\, dt. \tag{2}$$

З (2) випливає, що оператор B лінійно та неперервно діє у просторі $\mathcal{H}(G)$. Оператор B є узагальненням оператора Бесселя – Струве ℓ_α, який одержуємо з (1) при $m = 1$.

1. Еквівалентність узагальненого оператора Бесселя – Струве до квадрата оператора диференціювання у просторі $\mathcal{H}(G)$. Наведемо спочатку деякі допоміжні позначення і твердження.

Для комплексного числа a і цілого невід'ємного числа n через $(a)_n$ позначимо символ Похгаммера: $(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1)$ при $n \ge 1$, $(a)_0 = 1$.

Лема 1. *Нехай G – довільна зіркова m-симетрична відносно початку координат область комплексної площини, ℓ – фіксоване натуральне число, а $c^{(r)}$, $a_j^{(r)}$, $b_j^{(r)}$, $r = 0,\ldots, m-1$, $j = 1,\ldots,\ell$, – довільні комплексні числа,* *для яких виконуються умови* $c^{(r)} \neq 0$, $a_j^{(r)} \neq -n$, $b_j^{(r)} \neq -n$, $n = 0, 1, \ldots$, $j = 1, \ldots, \ell$. *Тоді діагональний оператор* S, *який на степенях* z *визначається рівностями*

$$Sz^{mn+r} = c^{(r)} \frac{(a_1^{(r)})_n (a_2^{(r)})_n \ldots (a_\ell^{(r)})_n}{(b_1^{(r)})_n (b_2^{(r)})_n \ldots (b_\ell^{(r)})_n} z^{mn+r}, \tag{3}$$

$r = 0, \ldots, m-1$, $n = 0, 1, \ldots$, *продовжується до ізоморфізму простору* $\mathcal{H}(G)$.

Це твердження доводиться за тією ж схемою, що й теорема 2 з [5] (див. також [4]).

Для оператора Бесселя – Струве B маємо $B(1) = B(z) = 0$ і $B(z^n) = n\lambda_n z^{n-2}$, де

$$\lambda_n = n - 1 + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \omega^{j(n-1)}, \qquad n = 2, 3, \ldots. \tag{4}$$

Теорема 1. *Нехай* m *– довільне натуральне число,* G *– довільна зіркова та* m*-симетрична відносно початку координат область комплексної площини у випадку, якщо* m *– парне, або зіркова та* $2m$*-симетрична відносно початку координат область, якщо* m *– непарне. Для того щоб оператор* B *був еквівалентним до оператора* $\frac{d^2}{dz^2}$ *у просторі* $\mathcal{H}(G)$, *необхідно та достатньо, щоб*

$$\lambda_n \neq 0, \qquad n = 2, 3, \ldots. \tag{5}$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай оператор B еквівалентний до оператора $\frac{d^2}{dz^2}$ у просторі $\mathcal{H}(G)$. Припустимо, що умова (5) не виконується. Отже, існує натуральне $n_0 \geq 2$, для якого $\lambda_{n_0} = 0$. Тоді маємо $B(1) = B(z) = B(z^{n_0}) = 0$. Тому $\dim \operatorname{Ker}(B) \geq 3$ у просторі $\mathcal{H}(G)$. Оскільки $\dim \operatorname{Ker}\left(\frac{d^2}{dz^2}\right) = 2$, то оператор B не є еквівалентним до оператора $\frac{d^2}{dz^2}$ у просторі $\mathcal{H}(G)$. Одержали суперечність.

Достатність. Нехай виконується умова (5). Розглянемо спочатку випадок, коли m є парним. Через S позначимо діагональний оператор, який на степенях z визначається рівностями

$$Sz^n = \gamma_n z^n, \tag{6}$$

де

$$\gamma_{2n} = \gamma_0 \frac{(2n-1)!!}{\lambda_2 \lambda_4 \ldots \lambda_{2n}},$$
$$\gamma_{2n+1} = \gamma_1 \frac{(2n)!!}{\lambda_3 \lambda_5 \ldots \lambda_{2n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

а γ_0, γ_1 – довільні комплексні числа, відмінні від нуля. Покажемо, що оператор S продовжується до ізоморфізму простору $\mathcal{H}(G)$. Для цього перетворимо числа γ_n.

Нехай n – довільне ціле невід'ємне число, а r – довільне ціле невід'ємне число, для якого $0 \leq r \leq \frac{m}{2} - 1$. Тоді

$$\gamma_{mn+2r} = \frac{\gamma_0 (mn + 2r - 1)!!}{\lambda_2\lambda_4 \ldots \lambda_{2r} \prod\limits_{s=1}^{m/2} \prod\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_{mk+2s+2r}}.$$

(Вважаємо, що $\lambda_2\lambda_4 \ldots \lambda_{2r} = 1$ при $r = 0$ і $\prod\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_{mk+2s+2r} = 1$ при $n = 0$). Перетворимо формулу для γ_{mn+2r}. Оскільки для довільних $r = 0,\ldots,\frac{m}{2}-1$, $s = 1,\ldots,\frac{m}{2}$ та $n = 0,1,\ldots$ є правильними рівності

$$\prod_{k=0}^{n-1} \lambda_{mk+2s+2r} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(mk + 2s + 2r - 1 + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \omega^{j(mk+2s+2r-1)} \right) =$$

$$= m^n \prod_{k=0}^{n-1}\left(k + \frac{1}{m}\left(2s + 2r - 1 + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \omega^{j(2s+2r-1)} \right)\right) =$$

$$= m^n \left(\frac{\lambda_{2s+2r}}{m} \right)_n,$$

$$(mn + 2r - 1)!! = (2r-1)!! \prod_{s=1}^{m/2} \prod_{k=0}^{n-1} (mk + 2s + 2r - 1) =$$

$$= (2r-1)!!\, m^{mn/2} \prod_{s=1}^{m/2} \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{2s + 2r - 1}{m} \right) =$$

$$= (2r-1)!!\, m^{mn/2} \prod_{s=1}^{m/2} \left(\frac{2s + 2r - 1}{m} \right)_n,$$

то

$$\gamma_{mn+2r} = \frac{\gamma_0 (2r-1)!!}{\lambda_2\lambda_4 \ldots \lambda_{2r}} \prod_{s=1}^{m/2} \frac{\left(\frac{2s+2r-1}{m} \right)_n}{\left(\frac{\lambda_{2s+2r}}{m} \right)_n}, \quad r = 0,\ldots,\frac{m}{2}-1, \quad n = 0,1,\ldots. \quad (8)$$

Аналогічним чином переконуємося у тому, що

$$\gamma_{mn+2r+1} = \frac{\gamma_1 (2r)!!}{\lambda_3\lambda_5 \ldots \lambda_{2r+1}} \prod_{s=1}^{m/2} \frac{\left(\frac{2s+2r}{m} \right)_n}{\left(\frac{\lambda_{2s+2r+1}}{m} \right)_n}, \quad r = 0,\ldots,\frac{m}{2}-1, \quad n = 0,1,\ldots. \quad (9)$$

Позначимо

$$c^{(2r)} = \frac{\gamma_0 (2r-1)!!}{\gamma_2\gamma_4 \cdots \gamma_{2r}}, \qquad a_s^{(2r)} = \frac{2s + 2r - 1}{m}, \qquad b_s^{(2r)} = \frac{\lambda_{2s+2r}}{m},$$

$$c^{(2r+1)} = \frac{\gamma_1 (2r)!!}{\gamma_3\gamma_5 \cdots \gamma_{2r+1}}, \qquad a_s^{(2r+1)} = \frac{2s + 2r}{m}, \qquad b_s^{(2r+1)} = \frac{\lambda_{2s+2r+1}}{m},$$

$$r = 0,\ldots,\frac{m}{2}-1, \qquad s = 1,\ldots,\frac{m}{2}.$$

Тоді з (8) і (9) випливає, що

$$\gamma_{mn+r} = c^{(r)} \prod_{s=1}^{m/2} \frac{(a_s^{(r)})_n}{(b_s^{(r)})_n}, \qquad r = 0,\ldots,m-1, \qquad n = 0,1,\ldots.$$

Тому значення Sz^{mn+r} оператора S на степенях z зображаються формулою (3) з $\ell = \frac{m}{2}$.

Оскільки виконується умова (5), то $c^{(r)} \neq 0$, $a_s^{(r)} \neq -n$, $b_s^{(r)} \neq -n$, $n = 0,1,\dots$, $s = 1,\dots,\frac{m}{2}$. За лемою 1 оператор S є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$. Для довільного цілого невід'ємного n виконується рівність

$$\left(S\frac{d^2}{dz^2}\right)(z^n) = (BS)(z^n).$$

Оскільки $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і область G є однозв'язною, то з використанням теореми Рунґе одержуємо, що $S\frac{d^2}{dz^2} = BS$. Оператор S є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$. Тому оператор B є еквівалентним до оператора $\frac{d^2}{dz^2}$ у просторі $\mathcal{H}(G)$. У випадку, коли m є парним, теорему доведено.

Нехай тепер m – непарне натуральне число. Нехай β_j, $j=0,\dots,2m-1$, – довільні комплексні числа і $\tilde{\omega} = \exp\frac{\pi i}{m}$. Розглянемо оператор $\tilde{B}$, який належить до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і визначається формулою

$$(\tilde{B}f)(z) = f''(z) + \sum_{j=0}^{2m-1} \beta_j \frac{f'(\tilde{\omega}^j z) - f'(0)}{z}.$$

Оскільки область G є $2m$-симетричною, то, використовуючи доведене твердження теореми 1 для парного m, одержуємо, що оператор $\tilde{B}$ у просторі $\mathcal{H}(G)$ є еквівалентним до оператора $\frac{d^2}{dz^2}$ тоді й тільки тоді, коли $\mu_n \neq 0$, де $\mu_n = n - 1 + \sum_{j=0}^{2m-1} \beta_j \tilde{\omega}^{j(n-1)}$, $n = 2,3,\dots$.

Нехай оператор B визначається формулою (1), де α_j, $j = 0,\dots,m-1$, – довільні комплексні числа. Покладемо $\beta_{2j} = \alpha_j$ і $\beta_{2j+1} = 0$, $j = 0,\dots,m-1$. Тоді $\tilde{\omega}^2 = \omega$ і оператор $\tilde{B}$ збігається з оператором B. Крім того, $\mu_n = \lambda_n$, $n = 2,3,\dots$. Тому оператор B є еквівалентним у просторі $\mathcal{H}(G)$ до оператора $\frac{d^2}{dz^2}$. Теорему доведено. ♦

Із доведення достатності умов теореми 1 випливає правильність наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай m – довільне натуральне число, G – довільна зіркова та m-симетрична відносно початку координат область комплексної площини у випадку, якщо m – парне, або зіркова та $2m$-симетрична відносно початку координат область, якщо m – непарне число. Нехай α_j, $j = 0,\dots,n-1$, – довільні комплексні числа, λ_n, $n = 2,3,\dots$, визначаються формулами* (4) *і для них виконується умова* (5).

Тоді оператор S, який на степенях z визначається формулами (6), *де γ_0 і γ_1 – довільні ненульові комплексні числа, а γ_n, $n = 2,3,\dots$, визначаються формулами* (7), *продовжується до ізоморфізму простору $\mathcal{H}(G)$.*

2. Комутант узагальненого оператора Бесселя – Струве. Нехай $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ – послідовність комплексних чисел, визначена формулами (7). Позначимо $\beta_n = \frac{\gamma_n}{n!}$, $n = 0,1,2,\dots$. Нагадаємо, що оператори узагальненого диференціювання D_β та узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\beta$, породжені послідовністю $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$, діють на степені z за правилами

$$D_\beta(z^n) = \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} z^{n-1}, \ n \ge 1, \ D_\beta(1) = 0,$$

$$\mathcal{J}_\beta(z^n) = \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} z^{n+1}, \ n = 0, 1, \ldots .$$

Лема 2. *При виконанні умов теореми* 2 *оператори* D_β *та* $\mathcal{J}_\beta$ *продовжуються до операторів з класу* $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$.

Д о в е д е н н я. При $n = 0, 1, \ldots$ виконуються рівності

$$D_\beta(z^n) = (SDS^{-1})(z^n), \qquad \mathcal{J}_\beta(z^n) = (S\mathcal{J}S^{-1})(z^n),$$

де D – оператор диференціювання, а $\mathcal{J}$ – оператор інтегрування, який лінійно та неперервно діє у просторі $\mathcal{H}(G)$ за правилом

$$(\mathcal{J}f)(z) = \int_0^z f(t)\,dt .$$

Тому формулами $D_\beta = SDS^{-1}$, $\mathcal{J}_\beta = S\mathcal{J}S^{-1}$ оператори D_β та $\mathcal{J}_\beta$ продовжуються до операторів з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. ♦

Наслідок 1. *При виконанні умов теореми* 2 *справджується рівність*

$$B = D_\beta^2 .$$

Д о в е д е н н я. З теореми 1 і леми 2 випливає, що виконуються рівності $B = SD^2S^{-1}$, $D_\beta = SDS^{-1}$. Тому $B = D_\beta^2$. ♦

Опишемо далі комутант оператора B у просторі $\mathcal{H}(G)$, тобто знайдемо загальний вигляд усіх операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які є переставними з оператором B. Для цього потрібен опис комутанта оператора D^2 у просторі $\mathcal{H}(G)$. У роботі [6] встановлено, що у випадку, коли область G є обмеженою, зірковою і симетричною відносно початку координат, загальний вигляд операторів T_1 з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, переставних з оператором D^2, задається формулою

$$(T_1 f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n f^{(n)}(-z) + a_{-1}\big((\mathcal{J}f)(z) - (\mathcal{J}f)(-z)\big), \qquad (10)$$

де функції $\tilde{a}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ та $\tilde{b}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ – цілі функції з класу $[1, 0]$ і $a_{-1} \in \mathbb{C}$. У роботі [6] встановлено також, що оператор T_1 вигляду (10) є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$ тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$a(t)a(-t) - b(t)b(-t) = \text{const} \ne 0, \qquad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \qquad (11)$$

де

$$a(t) = \tilde{a}(t) + \frac{a_{-1}}{t}, \qquad b(t) = \tilde{b}(t) + \frac{a_{-1}}{t}.$$

Теорема 3. *Нехай* m *– довільне натуральне число,* G *– довільна обмежена, зіркова та* m*-симетрична відносно початку координат область комплексної площини у випадку, якщо* m *– парне, або обмежена, зіркова та* $2m$*-симетрична відносно початку координат область, якщо* m *– непарне. Нехай* α_j, $j = 0, \ldots, n-1$, *– довільні комплексні числа,* λ_n, $n = 2, 3, \ldots$, *визначаються формулами* (4) *і для них виконується умова* (5).

Для того щоб оператор T належав до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і був переставним з оператором B, необхідно та достатньо, щоб T зображався у вигляді

$$(Tf)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (D_\beta^n f)(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (D_\beta^n f)(-z) +$$

$$+ a_{-1}\big((\mathcal{J}_\beta f)(z) - (\mathcal{J}_\beta f)(-z)\big), \tag{12}$$

де $\tilde{a}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $\tilde{b}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ *– цілі функції з класу* $[1,0]$ *і* $a_{-1} \in \mathbb{C}$.

Д о в е д е н н я. За теоремою 1 оператор B у просторі $\mathcal{H}(G)$ є еквівалентним до оператора D^2, причому виконується рівність $BS = SD^2$, де S – ізоморфізм простору $\mathcal{H}(G)$, побудований у теоремі 2. Тому оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ є переставним з оператором B тоді й тільки тоді, коли $T = ST_1S^{-1}$, де T_1 – деякий оператор з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, переставний з оператором D^2. Загальний вигляд лінійних неперервних операторів $T_1 \in \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які комутують з оператором D^2, описується формулою (10), яку подамо в такому вигляді:

$$T_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n P D^n + a_{-1}(\mathcal{J} - P\mathcal{J}), \tag{13}$$

де $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, причому $(Pf)(z) = f(-z)$, $\tilde{a}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $\tilde{b}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ – цілі функції з класу $[1,0]$ і $a_{-1} \in \mathbb{C}$, і ряди в (13) поточково збігаються у просторі $\mathcal{H}(G)$. Оскільки $\mathcal{J}_\beta S = S\mathcal{J}$ і оператор P є переставним з оператором S, то оператор T є переставним з оператором B і належить до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ тоді й тільки тоді, коли

$$T = ST_1S^{-1} = S\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n P D^n + a_{-1}(\mathcal{J} - P\mathcal{J})\right)S^{-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (SDS^{-1})^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n P(SDS^{-1})^n +$$

$$+ a_{-1}\big(S\mathcal{J}S^{-1} - P(S\mathcal{J}S^{-1})\big) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_\beta^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n P D_\beta^n + a_{-1}(\mathcal{J}_\beta - P\mathcal{J}_\beta).$$

Теорему 3 доведено. ♦

Наслідок 2. *При виконанні умов теореми* 2 *оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$, переставним з оператором B, тоді й тільки тоді, коли він зображається формулою* (12), *де* $\tilde{a}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $\tilde{b}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ – *цілі функції з класу* $[1,0]$, $a_{-1} \in \mathbb{C}$, *і виконується умова* (11).

3. Гіперциклічність і хаотичність узагальненого оператора Бесселя – Струве. Для застосування одержаних результатів наведемо деякі означення і поняття теорії динамічних систем [7, 11].

Нехай A – деякий оператор з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Функцію $f \in \mathcal{H}(G)$ називають гіперциклічним елементом оператора A, якщо система функцій $(A^n f)_{n=0}^{\infty}$ є щільною у просторі $\mathcal{H}(G)$. Оператор A називають гіперциклічним, якщо він має гіперциклічний елемент. Функцію $f \in \mathcal{H}(G)$ називають *періодичним елементом* оператора A, якщо для деякого натурального n виконується рівність $A^n f = f$. Оператор A називають *хаотичним*, якщо він має щільну в $\mathcal{H}(G)$ множину періодичних елементів.

Теорема 4. *Нехай m – довільне натуральне число, G – довільна обмежена, зіркова та m-симетрична відносно початку координат область комплексної площини у випадку, якщо m – парне, або обмежена, зіркова та $2m$-симетрична відносно початку координат область, якщо m – непарне. Нехай α_j, $j = 0,\dots,n-1$, – довільні комплексні числа, для λ_n, $n = 2,3,\dots$, які визначаються формулами* (4)*, виконується умова* (5)*, і нехай ціла функція $\tilde{a}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ належить до класу $[1,0]$, причому існує принаймні одне $n \ge 1$, для якого $a_n \ne 0$.*

Тоді оператор $a(D_\beta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n D_\beta^n$ є гіперциклічним і хаотичним у просторі $\mathcal{H}(G)$.

Д о в е д е н н я. При доведенні леми 2 встановлено, що при виконанні умов теореми 4 оператор узагальненого диференціювання D_β є еквівалентним у просторі $\mathcal{H}(G)$ до оператора диференціювання D, і при цьому виконується рівність $D_\beta = SDS^{-1}$. Тому

$$a(D_\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_\beta^n = S\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n\right)S^{-1} = Sa(D)S^{-1}.$$

Але оскільки оператор $a(D) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n D^n$ є переставним з D і відмінним від скалярного оператора [1], то він є гіперциклічним і хаотичним у просторі $\mathcal{H}(G)$. З рівності $a(D_\beta) = Sa(D)S^{-1}$ випливає, що оператор $a(D_\beta)$ є також гіперциклічним і хаотичним у просторі $\mathcal{H}(G)$. ♦

З теореми 4 і наслідку 1 випливає правильність такого твердження.

Наслідок 3. *При виконанні умов теореми 2 узагальнений оператор Бесселя – Струве B є гіперциклічним і хаотичним у просторі $\mathcal{H}(G)$.*

Зазначимо, що у [14] доведено гіперциклічність оператора диференціювання у просторі цілих функцій $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Пізніше в [10] було встановлено, що довільний диференціальний оператор нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду $T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n D^n$ при умові, що характеристична функція цього оператора $\tilde{a}(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ є цілою функцією експоненціального типу і цей оператор, відмінний від скалярного, є гіперциклічним у просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Іншими словами, будь-який оператор з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$, який є переставним з оператором диференціювання і відмінний від скалярного, є гіперциклічним у просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Цей результат узагальнювався в різних напрямках. У [2] встановлено умови гіперциклічності у просторі $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ диференціальних операторів нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами відносно деяких класів операторів узагальненого диференціювання. В [1] доведено гіперциклічність довільного лінійного неперервного оператора, який діє у просторі функцій, аналітичних в області, є переставним з оператором диференціювання і відмінним від скалярного. У зв'язку з цими результатами виникає задача знаходження умов гіперциклічності операторів з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які є переставними з узагальненим оператором Бесселя – Струве, або зі степенем оператора диференціювання. Як зазначалося раніше, загальний вигляд лінійних неперервних операторів з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які є переставними з оператором D^2, описується формулою (13). Гіперциклічність першого доданка правої частини рівності (13) доведено в роботах [1, 2, 10]. Гіперциклічність другого доданка (13) випливає з гіперциклічності першого доданка. Цікавою є також задача про встановлення умов гіперциклічності складових операторів нескінченного порядку зі сталими коефіцієнтами відносно диференціювання вигляду

$$T_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n P D^n$$

у просторах функцій, аналітичних в областях. Тут P – оператор, який діє у відповідному просторі аналітичних функцій за правилом $(Pf)(z) = f(-z)$. Різні властивості таких операторів вивчалися у [3].

1. *Братищев А. В.* Хаотичность коммутирующих с дифференцированием Данкла преобразований пространства аналитических функций // Вестн. Донск. гос. техн. ун-та. – 2009. – **9**, № 2(41). – С. 196–207.
2. *Ким В. Э.* Гиперцикличность и хаотичность операторов обобщенной свертки, порождаемых операторами Гельфонда–Леонтьева // Мат. заметки. – 2009. – **85**, № 6. – С. 849–856.

   Те саме: *Kim V. E.* Hypercyclicity and chaotic character of generalized convolution operators generated by Gel'fond–Leont'ev operators // Math. Notes. – 2009. – **85**, No. 6. – P. 807–813.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Составные операторные уравнения в обобщенных производных и их приложения к последовательностям Аппеля // Мат. сб. – 1977. – **102** (**144**), № 4. – С. 475–498.

   Те саме: *Korobeĭnik Ju. F.* Compound operator equations in generalized derivatives and their applications to Appell sequences // Math. USSR-Sb. – 1977. – **31**, No. 4. – P. 425–443.
4. *Лінчук Ю. С.* Про один клас діагональних операторів у просторах аналітичних функцій та його застосування // Доп. НАН України. – 2014. – № 3. – С. 25–28.
5. *Лінчук Ю. С.* Узагальнений оператор Данкла – Опдама та його властивості у просторах функцій, аналітичних в областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 4. – С. 7–17.

   Те саме: *Linchuk Yu. S.* Generalized Dunkl–Opdam operator and its properties in the spaces of functions analytic in domains // J. Math. Sci. – 2017. – **220**, No. 1. – P. 1–14.
6. *Царьков М. Ю.* Изоморфизмы некоторых аналитических пространств, перестановочные со степенью оператора дифференцирования // Теория функций, функц. анализ и их прил. – 1970. – Вып. 11. – С. 86–92.
7. *Devaney R. L.* An introduction to chaotic dynamical systems. – Redwood City: Addison-Wesley Publ., 1989. – xvi+336 p.
8. *Gasmi A., Sifi M.* Analytic mean-periodic functions associated with the Bessel–Struve operator on a disk // Glob. J. Pure Appl. Math. – 2005. – **1**, No. 1. – P. 55–68.
9. *Gasmi A., Sifi M.* The Bessel–Struve intertwining operator on $\mathbb{C}$ and mean-periodic functions // Int. J. Math. & Math. Sci. – 2004. – **2004**, No. 59. – P. 3171–3185. https://www.emis.de/journals/HOA/IJMMS/Volume2004.html
10. *Godefroy G., Shapiro J. H.* Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds // J. Funct. Anal. – 1991. – **98**, No. 2. – P. 229–269.

11. *Grosse-Erdmann K.-G.* Universal families and hypercyclic operators // Bull. Amer. Math. Soc. – 1999. – **36**, No. 3. – P. 345–381.
12. *Kamoun L., Negzaoui S.* Sonine transform associated with the Bessel–Struve kernel // Math. Sci. Res. J. – 2013. – **17**, No. 8. – P. 208–219.
13. *Kamoun L., Sifi M.* Bessel–Struve intertwining operator and generalized Taylor series on the real line // Integr. Transf. Spec. Funct. – 2005. – **16**, No. 1. – P. 39–55.
14. *MacLane G. R.* Sequences of derivatives and normal families // J. Analyse Math. – 1952. – **2**, No. 1. – P. 72–87.
15. *Soltani F.* Fock spaces for the q-Bessel–Struve kernel // Bull. Math. Anal. Appl. – 2012. – **4**, No. 2. – P. 1–16.

ОБОБЩЁННЫЙ ОПЕРАТОР БЕССЕЛЯ – СТРУВЕ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО СВОЙСТВА

В пространстве функций, аналитических в произвольной области, определен обобщённый оператор Бесселя – Струве. Исследованы условия эквивалентности обобщённого оператора Бесселя – Струве и оператора двукратного дифференцирования. Описан коммутант обобщённого оператора Бесселя – Струве, а также установлены его гиперцикличность и хаотичность.

GENERALIZED BESSEL – STRUVE OPERATOR AND SOME OF ITS PROPERTIES

The generalized Bessel – Struve operator is defined in the space of functions analytic in arbitrary domain. The conditions of the equivalence of the generalized Bessel – Struve operator to the second-derivative operator are investigated. The commutant of the generalized Bessel – Struve operator is described, and hypercyclicity and chaotic character of the generalized Bessel – Struve operator is established.

Чернів. нац. ун-т
ім. Юрія Федьковича, Чернівці

Одержано
10.10.15