УДК 517.524

Х. Й. Кучмінська

# ПРО ЗБІЖНІСТЬ ОДНОГО ДВОВИМІРНОГО УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕПЕРЕРВНОГО $g$-ДРОБУ

*Запропоновано двовимірне узагальнення неперервного $g$-дробу та досліджено рівномірну збіжність такого узагальненого дробу.*

**Попередні дослідження.** Одним з найбільш вивчених класів функціональних неперервних правильних $C$-дробів є неперервні $g$-дроби [2]. Для запису неперервного дробу використовуємо позначення Прінгсґейма та Слєшинського [3]:

$$\frac{s_0\,|}{|\,1}+\frac{g_1 z\,|}{|\,1}+\frac{(1-g_1)g_2 z\,|}{|\,1}+\frac{(1-g_2)g_3 z\,|}{|\,1}+\ldots=$$

$$=\cfrac{s_0}{1+\cfrac{g_1 z}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{(1-g_i)g_{i+1}z}{1}}},$$

де $s_0>0$, $0<g_n<1$, $n=1,2,\ldots$. Техніку $g$-дробів використовують при доведенні багатьох ознак збіжності неперервних дробів, зокрема, ознак збіжності Перрона, Ван Флека, Пейдона-Уолла, Слєшинського – Прінгсгейма, Коха [2].

Загальний огляд робіт стосовно багатовимірних узагальнень $g$-дробів зроблено у роботі [1].

У цій роботі розглянемо одне з можливих узагальнень $g$-дробу на двовимірний випадок і дослідимо рівномірну збіжність такого узагальненого дробу.

**Основні результати.** Введемо означення двовимірного неперервного $g$-дробу (ДН $g$-Д).

***Означення 1.*** Двовимірний неперервний дріб

$$\frac{g_0}{\Phi_0+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{(1-g_{i-1})g_i z_{i,i}}{\Phi_i}},\tag{1}$$

де

$$\Phi_i=1+\frac{(1-g_i)g_{i+1,i}z_{i+1,i}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{(1-g_{i+j,i})g_{i+j+1,i}z_{i+j+1,i}}{1}}+$$
$$+\frac{(1-g_i)g_{i,i+1}z_{i,i+1}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{(1-g_{i,i+j+1})g_{i,i+j+1}z_{i,i+j+1}}{1}},$$

$g_i$, $g_{i,j}$, $i\ge 0$, $j\ge 0$, $i+j\ge 1$, – дійсні сталі такі, що $0\le g_i<1$, $0\le g_{i,j}<1$, або $0<g_i\le 1$, $0<g_{i,j}\le 1$, $z_{i,j}$ – комплексні змінні такі, що $z_{i+j,i}=z_1$, $z_{i,i+j}=z_2$, $z_{i,i}=z_1 z_2$, називаємо *двовимірним неперервним* $g$-дробом (ДН $g$-Д).

Підхідні дроби або наближення ДН $g$-Д (1) – це скінченні двовимірні неперервні дроби вигляду

$$f_n = \cfrac{g_0}{\Phi_0^{(n-1)} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{n-1} \cfrac{(1-g_{i-1})g_i z_1 z_2}{\Phi_i^{(n-1-i)}}}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

де

$$\Phi_i^{(s)} = 1 + \cfrac{(1-g_i)g_{i+1,i}z_1}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{s-1} \cfrac{(1-g_{i+j,i})g_{i+j+1,i}z_1}{1}} + \cfrac{(1-g_i)g_{i,i+1}z_2}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{s-1} \cfrac{(1-g_{i,i+j})g_{i,i+j+1}z_2}{1}},$$

$$\Phi_i^{(0)} = 1, \qquad \Phi_i^{(1)} = 1 + \frac{(1-g_i)g_{i+1,i}z_1}{1} + \frac{(1-g_i)g_{i,i+1}z_2}{1},$$

$$s = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad i = 0, 1, \ldots, s.$$

**Теорема 1.** *Нехай* $z_{i,j}$, $i = 0, 1, \ldots$, $j = 0, 1, \ldots$, *– комплексні змінні, а* $g_i$, $g_{i,j}$ *– дійсні числа такі, що задовольняють нерівності*

$$0 \le g_i < 1, \qquad 0 \le g_{i,j} < 1 \tag{3}$$

*або*

$$0 < g_i \le 1, \qquad 0 < g_{i,j} \le 1. \tag{4}$$

*Тоді*

**1°**) *двовимірний неперервний* $g$*-дріб* (1) *є рівномірно збіжним для*

$$|z_{i+1,i}| \le \alpha, \qquad |z_{i,i+1}| \le \alpha, \qquad |z_{i,i}| \le \beta, \qquad |z_{i,j}| \le 1, \quad |i-j| > 1,$$

$$0 < \alpha < 1/2, \qquad 0 < \beta < 1 - 2\alpha;$$

**2°**) *значення двовимірного неперервного* $g$*-дробу* (1) *і його наближень належать до області*

$$\left| z - \frac{1}{(2-q_0)} \right| \le \frac{1-q_0}{2-q_0}, \qquad q_0 = \frac{g_0}{1 - 2\alpha(1-g_0)}. \tag{5}$$

Д о в е д е н н я. Дамо означення мажорантного дробу [3, с. 130]. Розглянемо двовимірний неперервний дріб (ДНД) з комплексними елементами

$$\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=0}^{\infty} \frac{a_{i,i}}{F_i}, \qquad F_i = b_{i,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}}{b_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}}{b_{i,i+j}}. \tag{6}$$

***Означення 2.*** Двовимірний неперервний дріб з числовими комплексними елементами

$$\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=0}^{\infty} \frac{c_{i,i}}{G_i}, \qquad G_i = d_{i,i} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_{i+j,i}}{d_{i+j,i}} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_{i,i+j}}{d_{i,i+j}}, \tag{7}$$

називаємо *мажорантним дробом* для двовимірного неперервного дробу (6), якщо існують таке невід'ємне число $m_0$ і така додатна стала $M$, що для всіх цілих $m, n \ge m_0$ виконуються

$$|f_m - f_n| \le M\,|q_m - q_n| \qquad \big(|f_m - f_n| \ge M\,|q_m - q_n|\big),$$

де $f_n$, $q_n$ – $n$-ті наближення двовимірних неперервних дробів (6) і (7) відповідно.

Покажемо, що мажорантним дробом для ДН $g$-Д (1) є двовимірний неперервний дріб

$$\frac{g_0}{\tilde{\Phi}_0 - \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(1-g_{i-1})g_i\beta}{\tilde{\Phi}_i}},$$

$$\tilde{\Phi}_i = 1 - \frac{(1-g_i)g_{i+1,i}\alpha}{1 - \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(1-g_{i+j,i})g_{i+j+1,i}}{1}} - \frac{(1-g_i)g_{i,i+1}\alpha}{1 - \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(1-g_{i,i+j})g_{i,i+j+1}}{1}}, \qquad (8)$$

з наближеннями $\tilde{f}_n$ ($\tilde{f}_n$ – $n$-те наближення ДН $g$-Д (8))

$$\tilde{f}_n = \frac{g_0}{\tilde{\Phi}_0^{(n-1)} - \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{n-1} \frac{(1-g_{i-1})g_i\beta}{\tilde{\Phi}_i^{(n-1-i)}}},$$

$$\tilde{\Phi}_i^{(s)} = 1 - \frac{(1-g_i)g_{i+1,i}\alpha}{1 - \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{s-1} \frac{(1-g_{i+j,i})g_{i+j+1,i}}{1}} - \frac{(1-g_i)g_{i,i+1}\alpha}{1 - \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{s-1} \frac{(1-g_{i,i+j})g_{i,i+j+1}}{1}},$$

$$s = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\Phi_i^{(0)} = 1, \qquad \Phi_i^{(1)} = 1 - \frac{(1-g_i)g_{i+1,i}\alpha}{1} - \frac{(1-g_i)g_{i,i+1}\alpha}{1}.$$

Записавши залишки дробів ДН $g$-Д (1) та ДН $g$-Д (8) як

$$Q_i^{(s-1-i)} = \Phi_i^{(s-1-i)} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{s-1} \frac{(1-g_{j-1})g_j z_{j,j}}{\Phi_j^{(s-1-j)}} = \Phi_i^{(s-1-i)} + \frac{(1-g_i)g_{i+1,i+1}z_{j,j}}{Q_{i+1}^{(s-i-2)}},$$

$$i = 0, 1, \ldots, s-2,$$

$$Q_{s-1}^{(0)} = 1,$$

$$Q_{i+j,i}^{(s-1-i)} = 1 + \frac{(1-g_{i+j,i})g_{i+j+1,i}z_{i+j+1,i}}{Q_{i+j+1,i}^{(s-1-i)}},$$

$$Q_{i,i+j}^{(s-1-i)} = 1 + \frac{(1-g_{i,i+j})g_{i,i+j+1}z_{i,i+j+1}}{Q_{i,i+j+1}^{(s-1-i)}}, \quad i = 0, 1, \ldots, s-1, \quad i+j = 1, \ldots, s-2,$$

$$Q_{s-1,i}^{(s-1-i)} = Q_{i,s-1}^{(s-1-i)} = 1,$$

$$\tilde{Q}_i^{(s-1-i)} = \tilde{\Phi}_i^{(s-1-i)} - \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=i+1}^{s-1} \frac{(1-g_{j-1})g_j\beta}{\tilde{\Phi}_j^{(s-1-j)}} = \tilde{\Phi}_i^{(s-i-i)} - \frac{(1-g_i)g_{i+1}\beta}{\tilde{Q}_{i+1}^{(s-i-2)}},$$

$$i = 0, 1, \ldots, s-2,$$

$$\tilde{Q}_{s-1}^{(0)} = 1,$$

$$\tilde{Q}_{i+j,i}^{(s-1-i)} = 1 - \frac{(1-g_{i+j,i})g_{i+j+1,i}}{\tilde{Q}_{i+j+1,i}^{(s-1-i)}},$$

$$\tilde{Q}_{i,i+j}^{(s-1-i)} = 1 - \frac{(1-g_{i,i+1})g_{i,i+j+1}}{\tilde{Q}_{i,i+j+1}^{(s-1-i)}}, \quad i = 0, 1, \ldots, s-1, \quad i+j = 1, \ldots, s-2,$$

$$\tilde{Q}_{s-1,i}^{(s-1-i)} = \tilde{Q}_{i,s-1}^{(s-1-i)} = 1,$$

методом математичної індукції встановимо наступні оцінки, щоб переконатися, що всі залишки відмінні від нуля:

$$\left|Q_{i+j,i}^{(s-1-i)}\right| \ge 1 - \frac{(1-g_{i+j,i})g_{i+j+1,i}}{\left|Q_{i+j+1,i}^{(s-1-i)}\right|} \ge \tilde{Q}_{i+j,i}^{(s-1-i)} > g_{i+j,i}\,, \tag{9}$$

$$\left|Q_{i,i+j}^{(s-1-i)}\right| \ge 1 - \frac{(1-g_{i,i+j})g_{i,i+j+1}}{\left|Q_{i,i+j+1}^{(s-1-i)}\right|} \ge \tilde{Q}_{i,i+j}^{(s-1-i)} \ge g_{i,i+j}\,, \tag{10}$$

$$\left|Q_{i}^{(s-1-i)}\right| \ge \left|\Phi_{i}^{(s-i-1)}\right| - \frac{(1-g_i)g_{i+1}\beta}{\left|Q_{i+1}^{(s-i-2)}\right|} \ge \tilde{Q}_{i}^{(s-1-i)} \ge (1-2\alpha(1-g_i))h_i^{(s-1)}\,,$$

$$i = 0, 1, \ldots, s-2\,,$$

$$Q_{s-1}^{(0)} = 1\,. \tag{11}$$

Тут $h_i^{(m)}$ – $i$-й залишок $m$-го наближення неперервного дробу:

$$h_i^{(m)} = 1 - \cfrac{(1-q_i)q_{i+1}}{1 - \cfrac{(1-q_{i+1})q_{i+2}}{1 - \ddots - \cfrac{(1-q_{m-1})q_m}{1}}}\,, \qquad q_i = \frac{g_i}{1-2\alpha(1-g_i)}\,.$$

Зафіксуємо $s$ і проведемо індукцію за $j$. Дійсно, при $j = s-1-i$ маємо $Q_{s-1,i}^{(s-1-i)} = 1 \ge g_{s-1,i}$. Припустимо, що нерівність (9) виконується для довільного $j = m$, $s-1-i \ge j \ge m > 1$, тобто $\left|Q_{i+m,i}^{(s-1-i)}\right| \ge g_{i+m,i}$ і доведемо, що вона справджується для $j = m-1$:

$$\left|Q_{i+m-1,i}^{(s-1-i)}\right| = \left|1 + \frac{(1-g_{i+m-1,i})g_{i+m,i}z_{i+m,i}}{Q_{i+m,i}^{(s-1-i)}}\right| \ge$$

$$\ge 1 - \frac{(1-g_{i+m-1,i})g_{i+m,i}\left|z_{i+m,i}\right|}{\tilde{Q}_{i+m,i}^{(s-1-i)}} =$$

$$= \tilde{Q}_{i+m-1,i}^{(s-1-i)} \ge 1 - \cfrac{(1-g_{i+m-1,i})g_{i+m,i}}{1 - \cfrac{(1-g_{i+m,i})g_{i+m+1,i}}{1 - \ddots}} \ge g_{i+m-1,i}\,.$$

Аналогічно доводимо нерівність (10).

Оскільки

$$\frac{g_{i+1,i}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(1-g_{i+j,i})g_{i+j+1,i}}{1}} < 1, \qquad \frac{g_{i,i+1}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(1-g_{i,i+j})g_{i,i+j+1}}{1}} < 1\,,$$

то

$$\left|\Phi_i^{(k)}\right| = \left|1 - \frac{(1-g_i)g_{i+1,i}\alpha}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(1-g_{i+j,i})g_{i+j+1,i}}{1}} - \frac{(1-g_i)g_{i,i+1}\alpha}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(1-g_{i,i+j})g_{i,i+j+1}}{1}}\right| \ge$$

$$\ge 1 - 2\alpha(1-g_i)\,. \tag{12}$$

Враховуючи нерівності (12) та еквівалентні перетворення, скінченний двовимірний неперервний дріб $Q_i^{(s-1-i)}$ зведемо до вигляду

$$Q_i^{(s-1-i)} = \Phi_i^{(s-1-i)} + \sum_{j=i+1}^{s-1} \frac{(1-g_{j-1})g_j z_{j,j}}{\Phi_j^{(s-1-j)}} =$$

$$= \Phi_i^{(s-1-i)}\left(1 + \sum_{j=i+1}^{s-1} \frac{(1-g_{j-1})g_j z_{j,j}/\Phi_{j-1}^{(s-j)}\Phi_j^{(s-1-j)}}{1}\right).$$

Тоді

$$\left|Q_i^{(s-1-i)}\right| \geq \left|\Phi_i^{(s-1-i)}\right| \left(1 - \mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{s-1} \frac{(1-g_{j-1})g_j\beta \big/ \left|\Phi_{j-1}^{(s-j)}\Phi_j^{(s-1-j)}\right|}{1}\right) \geq$$

$$\geq (1-2\alpha(1-g_i))\left(1 - \mathop{\mathrm{D}}_{j=i+1}^{s-1} \frac{(1-q_{j-1})q_j}{1}\right),$$

$$q_k = \frac{g_k}{1-2\alpha(1-g_k)}.$$

Тепер можемо довести нерівність (11). При $i = s-1$ маємо

$$Q_{s-1}^{(0)} = \tilde{Q}_{s-1}^{(0)} = 1 > (1-2\alpha(1-g_{s-1}))h_{s-1}^{(0)}, \qquad h_{s-1}^{(0)} = 1,$$

а при $i = s-2$ маємо

$$\left|Q_{s-2}^{(1)}\right| = \left|\Phi_{s-2}^{(1)} + \frac{(1-g_{s-2})g_{s-1}z_{s-1,s-1}}{Q_{s-1}^{(0)}}\right| \geq \left|\Phi_{s-2}^{(1)}\right| - \frac{(1-g_{s-2})g_{s-1}\beta}{\tilde{Q}_{s-1}^{(0)}} =$$

$$= \tilde{Q}_{s-2}^{(1)} \geq (1-2\alpha(1-g_{s-2}))\left(1 - \frac{(1-q_{s-2})q_{s-1}}{h_{s-1}^{(0)}}\right) =$$

$$= (1-2\alpha(1-g_{s-2}))h_{s-2}^{(1)}.$$

Припускаючи, що ця нерівність є правильною для $i = k+1 < s-1$, доведемо її для $i = k$:

$$\left|Q_k^{(s-1-k)}\right| = \left|\Phi_k^{(s-1-k)} + \frac{(1-g_k)g_{k+1}z_{k+1,k+1}}{Q_{k+1}^{(s-2-k)}}\right| \geq \left|\Phi_k^{(s-1-k)}\right| - \frac{(1-g_k)g_{k+1}\beta}{\left|Q_{k+1}^{(s-2-k)}\right|} \geq$$

$$\geq \tilde{\Phi}_k^{(s-1-k)} - \frac{(1-g_k)g_{k+1}\beta}{\tilde{Q}_{k+1}^{(s-2-k)}} = \tilde{Q}_k^{(s-1-k)} \geq$$

$$\geq (1-2\alpha(1-g_k))\left(1 - \frac{(1-g_k)g_{k+1}\beta/(1-2\alpha(1-g_k))}{(1-2\alpha(1-g_{k+1}))h_{k+1}^{(s-2-k)}}\right) =$$

$$= (1-2\alpha(1-g_k))\left(1 - \frac{(1-q_k)q_{k+1}}{h_{k+1}^{(s-2-k)}}\right) =$$

$$= (1-2\alpha(1-g_k))h_k^{(s-1-k)}.$$

Використаємо формулу різниці для двовимірних неперервних дробів [3, с. 45] та оцінимо її для наближень ДН $g$-Д (1), (2) $(m > n)$:

$$|f_m - f_n| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left|\Phi_i^{(m-1-i)} - \Phi_i^{(n-1-i)}\right| g_0 \prod_{j=1}^{i}(1-g_{j-1})g_j\left|z_{j,j}\right|}{\prod_{j=0}^{i}\left|Q_j^{(n-1-j)}\right|\left|Q_j^{(m-1-j)}\right|} +$$

$$+ \frac{g_0\prod_{j=1}^{n}(1-g_{j-1})g_j\left|z_{j,j}\right|}{\prod_{j=0}^{n}\left|Q_j^{(m-1-j)}\right|\prod_{j=0}^{n-1}\left|Q_j^{(n-1-j)}\right|}$$

і, враховуючи, що $\left|\Phi_i^{(m-1-i)} - \Phi_i^{(n-1-i)}\right| \leq \tilde{\Phi}_i^{(n-1-i)} - \tilde{\Phi}_i^{(m-1-i)}$, запишемо

$$|f_m - f_n| \le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\tilde{\Phi}_i^{(n-1-i)} - \tilde{\Phi}_i^{(m-1-i)}) g_0 \beta^i \prod_{j=1}^{i} (1 - g_{j-1}) g_j}{\prod_{j=0}^{i} \tilde{Q}_j^{(n-1-j)} \tilde{Q}_j^{(m-1-j)}} +$$

$$+ \frac{g_0 \beta^n \prod_{j=1}^{n} (1 - g_{j-1}) g_j}{\prod_{j=0}^{n} \tilde{Q}_j^{(m-1-j)} \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{Q}_j^{(n-1-j)}} = \tilde{f}_m - \tilde{f}_n ,$$

де $\tilde{f}_n$ – $n$-те наближення ДН $g$-Д (8).

Отже, ДН $g$-Д (8) є мажорантним дробом для ДН $g$-Д (1). Послідовність $\{\tilde{f}_n\}$ монотонно зростає та обмежена зверху:

$$\tilde{f}_n = \frac{g_0}{\tilde{Q}_0^{(n-1)}} \le \frac{g_0}{(1 - 2\alpha(1 - g_0))q_0} = 1 ,$$

а тому має границю.

Покажемо, що неперервний дріб

$$\frac{q_0 \mid}{\mid 1} - \frac{(1 - q_0) q_1 \mid}{\mid 1} - \frac{(1 - q_1) q_2}{1 -} - \ldots \tag{13}$$

є мажорантним дробом для ДН $g$-Д (8), а значить, і для ДН $g$-Д (1).

Запишемо різницю між $m$-м, $k_m$, і $n$-м, $k_n$, наближеннями дробу (13) $(m > n)$:

$$k_m - k_n = \frac{\prod_{j=0}^{n} q_j \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_i)}{\prod_{j=0}^{n} h_j^{(m-1-j)} \prod_{j=0}^{n-1} h_j^{(n-1-j)}} .$$

Враховуючи нерівності (9)–(11) і формулу різниці для $\tilde{f}_m - \tilde{f}_n$, отримаємо

$$\tilde{f}_m - \tilde{f}_n \le A \frac{\prod_{j=0}^{n} q_j \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q_i)}{\prod_{j=0}^{n} h_j^{(m-1-j)} \prod_{j=0}^{n-1} h_j^{(n-1-j)}} = A(k_m - k_n) ,$$

де $A$ – абсолютна константа. Отже, неперервний дріб (13) мажорує ДН $g$-Д (8), а тому і ДН $g$-Д (1). Правильність нерівності (5) при виконанні припущень (3) або (4) теореми випливає з аналогічних тверджень для мажорантного дробу [5, с. 48].

Теорему доведено. ♦

***Зауваження***. Запропоновано ще декілька інших узагальнень неперервного $g$-дробу, кожне з яких можна використати для розв'язування певних задач [3, 4].

**Висновки.** Отриманий результат можна використати для доведення теорем збіжності багатовимірних узагальнень неперервних дробів.

1. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Багатовимірні узагальнення $g$-дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 2. – С. 34–41.
   Те саме: *Bodnar D. I., Kuchmins'ka Kh. Yo.* Multidimensional generalizations of $g$-fractions // J. Math. Sci. – 2009. – **162**, No. 1. – P. 34–43.
2. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
   Те саме: *Jones W. B., Thron W. J.* Continued fractions: Analytic theory and applications. – Reading, MA: Addison-Wesley Publ. Co., 1980. – xxii + 428 p. – Encyclopedia of Mathematics and its Applications / Ed. G.-C. Rota. – Vol. 11.
3. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2010. – 218 с.
4. *Kuchmins'ka Kh. Yo., Vozna S. M.* Truncation error bounds for a two-dimensional continued $g$-fraction // Мат. студії. – 2005. – **24**, № 2. – С. 120–126.
5. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

## О СХОДИМОСТИ ОДНОГО ДВУМЕРНОГО ОБОБЩЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ $g$-ДРОБИ

*Предложено двумерное обобщение непрерывной $g$-дроби и исследована равномерная сходимость такой обобщенной дроби.*

## ON CONVERGENCE OF SOME CONTINUED $g$-FRACTION GENERALIZATION

*A two-dimensional generalization of the continued $g$-fraction is proposed and the uniform convergence of this generalized fraction is investigated.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.12.15