УДК 517. 925

В. М. Евтухов, Н. П. Колун

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВИЛЬНО И БЫСТРО МЕНЯЮЩИМИСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Устанавливаются асимптотические свойства некоторых типов решений дифференциальных уравнений второго порядка, которые содержат в правой части сумму слагаемых с правильно и быстро меняющимися нелинейностями.

Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y), \tag{1}$$

в котором $\alpha_i \in \{-1,1\}$, $i = 1,\ldots,m$, $p_i : [a,\omega[\to]0,+\infty[$, $i = 1,\ldots,m$, – непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$, где Δ_{Y_0} – односторонняя окрестность Y_0 (Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$), – непрерывные функции при $i = 1,\ldots,\ell$ и дважды непрерывно дифференцируемые при $i = \ell+1,\ldots,m$ такие, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i}, \quad i = 1,\ldots,\ell, \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0, \tag{2}$$

$$\varphi_i'(y) \ne 0, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) \in \{0,+\infty\}, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i''(y)\varphi_i(y)}{\varphi_i'^2(y)} = 1, \quad i = \ell+1,\ldots,m, \tag{3}$$

В силу выполнения условий (2) каждая из функций φ_i при $i \in \{1,\ldots,\ell\}$ является правильно меняющейся при $y \to Y_0$ функцией порядка σ_i (см. монографию Е. Сенеты [10, Гл. 1, §1, с. 9]) и поэтому для них справедливы представления вида

$$\varphi_i(y) = |y|^{\sigma_i} L_i(y), \qquad i = 1,\ldots,\ell, \tag{4}$$

где L_i, $i = 1,\ldots,\ell$, – медленно меняющиеся функции, т.е. такие, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{L_i(\lambda y)}{L_i(y)} = 1, \qquad \text{для любого} \qquad \lambda > 0.$$

Из условий (3) следует, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi_i'(y)}{\varphi_i(y)} = \pm\infty, \qquad i = \ell+1,\ldots,m. \tag{5}$$

Согласно этим условиям функции φ_i, $i = \ell+1,\ldots,m$, являются быстро меняющимися при $y \to Y_0$ (см. монографию В. Марича [14, Гл. 3, §3.4, Леммы 3.2, 3.3, с. 91-92]).

Определение 1. Решение y уравнения (1) называется $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-решением*, где $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, если оно определено на промежутке $[t_0,\omega[\subset [a,\omega[$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0\,,\ \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = 0 \ \text{ или } \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \pm\infty\,,\ \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0\,. \quad (6)$$

В случае $m=\ell$, т.е., когда в (1) все нелинейности φ_i являются правильно меняющимися функциями, асимптотическое поведение $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений уравнения (1) исследовалось в [8]. Из работ [4, 5], где рассматривались уравнения n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями, могут быть получены результаты об асимптотических свойствах $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений уравнения

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y)\,, \quad (7)$$

где $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\, \to\,]0,+\infty[$ – непрерывная функция, а $\varphi : \Delta_{Y_0} \to$ $\to\,]0,+\infty[$ – непрерывная правильно меняющаяся при $y \to Y_0$ функция порядка σ, Δ_{Y_0} – односторонняя окрестность Y_0 (Y_0 равно или нулю, либо $\pm\infty$). Следует отметить работы [3, 11–13, 15, 16, 18, 19], в которых исследовались двучленные уравнения второго порядка с правильно меняющейся нелинейностью. Также следует обратить внимание на работы [2, 17], посвященные изучению асимптотического поведения решений циклических систем дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями. Случай, когда в правой части дифференциального уравнения второго порядка наряду с правильно меняющимися нелинейностями присутствуют слагаемые с быстро меняющимися нелинейностями, ранее не исследовался. Однако известны результаты об асимтотике решений двучленного дифференциального уравнения вида (7), где $\varphi : \Delta_{Y_0} \to\,]0,+\infty[$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция удовлетворяет условиям

$$\varphi'(y) \neq 0, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \varphi(y) \in \{0,+\infty\}, \qquad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{\varphi'^2(y)} = 1\,,$$

из которых следует, что φ является быстро меняющейся при $y \to Y_0$. Асимптотические представления некоторых типов решений таких уравнений установлены в [14, Гл. 3, § 3.4, с. 90–104] и в [7]. Асимптотика $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений уравнения (7) изучалась в [9].

В настоящей работе при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ установим условия существования $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений у дифференциального уравнения (1), а также асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления для таких решений и их производных первого порядка. При этом исследуем случай, когда на каждом таком решении y уравнения (1) правая часть уравнения эквивалентна при $t \uparrow \omega$ одному s-му слагаемому, где $s \in \{1,\dots,\ell\}$, т. е. когда

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0 \qquad \text{для всех} \qquad i \in \{1,\dots,m\}\setminus\{s\}\,. \quad (8)$$

При изучении $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений уравнения (1) будем использовать их некоторые априорные асимптотические свойства.

Введем функцию $\pi_\omega : [a,\omega[\, \to \mathbb{R}$, полагая

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \omega = +\infty,\\ t-\omega, & \omega < +\infty. \end{cases}$$

Из работы [1 (см. следствие 10.1)] непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Если* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, *то для каждого* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-решения уравнения* (1) *имеют место асимптотические соотношения*

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}[1+o(1)], \qquad \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{1+o(1)}{\lambda_0-1}, \quad t\uparrow\omega. \tag{9}$$

1. Основные результаты. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Delta_{Y_0} = \Delta_{Y_0}(b),$$

где $\Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[$, если Δ_{Y_0} – левая окрестность Y_0, и $\Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b]$, если Δ_{Y_0} – правая окрестность Y_0, и число b удовлетворяет неравенствам

$$|b|<1 \text{ при } Y_0=0, \qquad b>1 \text{ при } Y_0=+\infty, \qquad b<-1 \text{ при } Y_0=-\infty.$$

Из определения $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений уравнения (1) следует, что каждое такое решение и его производная первого порядка при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ отличны от нуля на некотором промежутке $[t_1,\omega[\subset[t_0,\omega[$, причем на этом промежутке первая производная решения положительна, если Δ_{Y_0} – левая окрестность Y_0, и отрицательна – в противном случае. Введем два числа, определяющие соответственно знаки $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решения и его первой производной на промежутке $[t_1,\omega[$:

$$\nu_0 = \operatorname{sgn} b, \qquad \nu_1 = \pm 1,$$

причем $\nu_1 = 1$, если Δ_{Y_0} – левая окрестность Y_0, и $\nu_1=-1$, если Δ_{Y_0} – правая окрестность Y_0. При этом ясно, что условия

$$\nu_0\nu_1<0, \quad \text{если} \quad Y_0=0, \quad \text{и} \quad \nu_0\nu_1>0, \quad \text{если} \quad Y_0=\pm\infty, \tag{10}$$

являются необходимыми для наличия $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решений. Если же для таких решений уравнения (1), кроме того, выполняются условия (8), то $\operatorname{sgn} y''(t) = \alpha_s$ в некоторой левой окрестности ω и при этом

$$\nu_1\alpha_s<0, \text{ если } \lim_{t\uparrow\omega} y'(t)=0, \quad \nu_1\alpha_s>0, \text{ если } \lim_{t\uparrow\omega} y'(t)=\pm\infty. \tag{11}$$

Для формулировки основных результатов потребуются следующие вспомогательные обозначения:

$$J_i(t) = \int_{A_i}^{t} \pi_\omega(\tau)p_i(\tau)\,d\tau, \qquad H_i(y) = \int_{B_i}^{y} \frac{ds}{\varphi_i(s)}, \quad i=1,\ldots,\ell,$$

где

$$A_i = \begin{cases} a, & \displaystyle\int_a^\omega \pi_\omega(\tau)p_i(\tau)\,d\tau = \pm\infty, \\ \omega, & \displaystyle\int_a^\omega \pi_\omega(\tau)p_i(\tau)\,d\tau = \text{const}, \end{cases} \qquad B_i = \begin{cases} b, & \displaystyle\int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_i(y)} = \pm\infty, \\ Y_0, & \displaystyle\int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_i(y)} = \text{const}. \end{cases}$$

Отметим некоторые свойства функций H_i, $i=1,\ldots,\ell$.

Так как $H_i'(y) = \dfrac{1}{\varphi_i(y)} > 0$ при $y\in\Delta_{Y_0}(b)$, то функции H_i возрастают на $\Delta_{Y_0}(b)$ и существуют возрастающие обратные функции $H_i^{-1}:\Delta_{Z_i}(c_i)\to$ $\to\Delta_{Y_0}(b)$, $i=1,\ldots,\ell$, такие, что

$$\lim_{\substack{z \to Z_i \\ z \in \Delta_{Z_i}(c_i)}} H_i^{-1}(z) = Y_0 , \tag{12}$$

где

$$c_i = \int_{B_i}^{b} \frac{ds}{\varphi_i(s)}, \qquad Z_i = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} H_i(y) = \begin{cases} 0, & B_i = Y_0, \\ +\infty, & B_i = b < Y_0, \\ -\infty, & B_i = b > Y_0, \end{cases}$$

$$\Delta_{Z_i}(c_i) = \begin{cases} [c_i, Z_i[\,, & \Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[\,, \\ ]Z_i, c_i], & \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b]. \end{cases}$$

Согласно представлениям (4) и предложениям 1, 2 из [14] (см. приложение, с. 115)

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \frac{y}{H_i(y)\varphi_i(y)} = 1 - \sigma_i . \tag{13}$$

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ *и при некотором* $s \in \{1,\dots,\ell\}$ *выполняется неравенство* $\sigma_s \neq 1$. *Тогда для существования* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-решений у дифференциального уравнения* (1), *удовлетворяющих условиям* (8), *необходимо, чтобы выполнялись неравенства*

$$\alpha_s \nu_0 \lambda_0 > 0, \qquad \nu_0 \nu_1 \lambda_0 (\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0, \qquad t \in]a, \omega[\,, \tag{14}$$

а также условия

$$\alpha_s(\lambda_0 - 1)\lim_{t \uparrow \omega} J_s(t) = Z_s, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J_s'(t)}{J_s(t)} = \frac{(1-\sigma_s)\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \tag{15}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)))} = 0 \ \text{ при любом } \ i \in \{1,\dots,\ell\} \setminus \{s\}, \tag{16}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)(1+\delta_i)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)))} = 0 \ \text{ при любом } \ i \in \{\ell+1,\dots,m\}, \tag{17}$$

где δ_i *– любые числа из некоторой односторонней окрестности нуля. Более того, для каждого такого* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-решения имеют место асимптотические представления*

$$y(t) = H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t))[1 + o(1)], \qquad t \uparrow \omega, \tag{18}$$

$$y'(t) = \frac{\lambda_0 H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t))}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)], \qquad t \uparrow \omega . \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $y : [t_0, \omega[\to \mathbb{R}$ – произвольное $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$-решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее условиям (8). Тогда на основании (1) и (8) запишем

$$y''(t) = \alpha_s p_s(t)\varphi_s(y(t))[1 + o(1)], \qquad t \uparrow \omega. \tag{20}$$

Из этого соотношения ясно, что решение $y(t)$ и его производные первого и второго порядков сохраняют знаки на некотором промежутке $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$, причем

$$\operatorname{sgn} y(t) = \nu_0, \quad \operatorname{sgn} y'(t) = \nu_1, \quad \operatorname{sgn} y''(t) = \alpha_s, \quad t \in [t_1, \omega[\,.$$

Отсюда, с учетом первого из соотношений (9) леммы 1, следует второе из неравенств (14). Кроме того, из равенств (20), с учетом второго из соотношений (9) леммы 1, следует что

$$\frac{y'(t)}{\varphi_s(y(t))} = \alpha_s(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)p_s(t)[1 + o(1)], \qquad t \uparrow \omega, \tag{21}$$

откуда, в частности, вытекает неравенство

$$\alpha_s \nu_1(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0, \quad t \in]a, \omega[,$$

из которого, в силу второго из знаковых условий (14), следует первое из неравенств (14). Интегрируя соотношение (21) на промежутке от t_1 до t, где $t \in]t_1, \omega[$, получим

$$\int\limits_{y(t_1)}^{y(t)} \frac{ds}{\varphi_s(s)} = \alpha_s(\lambda_0 - 1)\int\limits_{t_1}^{t} \pi_\omega(\tau)p_s(\tau)[1 + o(1)]\,d\tau, \qquad t \uparrow \omega. \tag{22}$$

Поскольку согласно первому из условий (6) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y(t) = \mathrm{Y}_0$, то из (22) ясно, что несобственные интегралы

$$\int\limits_{y(t_1)}^{\mathrm{Y}_0} \frac{ds}{\varphi_s(s)} \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{t_1}^{\omega} \pi_\omega(\tau)p_s(\tau)\,d\tau$$

сходятся или расходятся одновременно. Ввиду этого факта и выбора пределов интегрирования A_s и B_s в функциях J_s и H_s, соотношение (22) можем записать в виде

$$H_s(y(t)) = \alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)[1 + o(1)], \qquad t \uparrow \omega. \tag{23}$$

Отсюда следует выполнение первого из условий (15). Кроме того, принимая во внимание предельное соотношение (13), из (23) получим

$$\frac{y(t)}{\varphi_s(y(t))} = \alpha_s(1 - \sigma_s)(\lambda_0 - 1)J_s(t)[1 + o(1)], \qquad t \uparrow \omega. \tag{24}$$

Из (21), (24) и первого из условий (9) леммы 1 вытекает справедливость второго из предельных соотношений (15).

Далее, из (23) имеем

$$y(t) = H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)[1 + o(1)]), \qquad t \uparrow \omega. \tag{25}$$

Здесь H_s^{-1} является правильно меняющейся функцией порядка $\dfrac{1}{1-\sigma_s}$ при $z \to Z_s$ как обратная для правильно меняющейся при $y \to \mathrm{Y}_0$ функции H_s порядка $1 - \sigma_s \neq 0$. Более того, согласно условиям (15), существует $t_2 \in [t_1, \omega[$ такое, что функция $z(t) = \alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)[1 + o(1)]$ такова, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z(t) = \mathrm{Z}_s$ и $z(t) \in \Delta_{Z_s}(c_s)$ при $t \in [t_2, \omega[$. Поэтому, с учетом свойств правильно меняющихся функций, соотношение (25) можно переписать в виде (18). Кроме того, из первого из условий (9) леммы 1 и асимптотики (18) следует справедливость асимптотического соотношения (19).

Поскольку $s \in \{1, \ldots, \ell\}$, функции φ_i, $i = 1, \ldots, \ell$, являются правильно меняющимися при $y \to \mathrm{Y}_0$, а функция $z(t)$ удовлетворяет указанным выше условиям, то

$$\varphi_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)[1 + o(1)])\big) =$$

$$= \varphi_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)\big)[1 + o(1)], \qquad t \uparrow \omega.$$

Тогда из условий (18) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))[1+o(1)]}{p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))[1+o(1)]}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))},\qquad i=1,\dots,\ell\,,$$

откуда, с учетом (8), следует справедливость условий (16).

При $i\in\{\ell+1,\dots,m\}$ из (25), с учетом свойств функции $z(t)$, имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))}=\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)[1+o(1)])\big)}{p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\big)}.\tag{26}$$

Так как функции $\varphi_i\big(H_s^{-1}(z)\big)$, $i=\ell+1,\dots,m$, монотонны на промежутке $\Delta_{Z_s}(c_s)$ для любых δ_i из некоторой односторонней окрестности нуля, то существует $t_3\in[t_2,\omega[$ такое, что при $t\in[t_3,\omega[$ верны неравенства

$$\frac{p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)[1+o(1)])\big)}{p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\big)}\ge$$

$$\ge\frac{p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)(1+\delta_i))\big)}{p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\big)}\ge 0\,.\tag{27}$$

Тогда из (8), (26) и (27) следует справедливость условий (17).

Теорема доказана. ♦

Теорема 2. *Пусть* $\lambda_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ *и для некоторого* $s\in\{1,\dots,\ell\}$ *выполняются неравенство* $\sigma_s\ne 1$, *условия* (14)–(16) *и при любом* $i\in\{\ell+1,\dots,m\}$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)(1+u))\big)}{p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\big)}=0\tag{28}$$

равномерно по $u\in[-\delta,\delta]$ *для некоторого* $0<\delta<1$. *Пусть, кроме того, имеет место одно из двух условий*

$$\text{либо}\quad \lambda_0\ne-1\,,\qquad \text{либо}\quad \lambda_0=-1\quad\text{и}\quad \sigma_s<1\,,\tag{29}$$

Тогда у дифференциального уравнения (1) *существуют* $P_\omega(Y_0,\lambda_0)$*-решения, допускающие асимптотические представления* (18) *и* (19), *причем таких решений существует однопараметрическое семейство в случае, когда* $\lambda_0(1-\sigma_s)<0$ *и двухпараметрическое – в случае, когда* $\lambda_0(1-\sigma_s)>0$ *и* $\pi_\omega(t)(1-\lambda_0^2)<0$ *при* $t\in]a,\omega[$.

Доказательство. Применяя к уравнению (1) преобразование

$$H_s(y(t))=\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)[1+u_1(t)]\,,$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=\frac{\lambda_0}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)}[1+u_2(t)]\,,\tag{30}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$u_1'=\frac{1}{\pi_\omega(t)}\Big[-q(t)(1+u_1)+\frac{\lambda_0 G(t,u_1)}{\alpha_s(\lambda_0-1)^2J_s(t)}(1+u_2)\Big],$$

$$u_2'=\frac{1}{\pi_\omega(t)}\Big[1+u_2-\frac{\lambda_0}{\lambda_0-1}(1+u_2)^2+$$

$$+\frac{\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)q(t)}{\lambda_0 G(t,u_1)}\big(1+R(t,u_1)\big)\Big],\tag{31}$$

в которой

$$q(t)=\frac{\pi_\omega(t)J'_s(t)}{J_s(t)}, \qquad G(t,u_1)=\frac{Y(t,u_1)}{\varphi_s(Y(t,u_1))},$$

$$Y(t,u_1)=H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)(1+u_1)), \tag{32}$$

$$R(t,u_1)=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{m}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))}. \tag{33}$$

Учитывая условия (15), подберем число $t_0\in[a,\omega[$ так, чтобы при $|u_1|\le\delta$

$$\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)(1+u_1)\in\Delta_{Z_s}(c_s), \qquad Y(t,u_1)\in\Delta_{Y_0}(b).$$

Рассмотрим систему (31) на множестве

$$\Omega=[t_0,\omega[\times D, \qquad D=\{(u_1,u_2):|u_i|\le\delta,\ \ i=1,2\}.$$

Тогда, на основании (12) и (15)

$$\lim_{t\uparrow\omega}Y(t,u_1)=Y_0 \qquad \text{равномерно по} \qquad u_1\in[-\delta,\delta]. \tag{34}$$

Отсюда, с учетом (13) и вида функции G, следует что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{G(t,u_1)}{H_s(Y(t,u_1))}=1-\sigma_s \quad \text{равномерно по} \quad u_1\in[-\delta,\delta],$$

т.е.

$$G(t,u_1)=[1-\sigma_s+R_1(t,u_1)]H_s(Y(t,u_1))$$

и

$$\frac{1}{G(t,u_1)}=\frac{1/(1-\sigma_s)+R_2(t,u_1)}{H_s(Y(t,u_1))},$$

где функции R_i, $i=1,2$, удовлетворяют условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega}R_i(t,u_1)=0 \qquad \text{равномерно по} \qquad u_1\in[-\delta,\delta]. \tag{35}$$

Следовательно, с учетом вида функции $Y(t,u_1)$, верны представления

$$G(t,u_1)=\alpha_s(\lambda_0-1)[1-\sigma_s+R_1(t,u_1)]J_s(t)(1+u_1), \tag{36}$$

$$\frac{1}{G(t,u_1)}=\frac{1/(1-\sigma_s)+R_2(t,u_1)}{\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)(1+u_1)}. \tag{37}$$

Кроме того, покажем, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}R(t,u_1)=0 \qquad \text{равномерно по} \qquad u_1\in[-\delta,\delta]. \tag{38}$$

Так как функции φ_i при $i\in\{1,\dots,\ell\}$ являются правильно меняющимися при $y\to Y_0$, $y\in\Delta_{Y_0}(b)$, порядков σ_i, то в силу представлений (4), с учетом свойств медленно меняющихся функций [14], имеем

$$\begin{aligned}\varphi_i(Y(t,u_1))&=\varphi_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)(1+u_1))\big)=\\ &=\left|H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))(1+u_1)\right|^{\sigma_i}L_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t)(1+u_1))\big)=\\ &=\left|H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))(1+u_1)\right|^{\sigma_i}L_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\big)\times\\ &\times(1+r_i(t,u_1))=\varphi_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\big)(1+u_1)^{\sigma_i}\times\\ &\times(1+r_i(t,u_1)), \qquad i=1,\dots,\ell,\end{aligned}$$

где функции $r_i(t,u_1)$ таковы, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_i(t,u_1)=0 \qquad \text{равномерно по} \qquad u_1\in[-\delta,\delta].$$

С учетом этих условий

$$\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{\ell}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))}=0 \qquad \text{равномерно по} \qquad u_1\in[-\delta,\delta], \tag{39}$$

поскольку из условий (16) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{\ell}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,u_1))}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s(Y(t,u_1))}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{\ell}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\big)(1+u_1)^{\sigma_i}[1+r_i(t,u_1)]}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\big)(1+u_1)^{\sigma_s}[1+r_s(t,u_1)]}=$$

$$=\lim_{t\uparrow\omega}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{\ell}\frac{\alpha_i p_i(t)\varphi_i\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\big)}{\alpha_s p_s(t)\varphi_s\big(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0-1)J_s(t))\big)}=0$$

равномерно по $u_1\in[-\delta,\delta]$.

Из (39) и (28), с учетом вида функции $R(t,u_1)$, следует справедливость (38). Учитывая введенные обозначения (33), (36), (37) и полагая

$$h(t)=\frac{1}{(\lambda_0-1)\pi_\omega(t)},$$

систему дифференциальных уравнений (31) запишем в виде

$$u_1'=h(t)[f_1(t,u_1,u_2)+\lambda_0(1-\sigma_s)u_2+\lambda_0(1-\sigma_s)u_1u_2],$$

$$u_2'=h(t)[f_2(t,u_1)-u_1-(\lambda_0+1)u_2+u_1^2(1+u_1)^{-1}-\lambda_0u_2^2], \tag{40}$$

где

$$f_1(t,u_1,u_2)=[\lambda_0(1-\sigma_s)-(\lambda_0-1)q(t)+\lambda_0(1+u_2)R_1(t,u_1)](1+u_1),$$

$$f_2(t,u_1)=\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0}q(t)(1+u_1)^{-1}(1+R(t,u_1))R_2(t,u_1)+$$

$$+\left(\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0(1-\sigma_s)}q(t)-1\right)(1+u_1)^{-1}+$$

$$+\frac{\lambda_0-1}{\lambda_0(1-\sigma_s)}q(t)(1+u_1)^{-1}R(t,u_1).$$

В этой системе уравнений нелинейные слагаемые

$$V_1(u_1,u_2)=\lambda_0(1-\sigma_s)u_1u_2, \quad V_2(u_1,u_2)=u_1^2(1+u_1)^{-1}-\lambda_0u_2^2$$

удовлетворяют условиям

$$\lim_{|u_1|+|u_2|\to0}\frac{V_i(u_1,u_2)}{|u_1|+|u_2|}=0, \qquad i=1,2,$$

Для функций $f_1(t,u_1,u_2)$ и $f_2(t,u_1)$, согласно второму из условий (15), с учетом (35) и (38) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_1(t,u_1,u_2)=0 \qquad \text{равномерно по} \qquad u_i\in[-\delta,\delta], \quad i=1,2,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} f_2(t,u_1)=0 \qquad \text{равномерно по} \qquad u_1\in[-\delta,\delta].$$

Кроме того,

$$\int_{t_0}^{\omega} h(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\lambda_0 - 1}\int_{t_0}^{\omega}\frac{d\tau}{\pi_\omega(\tau)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}\ln\left|\pi_\omega(\tau)\right|\Big|_{t_0}^{\omega} = \pm\infty\,.$$

Запишем характеристическое уравнение матрицы коэффициентов, стоящих при u_1 и u_2 в квадратных скобках системы (40):

$$\rho^2 + \rho(\lambda_0 + 1) + \lambda_0(1 - \sigma_s) = 0.$$

Из условий (29), с учетом того, что $\sigma_s \neq 1$ и $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью. Тем самым показано, что для системы (40) выполнены все условия теоремы 2.2 из работы [6]. Согласно этой теореме, система дифференциальных уравнений (40) имеет хотя бы одно решение $u = (u_1, u_2) : [t_1, \omega[\, \to \mathbb{R}^2$, $t_1 \geq t_0$, стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$. Каждому такому решению системы (40), в силу преобразований (30), соответствует решение дифференциального уравнения (1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (18), (19), причем это решение является $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решением уравнения (1). Более того, из теоремы 2.2 из [6] следует, что уравнение (1) имеет однопараметрическое семейство таких решений в случае, когда $\lambda_0(1 - \sigma_s) < 0$, и двухпараметрическое – в случае, когда $\lambda_0(1 - \sigma_s) > 0$ и $\pi_\omega(t)(1 - \lambda_0^2) < 0$ при $t \in]a, \omega[$.

Теорема доказана. ♦

Пример. В качестве примера, иллюстрирующего полученные в данной работе результаты, рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y'' = \alpha_1 p_1(t)|y|^\sigma + \alpha_2 p_2(t) e^{\mu y}\,, \tag{41}$$

где $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2$, $p_i : [a, \omega[\, \to\,]0, +\infty[$, $i = 1, 2$, – непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\sigma \neq 1$, $\mu \neq 0$.

Для уравнения (41) выясним вопрос о существовании при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений, для которых выполняются условия

$$\lim_{t\uparrow\omega} y(t) = \pm\infty, \qquad Y_0 = \pm\infty, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_2(t)e^{\mu y(t)}}{p_1(t)|y(t)|^\sigma} = 0\,. \tag{42}$$

Из теорем 1 и 2 вытекает

Следствие 1. *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ *и выполняется неравенство* $\sigma \neq 1$. *Тогда для существования* $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$*-решений у дифференциального уравнения* (41), *удовлетворяющих условиям* (42), *необходимо, а если*

$$p_2(t) = o\left(\frac{p_1(t)\left|(1-\sigma)(\alpha_1(\lambda_0 - 1)J_1(t) + C)\right|^{\sigma/(1-\sigma)}}{\exp\left(\mu\nu_0\left|(1-\sigma)(\alpha_1(\lambda_0 - 1)J_1(t)(1+u) + C)\right|^{1/(1-\sigma)}\right)}\right), \quad t\uparrow\omega, \tag{43}$$

равномерно по $u \in [-\delta, \delta]$ *для некоторого* $0 < \delta < 1$, *где*

$$C = \begin{cases} 0, & \sigma > 1, \\ \dfrac{\nu_0\,|b|^{1-\sigma}}{\sigma - 1}, & \sigma < 1, \end{cases}$$

и имеет место одно из двух условий

либо $\lambda_0 \neq -1$, *либо* $\lambda_0 = -1$ *и* $\sigma < 1$,

то и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\alpha_1\nu_0\lambda_0 > 0, \qquad \lambda_0(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t) > 0, \qquad t \in\,]a, \omega[\,,$$

$$\alpha_1(\lambda_0 - 1)\lim_{t\uparrow\omega} J_1(t) = Z_1, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)J_1'(t)}{J_1(t)} = \frac{\lambda_0(1-\sigma)}{\lambda_0 - 1}.$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$y(t) = \nu_0 \left|(1-\sigma)(\alpha_1(\lambda_0 - 1)J_1(t))\right|^{1/(1-\sigma)} [1 + o(1)], \qquad t\uparrow\omega,$$

$$y'(t) = \frac{\lambda_0\nu_0 \left|(1-\sigma)(\alpha_1(\lambda_0 - 1)J_1(t))\right|^{1/(1-\sigma)}}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)} [1 + o(1)], \qquad t\uparrow\omega.$$

Причем таких решений существует однопараметрическое семейство в случае, когда $\lambda_0(1-\sigma) < 0$, *и двухпараметрическое – случае, когда* $\lambda_0(1-\sigma) > 0$ *и* $\lambda_0 \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Замечание 1. Если функции p_1 и p_2 являются правильно меняющимися при $t\uparrow\omega$ и $\mu\nu_0 < 0$, то условие (43) заведомо выполнено.

Выводы. В настоящей работе для уравнения (1) при $\lambda_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ установлены условия существования $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-решений в случае, когда главным является слагаемое с правильно меняющейся нелинейностью. Также найдены асимптотические представления при $t\uparrow\omega$, $\omega \le +\infty$, для таких решений и их производных первого порядка и выяснен вопрос о количестве решений с найденными представлениями.

1. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1998. – 295 с.
2. *Евтухов В. М., Владова Е. С.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных циклических систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2012. – **48**, № 5. – С. 622–639.
   То же: *Evtukhov V. M., Vladova E. S.* Asymptotic representations of solutions of essentially nonlinear cyclic systems of ordinary differential equations // Differ. Equat. – 2012. – **48**, No. 5.– P. 630–646.
3. *Евтухов В. М., Кириллова Л. А.* Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 8. – С. 1053–1061.
   То же: *Evtukhov V. M., Kirillova L. A.* On the asymptotics of solutions of nonlinear second-order differential equations // Differ. Equat. – 2005. – **41**, No. 8. – P. 1105–1114.
4. *Евтухов В. М., Клопот А. М.* Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2014. – **50**, № 5. – С. 584–600.
   То же: *Evtukhov V. M., Klopot A. M.* Asymptotic behavior of solutions of *n*th-order ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities // Differ. Equat. – 2014. – **50**, No. 5.– P. 581–597.
5. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных диференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2011. – **47**, № 5. – С. 628–650.
   То же: *Evtukhov V. M., Samoilenko A. M.* Asymptotic representations of solutions of nonautonomous ordinary differential equations with regularly varying nonlinearities // Differ. Equat. – 2011. – **47**, No. 5. – P. 627–649.
6. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 52–80.
   То же: *Evtukhov V. M., Samoilenko A. M.* Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, No. 1. – P. 56–86.

7. *Евтухов В. М., Харьков В. М.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения – 2007. – **43**, № 10. – С. 1311–1323.
   То же: *Evtukhov V. M., Kharkov V. M.* Asymptotic representations of solutions of essentially nonlinear second-order differential equations // Differ. Equat. – 2007. – **43**, No. 10. – P. 1340–1352.
8. *Касьянова В. А.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с нелинейностями, асимптотически близкими к степенным: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 2009. – 154 с.
9. *Черникова А. Г.* Асимптотика быстро изменяющихся решений дифференциальных уравнений второго порядка с быстро меняющейся нелинейностью // Дослідження в математиці і механіці. – 2015. – **20**, вип. 2(26). – С. 52–68.
10. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – Москва: Наука, 1985. – 144 с.
    То же: *Seneta E.* Regularly varying functions // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer-Verlag, 1976. – **508**. – viii+116 p.
11. *Cano-Casanova S.* Decay rate at infinity of the positive solutions of a generalised class of Thomas-Fermi equations // Proc. 8th AIMS Conf. Discrete Cont. Dynam. Systems Differ. Equat. Suppl. 2011. – 2011. – Vol. 1. – P. 240–249.
12. *Kusano T., Manojlović J., Marić V.* Increasing solutions of Thomas-Fermi type differential equations – The sublinear case // Bull. T. CXLIII de l'Acad. Serbe des Sci. et des Arts. – 2011. – Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Sciences mathématiques. – No. 36. – P. 21–36.
13. *Manojlović J., Marić V.* An asymptotic analysis of positive solutions of Thomas-Fermi type sublinear differential equations // Mem. Differ. Equat. Math. Phys. – 2012. – **57**. – P. 75–94.
14. *Marić V.* Regular variation and differential equations // Lect. Notes Math. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. – **1726**. – 128 p.
15. *Marić V., Radašin Z.* Asymptotic behavior of solutions of the equation $y'' = f(t)\varphi(\psi(y))$ // Glasnik matematički. – 1988. – **23** (43), No. 1. – P. 27–34.
16. *Marić V., Tomić M.* Asymptotics of solutions of a generalised Thomas-Fermi equations // J. Differ. Equat. – 1980. – **35**, No. 1. – P. 36–44.
17. *Řehák P., Matucci S.* Extremal solutions to a system of n nonlinear differential equations and regularly varying functions // Math. Nachr. – 2015. – **288**, No. 11-12. – P. 1413–1430.
18. *Taliaferro S. D.* Asymptotic behavior of solutions of $y'' = \varphi(t)f(y)$ // SIAM J. Math. Anal. – 1981. – **12**, No. 6. – P. 853–865.
19. *Taliaferro S. D.* Asymptotic behavior of positive decreasing solutions of $y''=F(t,y,y')$ // Geometric analysis and nonlinear PDE: Lect. Notes in Pure and Appl. Math. / Ed. I. J. Bakelman. – New York: M. Dekker, 1993. – **144**. – P. 105–127.

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПРАВИЛЬНО І ШВИДКО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Встановлюються асимптотичні властивості деяких типів розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, які містять у правій частині суму доданків із правильно та швидко змінними нелінійностями.

ASYMPTOTIC REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH REGULARLY AND RAPIDLY VARYING NONLINEARITIES

The asymptotic properties of some solutions of second-order differential equations that have righthand sides containing regularly and rapidly varying nonlinearities are established.

Одесск. нац. ун-т им. И. И. Мечникова, Одесса

Получено
16.04.17