УДК 517.95

П. І. Каленюк[1,2], З. М. Нитребич[1], Г. Кудук[2], М. М. Симотюк[3]

ІНТЕГРАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ В НЕОБМЕЖЕНІЙ СМУЗІ

Встановлено умови існування в шкалі просторів Соболєва єдиного розв'язку задачі з інтегральними умовами у вигляді моментів для рівнянь із частинними похідними високого порядку. Розв'язок цієї задачі побудовано за допомогою перетворення Фур'є.

Вступ. Математичне моделювання багатьох фізичних явищ та біологічних процесів призводить до задач з нелокальними інтегральними умовами для рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними. Такі умови виникають у випадках, коли межа області є недоступною для проведення вимірювань або неможливо безпосередньо обчислити певні фізичні величини, однак відомі їхні усереднені значення. Прикладом можуть бути задачі, пов'язані з дослідженнями процесів поширення тепла [1, 2, 14, 15], процесів вологопереносу у капілярно-пористих середовищах, дифузії частинок у турбулентній плазмі, обернених задач [3], а також задач математичної біології та демографії [7].

Активне дослідження задач з інтегральними умовами для рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними розпочалося порівняно недавно. Інтерес до їх вивчення зумовлений не тільки важливістю їхньої фізичної інтерпретації, а також тим, що для багатьох таких рівнянь неможлива коректна постановка локальних крайових задач [9, 10].

У цій роботі викладено результати, отримані при дослідженні задачі з інтегральними умовами у вигляді моментів для рівнянь із частинними похідними високого порядку в необмеженій смузі; при цьому описано клас рівнянь із частинними похідними, для яких вказана задача є коректною у просторах Соболєва. Близькими до проведених досліджень є результати роботи [11], у якій отримано критерій коректної розв'язності у класах функцій скінченної гладкості зі степеневим зростанням на нескінченності за просторовими координатами задачі з інтегральними умовами (що не містять вагових функцій під знаком інтеграла) для системи рівнянь із частинними похідними першого порядку в необмеженій смузі. У роботах [17, 18] для опису класів єдиності та класів існування розв'язку задачі з інтегральними умовами для диференціально-операторного рівняння застосовано диференціально-символьний метод.

Зазначимо, що у випадку обмежених областей розв'язність задач з інтегральними умовами у вигляді моментів для рівнянь із частинними похідними, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників [4–6, 16], для оцінок знизу яких використано метричний підхід і результати метричної теорії чисел [9].

1. Основні умовні позначення. Будемо використовувати такі позначення: $\Pi(T) = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0,T),\, x \in \mathbb{R}\}$, $T > 0$, $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \ge 0$, – простір Соболєва функцій $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ таких, що $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ і для яких є скінченною норма

$$\|\varphi; \mathcal{H}_\alpha\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)^\alpha\, |\tilde\varphi(\xi)|^2\, d\xi}\,,$$

де $\tilde\varphi(\xi)$ – перетворення Фур'є функції $\varphi(x)$, $\mathcal{H}^n_\alpha$, $\alpha \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$, – простір функцій $u(t,x) : \Pi(T) \to \mathbb{C}$ таких, що похідні $\partial^r u(t,x)/\partial t^r$, $r = 0,1,\ldots,n$, для кожного $t \in [0,T]$ належать до простору $\mathcal{H}_{\alpha-r}$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Норму в просторі $\mathcal{H}_{\alpha}^{n}$ означимо формулою

$$\left\| u(t,x); \mathcal{H}_{\alpha}^{n} \right\| = \sum_{r=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^{r} u(t,x)}{\partial t^{r}}; \mathcal{H}_{\alpha-r} \right\|.$$

2. Формулювання задачі. В області $\Pi(T)$ для рівняння

$$L_n\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n} + a_1 \frac{\partial^n u}{\partial t^{n-1}\partial x} + \ldots + a_n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = 0\,, \tag{1}$$

розглянемо задачу з інтегральними умовами

$$\int_0^T t^{j-1} u(t,x)\,dt = \varphi_j(x), \quad j = 1,\ldots,n, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Будемо говорити, що для диференціального виразу $L_n(\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ виконується *умова* **(A)**, якщо корені $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ многочлена $L_n(\lambda, i)$ мають ненульові різні дійсні частини.

Легко перевірити, що для лапласіана $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ умова **(A)** виконується, а для даламбертіана $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ – ні.

Надалі будемо розглядати тільки такі вирази, для яких виконується умова **(A)**. У цьому випадку, не обмежуючи загальності можемо вважати, що нумерація коренів $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ є такою, що $\operatorname{Re}\lambda_1 < \ldots < \operatorname{Re}\lambda_n$.

Означення. Задачу (1), (2) будемо називати (α_1,α_2)*-коректною*, якщо для довільних $\varphi_j \in \mathcal{H}_{\alpha_1}$, $j = 1,\ldots,n$, у просторі $\mathcal{H}_{\alpha_2}^{n}$ існує єдина функція $u(t,x)$, яка задовольняє рівняння (1), умови (2) і виконується нерівність

$$\left\| u; \mathcal{H}_{\alpha_2}^{n} \right\| \le C \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_j; \mathcal{H}_{\alpha_1} \right\|,$$

де стала $C > 0$ не залежить від вибору функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$.

Метою роботи є встановлення умов, при виконанні яких задача (1), (2) є (α_1,α_2)-коректною. Ці умови викладено в теоремі 1, яка є основним результатом роботи.

3. Побудова формального розв'язку. Нехай $\tilde{u}(t,\xi)$, $\tilde{\varphi}_j(\xi)$, $j = 1,\ldots,n$, – перетворення Фур'є за змінною x функцій $u(t,x)$, $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$, відповідно. Застосовуючи перетворення Фур'є до рівняння (1) та умов (2), отримаємо, що функція $\tilde{u}(t,\xi)$ є розв'язком такої інтегральної задачі з параметром $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d^n \tilde{u}(t,\xi)}{dt^n} + a_1(i\xi)\frac{d^{n-1}\tilde{u}(t,\xi)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n(i\xi)^n \tilde{u}(t,\xi) = 0, \tag{3}$$

$$\int_0^T t^{j-1} \tilde{u}(t,\xi)\,dt = \tilde{\varphi}_j(\xi), \quad j = 1,\ldots,n. \tag{4}$$

Нехай $f_1(t,\xi),\ldots,f_n(t,\xi)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння (3) така, що $f_q^{(j-1)}(0,\xi) = \delta_{j,q}$, $j,q = 1,\ldots,n$, де $\delta_{j,q}$ – символ Кронекера. Зауважимо, що функції $f_1(t,\xi),\ldots,f_n(t,\xi)$ є аналітичними за t та ξ. Розв'язок задачі (3), (4) зображується формулою

$$\tilde{u}(t,\xi) = \sum_{q=1}^{n} C_q(\xi) f_q(t,\xi), \tag{5}$$

де сталі $C_1(\xi),\dots,C_n(\xi)$ є розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} C_q(\xi)\int_0^T t^{j-1} f_q(t,\xi)\,dt = \tilde{\varphi}_j(\xi), \qquad j = 1,\dots,n. \tag{6}$$

Позначимо через $\Delta(\xi)$ визначник системи (6):

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} \int_0^T f_1(t,\xi)\,dt & \dots & \int_0^T f_n(t,\xi)\,dt \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_0^T t^{n-1} f_1(t,\xi)\,dt & \dots & \int_0^T t^{n-1} f_n(t,\xi)\,dt \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Якщо виконується умова

$$\forall \xi \in \mathbb{R} \qquad \Delta(\xi) \neq 0, \tag{8}$$

то задача (1), (2) має єдиний розв'язок

$$\tilde{u}(t,\xi) = \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)} f_q(t,\xi)\,\tilde{\varphi}_j(\xi), \tag{9}$$

де $\Delta_{j,q}(\xi)$ – алгебричне доповнення елемента $\int_0^T t^{j-1} f_q(t,\xi)\,dt$, $j,q = 1,\dots,n$, у визначнику $\Delta(\xi)$. Зауважимо, що

$$\Delta(0) = T^{n^2} \frac{\prod_{q=1}^{n-1} (q!)^2}{\prod_{q=n}^{2n-1} (q!) \neq 0}.$$

Дійсно, згідно з вибором фундаментальної системи, $f_q(t,0) = \dfrac{t^{q-1}}{(q-1)!}$, $q = 1,\dots,n$, а отже, виконуються рівності

$$\int_0^T t^{j-1} f_q(t,0)\,dt = \frac{T^{j+q-1}}{(j+q-1)(q-1)!}, \qquad j,q = 1,\dots,n.$$

Тоді для визначника $\Delta(0)$ отримуємо зображення

$$\Delta(0) = \det\left\| \frac{T^{j+q-1}}{(j+q-1)(q-1)!} \right\|_{j,q=1}^{n}.$$

У цьому визначнику винесемо з кожного j-го рядка множник T^j, $j = 1,\dots,n$, а потім в одержаному визначнику винесемо з кожного q-го стовпця множник $\dfrac{T^{q-1}}{(q-1)!}$, $q = 1,\dots,n$. У результаті дістанемо, що

$$\Delta(0) = d \cdot T^{n^2} \det\left\| (j+q-1)^{-1} \right\|_{j,q=1}^{n} = d \cdot T^{n^2} \det\left\| (j+q-1)^{-1} \right\|_{j,q=1}^{n},$$

де $d = \prod_{q=1}^{n-1} \dfrac{1}{q!}$.

Відомо (див. [12], Ч. 2, задача 3, с. 110), що

$$\det\left\|(j+q-1)^{-1}\right\|_{j,q=1}^{n} = \frac{\prod_{q=1}^{n-1}(q!)^3}{\prod_{q=n}^{2n-1}q!}.$$

Таким чином, маємо рівність

$$\Delta(0) = T^{n^2}\frac{\prod_{q=1}^{n-1}(q!)^2}{\prod_{q=n}^{2n-1}q!},$$

з якої випливає, що $\Delta(0) \neq 0$.

Наведемо приклади задач, для яких умова (8) виконується.

Приклад 1. Визначник $\Delta(\xi)$ задачі з інтегральними умовами для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0, \tag{10}$$

$$\int_0^T u(t,x)\,dt = \varphi_1(x), \qquad \int_0^T tu(t,x)\,dt = \varphi_2(x) \tag{11}$$

обчислюється за формулою

$$\Delta(\xi) = \begin{cases} \dfrac{2\,\mathrm{sh}(\xi T/2)}{\xi^4}[\xi T\,\mathrm{ch}(\xi T/2) - 2\,\mathrm{sh}(\xi T/2)], & \xi \neq 0, \\ T^4/12, & \xi = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Оскільки $t\,\mathrm{ch}\,t - \mathrm{sh}\,t \neq 0$ для всіх $t \neq 0$, то з формули (12) випливає, що для задачі (10), (11) умова (8) виконується. ◄

Приклад 2. Якщо корені $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ многочлена $L_n(\lambda,i)$ є дійсними і різними, то визначник $\Delta(\xi)$ є відмінним від нуля для всіх ξ. Дійсно, відомо (див. [8], Ч. 1, задача 68, с. 72), що

$$\Delta(\xi) = \frac{1}{n!}\int_0^T\ldots\int_0^T \delta(\xi;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,d\tau_1\ldots d\tau_n,$$

де $\delta(\xi;\tau_1,\ldots,\tau_n) = \det\left\|f_q(\tau_j,\xi)\right\|_{j,q=1}^{n}$, $V(\tau_1,\ldots,\tau_n) = \prod_{n\ge j>q\ge 1}(\tau_j-\tau_q)$. Нехай S_n – симетрична група перестановок елементів множини $\{1,\ldots,n\}$. Через I_ω, $\omega = (i_1,\ldots,i_n) \in S_n$, позначимо симплекс

$$\{(\tau_1,\ldots,\tau_n) \in [0,T]^n : \tau_{i_1} \le \ldots \le \tau_{i_n}\}.$$

Розбиваючи куб $[0,T]^n$ на $n!$ симплексів I_ω, $\omega \in S_n$, отримаємо, що

$$\Delta(\xi) = \frac{1}{n!}\sum_{\omega\in S_n}\int_{I_\omega}\delta(\xi;\tau_1,\ldots,\tau_n)V(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,d\tau_1\ldots d\tau_n. \tag{13}$$

Із теореми про єдиність розв'язку багатоточкової задачі для звичайного диференціального оператора (див. [12, с. 87; 9, с. 31], який розкладається у композицію диференціальних операторів першого порядку з дійсними коефіцієнтами, випливає, що визначник $\delta(\xi;\tau_1,\ldots,\tau_n)$ є відмінним від тотожного нуля у симплексі I_σ, де $\sigma = (1,\ldots,n)$, і не може набувати у ньому значень різних знаків. Оскільки $V(\tau_1,\ldots,\tau_n) \ge 0$ для всіх $(\tau_1,\ldots,\tau_n) \in I_\sigma$, то звідси випливає, що

$$\int_{I_\sigma} \delta(\xi;\tau_1,\dots,\tau_n)V(\tau_1,\dots,\tau_n)\,d\tau_1\dots d\tau_n \neq 0. \tag{14}$$

Із властивостей визначника випливає, що для будь-якої перестановки $\omega = (i_1,\dots,i_n) \in S_n$ виконуються рівності

$$\delta(\xi;\tau_{i_1},\dots,\tau_{i_n}) = (-1)^{\rho_\omega}\delta(\xi;\tau_1,\dots,\tau_n),$$

$$V(\tau_{i_1},\dots,\tau_{i_n}) = (-1)^{\rho_\omega}V(\tau_1,\dots,\tau_n),$$

де ρ_ω – кількість інверсій у перестановці $\omega \in S_n$. Враховуючи ці формули і замінюючи змінні під знаком інтеграла, дістанемо, що

$$\int_{I_\omega} \delta(\xi;\tau_1,\dots,\tau_n)V(\tau_1,\dots,\tau_n)\,d\tau_1\dots d\tau_n =$$

$$= \int_{I_\sigma} \delta(\xi;\tau_1,\dots,\tau_n)V(\tau_1,\dots,\tau_n)\,d\tau_1\dots d\tau_n.$$

Тоді з формул (13), (14) випливає, що

$$\Delta(\xi) = \int_{I_\sigma} \delta(\xi;\tau_1,\dots,\tau_n)V(\tau_1,\dots,\tau_n)\,d\tau_1\dots d\tau_n \neq 0,$$

що й слід було довести. ◄

4. Умови коректності задачі. Дослідимо питання про приналежність функції

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(t,\xi)e^{ix\xi}d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)}f_q(t,\xi)\tilde{\varphi}_j(\xi)e^{ix\xi}d\xi \tag{15}$$

до простору $\mathcal{H}^n_{\alpha_2}$, якщо $\Delta(\xi) \neq 0$ для всіх ξ і $\varphi_j \in \mathcal{H}_{\alpha_1}$, $j = 1,\dots,n$, для деякого $\alpha_1 \geq 0$. Для цього встановимо оцінки для функцій $\tilde{u}(t,\xi)$ та їхніх похідних за змінною t до порядку n включно. Зауважимо, що

$$\tilde{u}(t,\xi) = \sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Gamma_{j,q}(\xi)}{\Gamma(\xi)}e^{\lambda_q\xi t}\tilde{\varphi}_j(\xi), \quad \xi \neq 0, \tag{16}$$

де

$$\Gamma(\xi) = \begin{vmatrix} \int_0^T e^{\lambda_1\xi t}\,dt & \dots & \int_0^T e^{\lambda_n\xi t}\,dt \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_0^T t^{n-1}e^{\lambda_1\xi t}dt & \dots & \int_0^T t^{n-1}e^{\lambda_n\xi t}\,dt \end{vmatrix}, \tag{17}$$

а $\Gamma_{j,q}(\xi)$ – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині j-го рядка та q-го стовпця у визначнику $\Gamma(\xi)$. Зазначимо, що

$$\Gamma(\xi) = \xi^{n(n-1)/2}\Delta(\xi)\prod_{n\geq j>q\geq 1}(\lambda_j - \lambda_q), \quad \xi \neq 0,$$

тому умови $\Delta(\xi) \neq 0$ та $\Gamma(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$ є рівносильними.

Для опису структури елементів визначника (17) використаємо таке твердження.

Лема 1. *Для довільних $\lambda \in \mathbb{C}$ і довільних $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ справджується рівність*

$$\int_0^T t^m e^{\lambda t}dt = e^{\lambda T}P_m(\lambda,T) - P_m(\lambda,0),$$

де $P_m(\lambda,t)$ *– многочлени змінної* t *вигляду*

$$P_m(\lambda,t)=\begin{cases}\sum\limits_{j=0}^{m}\dfrac{a_{jm}t^{m-j}}{\lambda^{j+1}}, & \lambda\neq 0,\\ \dfrac{t^{m+1}}{m+1}, & \lambda=0,\end{cases}$$

$$a_{jm}=(-1)^j m(m-1)\ldots(m-j+1)=(-1)^j\frac{m!}{(m-j)!},\qquad j=0,1,\ldots,m.$$

Д о в е д е н н я. У випадку, коли $\lambda=0$, твердження леми випливає з рівності

$$\int_0^T t^m\,dt=\frac{T^{m+1}}{m+1},\qquad m\geq 0.$$

Для випадку, коли $\lambda\neq 0$, використаємо метод математичної індукції за m. Для $m=0$ твердження леми є очевидним. Дійсно, якщо $\lambda\neq 0$, то

$$\int_0^T e^{\lambda t}\,dt=\frac{e^{\lambda T}-1}{\lambda}=e^{\lambda T}P_0(\lambda,T)-P_0(\lambda,0),$$

де $P_0(\lambda,t)=\dfrac{1}{\lambda}$ – стала щодо змінної t.

Припустимо, що при $\lambda\neq 0$ твердження леми є істинним для $m=k$, $k\geq 0$. Перевіримо її істинність для $m=k+1$. Інтегруючи частинами, запишемо

$$\int_0^T t^{k+1}e^{\lambda t}\,dt=e^{\lambda T}\frac{T^{k+1}}{\lambda}-\frac{k+1}{\lambda}\int_0^T t^k e^{\lambda t}\,dt,$$

а отже, враховуючи припущення індукції, отримуємо

$$\int_0^T t^{k+1}e^{\lambda t}dt=e^{\lambda T}\frac{T^{k+1}}{\lambda}-\frac{k+1}{\lambda}\left(e^{\lambda T}P_k(\lambda,T)-P_k(\lambda,0)\right)=$$

$$=e^{\lambda T}\left(\frac{T^{k+1}}{\lambda}-\frac{k+1}{\lambda}P_k(\lambda,T)\right)+\frac{k+1}{\lambda}P_k(\lambda,0).$$

Таким чином, для завершення доведення леми достатньо перевірити, що для многочленів $P_m(\lambda,t)$, $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, від змінної t, коефіцієнти яких залежать від λ, виконуються такі рекурентні співвідношення:

$$P_{k+1}(\lambda,t)=\left(\frac{t^{k+1}}{\lambda}-\frac{k+1}{\lambda}P_k(\lambda,t)\right),$$

$$P_{k+1}(\lambda,0)=-\frac{k+1}{\lambda}P_k(\lambda,0),\qquad k\geq 0. \tag{18}$$

Зазначимо, що друга з рівностей у формулі (18) є очевидним наслідком першої рівності. Перша ж рівність випливає з елементарних співвідношень

$$P_{k+1}(\lambda,t)=\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\frac{(k+1)!}{(k+1-j)!}\frac{t^{k+1-j}}{\lambda^{j+1}}=$$

$$=\frac{t^{k+1}}{\lambda}+\frac{k+1}{\lambda}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j\frac{k!}{(k+1-j)!}\frac{t^{k+1-j}}{\lambda^j}=$$

$$=\frac{t^{k+1}}{\lambda}+\frac{k+1}{\lambda}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}\frac{k!}{(k-j)!}\frac{t^{k-j}}{\lambda^{j+1}}=$$

$$=\frac{t^{k+1}}{\lambda}-\frac{k+1}{\lambda}P_k(\lambda,t).$$

Лему доведено. ♦

Введемо такі позначення: $\delta^+ = \sum\limits_{j:\mathrm{Re}\,\lambda_j>0} \mathrm{Re}\,\lambda_j$, якщо існують $j \in \{1,\ldots,n\}$ такі, що $\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0$, або $\delta^+ = 0$, якщо $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$ для всіх $j \in \{1,\ldots,n\}$; $\delta^- = \sum\limits_{j:\mathrm{Re}\,\lambda_j<0} \mathrm{Re}\,\lambda_j$, якщо існують $j \in \{1,\ldots,n\}$ такі, що $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$, або $\delta^- = 0$, якщо $\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0$ для всіх $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Лема 2. *Правильними є такі оцінки*:

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)(e^{\lambda_q\xi t})^{(r)}\right| \le C_2(1+|\xi|)^{r-n+1}\begin{cases} e^{\delta^+\xi T}, & \xi > 1,\\ e^{\delta^-\xi T}, & \xi < -1,\end{cases} \tag{19}$$
$$j,q = 1,\ldots,n, \quad r = 0,1,\ldots,n.$$

Д о в е д е н н я. Застосовуючи лему 1 для обчислення елементів визначника $\Gamma_{j,q}(\xi)$, маємо, що

$$\Gamma_{j,q}(\xi) = \det\left\| e^{\lambda_s\xi T}P_{r-1}(\lambda_s\xi,T) - P_{r-1}(\lambda_s\xi,0)\right\|_{r,s=1}^{n;r\ne j;s\ne q}, \quad j,q = 1,\ldots,n. \tag{20}$$

З отриманої формули (20) і формули для розвинення визначника випливає, що

$$\Gamma_{j,q}(\xi) = \sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_n),\ \omega\in S_n,\\ \{i_1,\ldots i_n\}\cap\{j\}=\varnothing}} \pm \prod_{r=1,\,r\ne q}^{n}\left(e^{\lambda_r\xi T}P_{i_r-1}(\lambda_r\xi,T) - P_{i_r-1}(\lambda_r\xi,0)\right). \tag{21}$$

Оскільки для довільних наборів чисел $y_1,\ldots,y_{n-1}\in\mathbb{C}$ і $z_1,\ldots,z_{n-1}\in\mathbb{C}$ виконується рівність

$$\prod_{r=1}^{n-1}(y_r+z_r) = \sum_{j_1=0}^{1}\ldots\sum_{j_{n-1}=0}^{1} y_1^{j_1}\ldots y_{n-1}^{j_{n-1}}z_1^{1-j_1}\ldots z_{n-1}^{1-j_{n-1}},$$

то з формули (21) отримаємо, що

$$\Gamma_{j,q}(\xi) = \sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_n),\omega\in S_n,\\ \{i_1,\ldots,i_n\}\cap\{j\}=\varnothing}} \sum_{j_1=0}^{1}\ldots\sum_{j_n=0}^{1} \pm$$
$$\pm\prod_{r=1,r\ne q}^{n} e^{j_r\lambda_r\xi T}P_{i_r-1}^{j_r}(\lambda_r\xi,T)P_{i_r-1}^{1-j_r}(\lambda_r\xi,0). \tag{22}$$

Зі структури многочленів $P_m(\lambda,t)$, $m = 0,1,\ldots,n-1$, випливають оцінки

$$\left|P_m(\lambda_q\xi,T)\right| \le \frac{C_3}{|\xi|}, \quad \left|P_m(\lambda_q\xi,0)\right| \le \frac{C_4}{|\xi|^{m+1}},\ q = 1,\ldots,n,\ |\xi|>1. \tag{23}$$

Тоді з формули (22) на підставі оцінок (23) дістаємо, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\Gamma_{j,q}(\xi)(e^{\lambda_q\xi t})^{(r)}\right| \le C_5(1+|\xi|)^{r-n+1}\begin{cases} e^{\delta^+\xi T}, & \xi > 1,\\ e^{\delta^-\xi T}, & \xi < -1.\end{cases}$$

Лему доведено. ♦

Встановимо тепер оцінки знизу для визначника $\Gamma(\xi)$.

Лема 3. *Якщо виконується умова* **(A)**, *то існує таке число* $R > 0$, *що для всіх* ξ, $|\xi| > R$, *виконується оцінка*

$$|\Gamma(\xi)| \ge C_6(1+|\xi|)^{-n(n+1)}\begin{cases} e^{\delta^+\xi T}, & \xi > R,\\ e^{\delta^-\xi T}, & \xi < -R.\end{cases} \tag{24}$$

Д о в е д е н н я. Застосовуючи міркування, аналогічні до тих, які були використані при виведенні формули (21), маємо

$$\Gamma(\xi) = \sum_{\omega=(i_1,\dots,i_n)\in S_n} \sum_{j_1=0}^{1} \dots \sum_{j_n=0}^{1} (-1)^{\rho_\omega+n+j_1+\dots+j_n} \times$$
$$\times \prod_{r=1}^{n} e^{j_r\lambda_r\xi T} P_{i_r-1}^{j_r}(\lambda_r\xi, T) P_{i_r-1}^{1-j_r}(\lambda_r\xi, 0). \tag{25}$$

Виділяючи домінуючу експоненту в квазімногочлені (25), отримуємо оцінку (24). ♦

Тепер можемо встановити основний результат роботи про існування єдиного розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 1. *Нехай виконується умова* **(A)**. *Якщо* $\Delta(\xi) \neq 0$ *для всіх* $\xi \neq 0$, *то задача* (1), (2) *є* (α_1, α_2)*-коректною, де* $\alpha_1 \ge \alpha_2 + n^2 + 1$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\varphi_j \in \mathcal{H}_{\alpha_1}$, $j = 1,\dots,n$. Із формули (16) і лем 2, 3 випливає, що існує $R > 0$ таке, що для всіх ξ, $|\xi| > R$, виконуються оцінки

$$\max_{t\in[0;T]} \left| \frac{\Gamma_{j,q}(\xi)}{\Gamma(\xi)} \left(e^{\lambda_q \xi t}\right)^{(r)} \right| \le C_7 (1 + |\xi|)^{r+n^2+1},$$
$$j, q = 1,\dots,n, \quad r = 0,1,\dots,n. \tag{26}$$

Тоді з формул (16), (26) дістаємо, що для всіх ξ, $|\xi| > R_4$,

$$\max_{t\in[0;T]} \left| \frac{\partial^r \tilde{u}(t,\xi)}{\partial t^r} \right| \le C_8 \sum_{j=1}^{n} (1 + |\xi|)^{r+n^2+1} \left| \tilde{\varphi}_j(\xi) \right|, \qquad r = 0,1,\dots,n. \tag{27}$$

Оскільки $\Delta(\xi) \neq 0$ для всіх $\xi \neq 0$ і $\Delta(\xi)$ – неперервна функція параметра ξ, то існує стала $C_9 > 0$ така, що $|\Delta(\xi)| \ge C_9 > 0$ для всіх $\xi \in [-R; R]$. Тому оцінки (27) зберігають свою силу і для $|\xi| \le R$.

Тоді з формул (15), (16), (27) та означення норми в просторі $\mathcal{H}_{\alpha_2}^n$ отримуємо

$$\left\| u(t,x); \mathcal{H}_{\alpha_2}^n \right\| = \sum_{r=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}; \mathcal{H}_{\alpha_2 - r} \right\| \le$$
$$\le C_{10} \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|)^{2\alpha_2+2n^2+2} \left| \tilde{\varphi}_j(\xi) \right|^2 d\xi \le C_{10} \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_j; \mathcal{H}_{\alpha_1} \right\|,$$

якщо $\alpha_1 \ge \alpha_2 + n^2 + 1$. Теорему доведено. ♦

1. *Вігак В. М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Доп. АН України. Сер. А. – 1994. – № 8. – С. 57–60.
2. *Иванчов Н. И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 4. – С. 547–564.
3. *Камынин В. Л., Саролди М.* Нелинейная обратная задача для параболического уравнения высокого порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1998. – **38**, № 10. – С. 1683–1691.
4. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь динамічної теорії пружності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 40–53.
   Те саме: *Kuz' A. M., Ptashnyk B. Yo.* A problem with integral conditions with respect to time for a system of equations of the dynamic elasticity theory // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 310–326.
5. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних систем рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 1. – С. 32–39.

6. *Медвідь О., Симотюк М.* Задача з інтегральними умовами для лінійної системи рівнянь із частинними похідними з відхиленням аргументу // Мат. вісн. НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 414–427.
7. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – Москва: Высш. шк., 1995. – 301 с.
8. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В 2 ч. – Москва: Наука, 1978. – Ч. 1. – 391 с.; – Ч. 2. – 432 с.
9. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
10. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 11. – С. 1925–1935.
11. *Фардигола Л. В.* Интегральная краевая задача в слое для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 11. – С. 123–144.
    Те саме: *Fardigola L. V.* An integral boundary-value problem in a layer for a system of linear partial differential equations // Sbornik: Mathematics. – 1995. – **186**, No. 11. – P. 1671–1692.
12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1970. – 720 с.
    Те саме: *Hartman Ph.* Ordinary differential equations. – New York: John Wiley and Sons, 1964. – 612 p.
13. *Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D.* On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations // Bull. Georg. Natl. Acad. Sci. – 2011. – **5**, No. 1. – P. 31–37.
14. *Bougoffa L.* A coupled system with integral conditions // Appl. Math. E-Notes. – 2004. – **4**. – P. 99–105.
15. *Bouziani A.* Initial-boundary value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – **291**, No. 2. – P. 371–386.
16. *Ilkiv V. S., Nytrebych Z. M., Pukach P. Ya.* Boundary-value problems with integral conditions for a system of Lamé equations in the space of almost periodic functions // Electron. J. Differ. Equat. – 2016. – **2016**, No. 304. – P. 1–12.
17. *Kalenyuk P. I., Kuduk G., Kohut I. V., Nytrebych Z. M.* Problem with integral condition for evolution equation // J. Math. Appl. – 2015. – **38**. – P. 71–76.
18. *Kalenyuk P. I., Kuduk G., Kohut I. V., Nytrebych Z. M.* Problem with integral conditions for differential-operator equation // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 4. – С. 7–14.
    Те саме: *Kalenyuk P. I., Kuduk G., Kohut I. V., Nytrebych Z. M.* Problem with integral conditions for differential-operator equation // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 267–276.
19. *Song W., Gao W.* Positive solutions for a second-order system with integral boundary conditions // Electron. J. Differ. Equat. – 2011. – **2011**, No. 13. – P. 1–9.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСЕ

Установлены условия существования в шкале пространств Соболева единственного решения задачи с интегральными условиями в виде моментов для уравнений с частными производными высокого порядка. Решение задачи построено с помощью преобразования Фурье.

INTEGRAL PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HIGH ORDER IN INFINITE STRIP

The conditions of existence and uniqueness (in the scale of Sobolev spaces) of solution to the problem with momentum integral conditions for partial differential equations of high order. The solution of the problem is constructed by using the Fourier transform.

[1] Ін-т прикл. математики та фундам. наук нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів,
[2] Жешувський ун-т, Жешув, Польща,
[3] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 03.02.16