УДК 539.3

М. В. Марчук, Р. І. Тучапський

СИСТЕМА ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТОНКИХ І ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

Узагальнено підхід, запропонований Векуа для ізотропних лінійно-пружних оболонок. Наведено систему рівнянь рівноваги, співвідношень пружності та нелінійних геометричних залежностей для тіла з криволінійною анізотропією в тензорній і векторній формах і її наближений аналог теж у тензорній і векторній формах для тонких і пологих оболонок постійної товщини відносно координатної системи, нормально зв'язаної із серединною поверхнею оболонки. Розглянуто 4 види різних операторів коваріантного диференціювання. Отримано рівняння рівноваги оболонок відносно моментів розвинення складових і компонент тензора напружень за поліномами Лежандра.

Напружено-деформований стан гнучких оболонок описується рівняннями нелінійної теорії пружності. Застосування апарату тензорного числення і теорії поверхонь у тензорному вигляді, спрощуючі припущення для тонких і пологих оболонок полегшують перехід від тривимірних рівнянь і співвідношень нелінійної теорії пружності до двовимірних за допомогою розвинень за поліномами Лежандра та дозволяють подати їх у зручній для подальшого дослідження формі. Один із методів побудови теорії пружних оболонок розглянуто у [6]. У цій роботі використаємо підхід, запропонований Векуа.

Віднесемо розглядуване криволінійно-анізотропне тіло до деякої криволінійної координатної системи. Нехай тріедри $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ та $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ є відповідно коваріантними та контраваріантними рухомими базисами координатної системи; g_{ij}, g^{ij}, g_i^j, $i, j = 1, 2, 3$, – відповідно коваріантні, контраваріантні та змішаного типу складові метричного тензора простору, а g – дискримінант метричної квадратичної форми. Домовимось, що індекси, позначені грецькими буквами, пробігатимуть значення 1, 2. Будемо застосовувати правило підсумовування за глухим індексом [3, с. 16–18], вважаючи, що латинські індекси пробігають значення 1, 2, 3. Домовимось також, що якщо в якому-небудь співвідношенні будуть вільні індекси [3, с. 18], то це означатиме, що співвідношення справджується для всіх допустимих значень цих вільних індексів. Вважатимемо, що вільні латинські індекси пробігатимуть значення 1, 2, 3, якщо, звичайно, спеціально не буде сказано інше.

Скориставшись тензорною символікою, рівняння рівноваги суцільного середовища, рівняння пружності (закон Гука) і співвідношення для деформацій можна записати у вигляді [1, с. 61, 221–222]

$$\nabla_i s^{ij} + f^j = 0\,, \tag{1}$$

$$s^{ij} = \sigma^{ik}\left(g_k^j + \nabla_k u^j\right), \tag{2}$$

$$\sigma^{ij} = C^{ijkm} e_{km}\,, \tag{3}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k\right), \tag{4}$$

де ∇_i – символи коваріантних похідних відносно просторових координат x^i [3, с. 127]; s^{ij}, σ^{ij} – відповідно контраваріантні компоненти несиметричного та симетричного тензорів напружень; f^i – контраваріантні компоненти об'ємних сил $\mathbf{f}$; u_i, u^i – відповідно коваріантні та контраваріантні компоненти вектора переміщення $\mathbf{u}$; C^{ijkm} – пружні коефіцієнти тіла; e_{ij} – коваріантні компоненти тензора деформації.

Уведемо в розгляд вектор-функції [5, с. 39]

$$\mathbf{s}^i = s^{ij}\mathbf{R}_j, \qquad \boldsymbol{\sigma}^i = \sigma^{ij}\mathbf{R}_j. \tag{5}$$

Назвемо їх контраваріантними складовими відповідних тензорів напружень.

Систему рівнянь (1)–(4) можна записати у вигляді [5, с. 39]

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_i\left(\sqrt{g}\mathbf{s}^i\right) + \mathbf{f} = 0, \tag{6}$$

$$\mathbf{s}^i = \left(\sigma^i\mathbf{R}^k\right)\left(\mathbf{R}_k + \partial_k\mathbf{u}\right), \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \frac{1}{2}C^{ijkm}\left(\mathbf{R}_k\partial_m\mathbf{u} + \mathbf{R}_m\partial_k\mathbf{u} + \partial_k\mathbf{u}\partial_m\mathbf{u}\right)\mathbf{R}_j, \tag{8}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{R}_j\partial_i\mathbf{u} + \mathbf{R}_i\partial_j\mathbf{u} + \partial_i\mathbf{u}\partial_j\mathbf{u}\right). \tag{9}$$

Перейдемо тепер до розгляду оболонок. Позначимо товщину оболонки через $2h$ і будемо вважати її сталою. Нехай S – серединна поверхня оболонки. Будемо користуватись координатними системами, нормально зв'язаними з поверхнею S [3, с. 261]. Віднесемо S до криволінійних координат x^1, x^2, поперечну координату x^3 будемо відраховувати в сторону зростання зовнішньої нормалі до поверхні S. Сім'ю просторових систем координат, для яких одна із сімей координатних ліній є сім'єю нормалей до поверхні S, названо Векуа S-сім'єю. При заміні одних координатних систем іншими з S-сім'ї залишається без змін координата x^3. Такого роду перетворення координат x^i названо ним S-перетвореннями. Величини, що мають тензорні властивості відносно S-перетворень координат, названо Векуа S-тензорами. Просторові тензори в оболонці завжди є S-тензорами, але зворотне твердження, очевидно, невірне.

При розгляді тонких або пологих оболонок припускають, що

$$1 - k_1x^3 \approx 1, \qquad 1 - k_2x^3 \approx 1, \qquad x^3 \in [-h, h], \tag{10}$$

де k_1 і k_2 – головні кривини поверхні S. Ці умови виконуються, якщо відрізок $[-h, h]$ досить малий. Тоді маємо тонку оболонку. Умови (10) виконуються, якщо k_1 і k_2 – малі величини. У цьому випадку серединна поверхня S близька до площини й тоді маємо пологу оболонку. Якщо S – площина, то $k_1 = k_2 = 0$ й умови (10) виконуються точно. У такому випадку оболонку називають призматичною.

Нехай вектори $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ і $\mathbf{r}^1$, $\mathbf{r}^2$ складають відповідно коваріантний і контраваріантний рухомі базиси координатної системи поверхні S; $\mathbf{n}$ – орт нормалі до поверхні S; a – дискримінант метричної квадратичної форми поверхні S; $b_{\alpha\beta}$, b_α^β – відповідно коваріантні та змішані компоненти тензора поверхні S із відомих деривацaverage формул Вейнґартена [3, с. 154]; H і K – відповідно середня і ґауссова кривини поверхні S.

Векуа введено позначення [3, с. 270]

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}^3 = \mathbf{n}, \tag{11}$$

$$a_{ij} = a_{ji} = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j, \qquad a^{ij} = a^{ji} = \mathbf{r}^i\mathbf{r}^j, \qquad a_i^j = \mathbf{r}_i\mathbf{r}^j. \tag{12}$$

Систему вектор-функцій $\mathbf{r}_i$ та $\mathbf{r}^i$ названо супутніми базисами координатної системи з S-сім'ї відносно базисів $\mathbf{R}_i$ та $\mathbf{R}^i$; $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$, a_α^β є відповідно коваріантними, контраваріантними та змішаного типу метричними тензорами поверхні S.

Урахувавши наближені рівності (10) для тонких або пологих оболонок і використавши позначення (11), можна записати такі вирази [2, с. 29]:

$$\mathbf{R}_\alpha \approx \mathbf{r}_\alpha, \qquad \mathbf{R}^\alpha \approx \mathbf{r}^\alpha, \qquad \mathbf{R}_3 = \mathbf{r}_3 = \mathbf{R}^3 = \mathbf{r}^3 = \mathbf{n}. \tag{13}$$

Крім припущень (10), будемо ще приймати, що [2, с. 29]

$$x^3 \nabla_\alpha b_\beta^\gamma \approx 0, \tag{14}$$

тобто

$$x^3 \partial_\alpha k_1 \approx 0, \qquad x^3 \partial_\alpha k_2 \approx 0. \tag{15}$$

Умови (14) і (15) виконуються точно для призматичних, сферичних і циліндричних оболонок [3, с. 270].

Просторові символи Крістоффеля 2-го роду відносно координатної системи з S-сім'ї позначимо через $\hat{\Gamma}_{ij}^k$. Вирази для них наведено в праці Векуа [2, с. 25]. Нехай $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ – символи Крістоффеля 2-го роду поверхні S. Можна побудувати деяке розширення символів $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ [2, с. 25; 3, с. 276], увівши нові символи за допомогою формул

$$\Gamma_{3\alpha}^\beta = -b_\alpha^\beta, \qquad \Gamma_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta}, \qquad \Gamma_{\alpha 3}^\beta = \Gamma_{3\alpha}^3 = \Gamma_{\alpha 3}^3 = \Gamma_{33}^\alpha = \Gamma_{33}^3 = 0. \tag{16}$$

Символи Γ_{ij}^k названо символами Крістоффеля 2-го роду супутніх базисів $\mathbf{r}_i$ та $\mathbf{r}^i$.

За допомогою умов (10), (14), формул (13) і дериваційних формул Ґаусса [3, с. 152–153] і Вейнґартена можна отримати вирази [2, с. 30]

$$\begin{gathered}
\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \approx \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, \qquad \hat{\Gamma}_{\alpha 3}^\beta = \hat{\Gamma}_{3\alpha}^\beta \approx -b_\alpha^\beta, \qquad \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^3 \approx b_{\alpha\beta}, \\
\hat{\Gamma}_{3\alpha}^3 = \hat{\Gamma}_{\alpha 3}^3 = \hat{\Gamma}_{33}^\alpha = \hat{\Gamma}_{33}^3 = 0;
\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{R}_{\alpha\beta} \approx \mathbf{r}_{\alpha\beta}, \qquad \mathbf{R}_{\alpha 3} = \mathbf{R}_{3\alpha} = \mathbf{r}_{3\alpha} = -b_\alpha^\beta \mathbf{r}_\beta, \qquad \mathbf{R}_{33} = 0, \\
\partial_\alpha \mathbf{R}^\beta \approx \partial_\alpha \mathbf{r}^\beta, \quad \partial_\alpha \mathbf{R}^3 = \partial_\alpha \mathbf{r}^3 = -b_\alpha^\beta \mathbf{r}_\beta, \quad \partial_3 \mathbf{R}^\alpha \approx b_\beta^\alpha \mathbf{r}^\beta, \quad \partial_3 \mathbf{R}^3 = 0.
\end{gathered} \tag{18}$$

Розглядаючи різні S-параметризації області, доцільно застосовувати 4 види різних операторів коваріантного диференціювання [3, с. 276–281]. Через ∇_α (відповідно $\hat{\nabla}_\alpha$) позначимо оператори коваріантного диференціювання компонент тензорів поверхні S (відповідно поверхні $\hat{S}: x^3 = \mathrm{const}$). Через $\widehat{\nabla}_i$, $\hat{\widehat{\nabla}}_i$ позначимо оператори коваріантного диференціювання компонент S-тензорів. Нехай $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{\beta_1 \ldots \beta_q}$ (відповідно $B_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{\beta_1 \ldots \beta_q}$) – тензор поверхні S (відповідно поверхні $\hat{S}: x^3 = \mathrm{const}$); $C_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ – S-тензор, а p, q – довільні натуральні числа. Тоді

$$\begin{aligned}
\nabla_\gamma A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{\beta_1 \ldots \beta_q} &= \partial_\gamma A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{\beta_1 \ldots \beta_q} - \Gamma_{\alpha_1 \gamma}^\lambda A_{\lambda \alpha_2 \ldots \alpha_p}^{\beta_1 \ldots \beta_q} - \ldots - \Gamma_{\alpha_p \gamma}^\lambda A_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} \lambda}^{\beta_1 \ldots \beta_q} + \\
&\quad + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\beta_1} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{\lambda \beta_2 \ldots \beta_q} + \ldots + \Gamma_{\lambda\gamma}^{\beta_q} A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}^{\beta_1 \ldots \beta_{q-1} \lambda},
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_k C_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} &= \partial_k C_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} - \Gamma_{i_1 k}^\ell C_{\ell i_2 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} - \ldots - \Gamma_{i_p k}^\ell C_{i_1 \ldots i_{p-1} \ell}^{j_1 \ldots j_q} + \\
&\quad + \Gamma_{\ell k}^{j_1} C_{i_1 \ldots i_p}^{\ell j_2 \ldots j_q} + \ldots + \Gamma_{\ell k}^{j_q} C_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_{q-1} \ell}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Вираз для $\hat{\nabla}_\gamma B^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ отримаємо з формули (19), замінивши в ній символи ∇_γ на $\hat{\nabla}_\gamma$; $A^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ – на $B^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$; $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ – на $\hat{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$. Вираз для $\hat{\widehat{\nabla}}_k C^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ отримаємо з формули (20), замінивши в ній символи $\widehat{\nabla}_k$ на $\hat{\widehat{\nabla}}_k$ та Γ^k_{ij} – на $\hat{\Gamma}^k_{ij}$.

З S-тензора можна отримати тензори поверхонь S і $\hat{S}$ за допомогою операцій звуження [3, с. 262–263]. Застосувавши до компонент будь-якого з цих тензорів операції коваріантного диференціювання на поверхні S або $\hat{S}$, отримаємо тензор відповідної поверхні.

$s^{\alpha\beta}$, $s^{\alpha 3}$, $s^{3\alpha}$ можна розглядати як тензори поверхні S, а s^{33} – як скаляр поверхні S, отримані з s^{ij} шляхом операцій звуження. Застосувавши до компонент будь-якого з них операції коваріантного диференціювання на поверхні S, отримаємо тензор цієї поверхні. Використавши формули (17) і коментарі до формули (20), випишемо наближені рівності:

$$\hat{\widehat{\nabla}}_i s^{i\beta} \approx \nabla_\alpha s^{\alpha\beta} - 2Hs^{3\beta} - b^\beta_\alpha \left(s^{\alpha 3} + s^{3\alpha}\right) + \partial_3 s^{3\beta},$$

$$\hat{\widehat{\nabla}}_i s^{i3} \approx \nabla_\alpha s^{\alpha 3} - 2Hs^{33} + b_{\beta\alpha} s^{\alpha\beta} + \partial_3 s^{33}. \tag{21}$$

Надалі будемо розглядати оболонки, які мають таку властивість, що, якщо рівняння рівноваги записати стосовно деякої координатної системи з S-сім'ї, а потім внести в них спрощення, застосовуючи припущення (10), (14) і наближені співвідношення, що випливають з них, то розв'язок отриманої спрощеної системи рівнянь дає практично достатньо точне наближення.

Використавши формули (13), з рівностей (9) отримаємо

$$e_{ij} \approx \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_i \partial_j \mathbf{u} + \mathbf{r}_j \partial_i \mathbf{u} + \partial_i \mathbf{u} \partial_j \mathbf{u}\right). \tag{22}$$

Застосувавши формули (13), (18) і (22), з рівностей (9) будемо мати наближені вирази

$$\partial_\alpha e_{ij} \approx \partial_\alpha \dot{e}_{ij}. \tag{23}$$

Якщо подамо вектор $\mathbf{u}$ у вигляді

$$\mathbf{u} = U_i \mathbf{r}^i = U^i \mathbf{r}_i, \tag{24}$$

де

$$U_i = \mathbf{u}\mathbf{r}_i, \qquad U^i = \mathbf{u}\mathbf{r}^i, \tag{25}$$

і покажемо, що U_i та U^i є S-тензорами, то можна буде написати [2, с. 32]

$$\partial_i \mathbf{u} = \widehat{\nabla}_i U_j \mathbf{r}^j = \widehat{\nabla}_i U^j \mathbf{r}_j, \tag{26}$$

де

$$\widehat{\nabla}_i U_j = \mathbf{r}_j \partial_i \mathbf{u} = \partial_i U_j - \Gamma^k_{ji} U_k,$$

$$\widehat{\nabla}_i U^j = \mathbf{r}^j \partial_i \mathbf{u} = \partial_i U^j + \Gamma^j_{ki} U^k. \tag{27}$$

Тепер формули (22) можна подати у такій формі:

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\widehat{\nabla}_i U_j + \widehat{\nabla}_j U_i + \widehat{\nabla}_i U_k \widehat{\nabla}_j U^k\right). \tag{28}$$

Запишемо вектор $\mathbf{f}$ у вигляді

$$\mathbf{f} = F_i \mathbf{r}^i = F^i \mathbf{r}_i, \tag{29}$$

де

$$F_i = \mathbf{f}\mathbf{r}_i, \qquad F^i = \mathbf{f}\mathbf{r}^i. \tag{30}$$

Оскільки U_i та U^i є S-тензорами, то U_α (відповідно U^α) можна розглядати як тензор поверхні S, а $U_3 = U^3$ – як скаляр поверхні S, що отримані з U_i (відповідно з U^i) шляхом операцій звуження. Застосувавши до компонент будь-якого з них операції коваріантного диференціювання на поверхні S, отримаємо тензор цієї поверхні. Тому, використавши рівності (16) і (19), формули (27) можна подати в наступній формі:

$$\hat{\nabla}_\alpha U_\beta = \nabla_\alpha U_\beta - b_{\alpha\beta} U_3, \qquad \hat{\nabla}_\alpha U^\beta = \nabla_\alpha U^\beta - b_\alpha^\beta U^3,$$

$$\hat{\nabla}_\alpha U_3 = \partial_\alpha U_3 + b_\alpha^\beta U_\beta, \qquad \hat{\nabla}_\alpha U^3 = \partial_\alpha U^3 + b_{\alpha\beta} U^\beta,$$

$$\hat{\nabla}_3 U_\alpha = \partial_3 U_\alpha, \qquad \hat{\nabla}_3 U^\alpha = \partial_3 U^\alpha,$$

$$\hat{\nabla}_3 U_3 = \partial_3 U_3, \qquad \hat{\nabla}_3 U^3 = \partial_3 U^3.$$

Будемо вважати, що оболонка є криволінійно анізотропною [4, с. 57–62]. Нехай координатні напрямки вибраної нами системи криволінійних координат у кожній точці оболонки співпадають з напрямками, еквівалентними в сенсі пружних властивостей. У такій системі координат фізичні компоненти тензора напружень є лінійними функціями від фізичних компонент тензора деформацій [4, с. 58]. Користуючись означенням фізичних компонент тензора [1, с. 17–18; 3, с. 65] і властивостями метричних тензорів, неважко переконатися, що

$$C^{ij\ell m} = \sum_{n=1}^{3}\sum_{p=1}^{3} g^{in} g^{jp} \sqrt{\frac{g_{nn} g_{pp}}{g_{\ell\ell} g_{mm}}} A_{\ell mnp}, \tag{31}$$

де $A_{\ell mnp}$ – сталі.

Застосувавши формули (12) і (13), з рівностей (31) отримаємо

$$C^{ij\ell m} \approx \dot{C}^{ij\ell m} = \sum_{n=1}^{3}\sum_{p=1}^{3} a^{in} a^{jp} \sqrt{\frac{a_{nn} a_{pp}}{a_{\ell\ell} a_{mm}}} A_{\ell mnp}. \tag{32}$$

Урахувавши формули (12), (13), (18) і (32), з рівностей (31) будемо мати наближені вирази

$$\partial_\alpha C^{ijk\ell} \approx \partial_\alpha \dot{C}^{ijk\ell}. \tag{33}$$

При переході від одних координат з S-сім'ї до інших елементи матриці $\dot{C}^{ijk\ell}$ будемо перетворювати коґредієнтно з елементами тензора $C^{ijk\ell}$. Таким чином задамо тензор відносно S-перетворень координат, тобто $\dot{C}^{ijk\ell}$ – S-тензор.

Використавши формули (13), (22) і (32), з рівностей (8) отримаємо

$$\boldsymbol{\sigma}^i \approx \dot{\boldsymbol{\sigma}}^i = \dot{C}^{ijkm} \dot{e}_{km} \mathbf{r}_j. \tag{34}$$

Застосувавши формули (13), (18), (22), (32), (33) і (34), з рівностей (8) будемо мати наближені вирази

$$\partial_\alpha \boldsymbol{\sigma}^i \approx \partial_\alpha \dot{\boldsymbol{\sigma}}^i. \tag{35}$$

Урахувавши формули (13) і (34), з рівностей (7) отримаємо

$$\mathbf{s}^i \approx \dot{\mathbf{s}}^i = (\dot{\sigma}^i \mathbf{r}^k)(\mathbf{r}_k + \partial_k \mathbf{u}). \tag{36}$$

За допомогою формул (13), (18), (34), (35) і (36) з рівностей (7) будемо мати наближені вирази

$$\partial_\alpha \mathbf{s}^i \approx \partial_\alpha \dot{\mathbf{s}}^i. \tag{37}$$

Використавши формули (22) і (32), з рівностей (3) отримаємо

$$\sigma^{ij} \approx \dot{\sigma}^{ij} = \dot{C}^{ijkm} \dot{e}_{km}. \tag{38}$$

Застосувавши формули (22), (23), (32) і (33), з рівностей (3) будемо мати наближені вирази

$$\partial_\alpha \sigma^{ij} \approx \partial_\alpha \dot{\sigma}^{ij}. \tag{39}$$

На підставі відомих формул [3, с. 127] запишемо рівності (2) у такій формі:

$$s^{ij} = \sigma^{ik}(\mathbf{R}_k + \partial_k \mathbf{u})\mathbf{R}^j. \tag{40}$$

Урахувавши формули (12), (13), (27) і (38), з рівностей (40) отримаємо

$$s^{ij} \approx \dot{s}^{ij} = \dot{\sigma}^{ik}(a_k^j + \hat{\nabla}_k U^j). \tag{41}$$

За допомогою формул (12), (13), (18), (27), (38), (39) і (41) з рівностей (40) будемо мати наближені вирази

$$\partial_\alpha s^{ij} \approx \partial_\alpha \dot{s}^{ij}. \tag{42}$$

Неважко переконатись, що $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}^i$, $\partial_i \mathbf{u}$ є просторовими S-тензорами. Тому всі можливі скалярні добутки цих вектор-функцій теж будуть просторовими S-тензорами. Те ж можна сказати й про скалярні добутки $\mathbf{ur}_i$, $\mathbf{ur}^i$, $\mathbf{fr}_i$, $\mathbf{fr}^i$. Тоді з формул (25) і (30) випливає, що U_i, U^i, F_i, F^i теж є S-тензорами. Виходячи з головних властивостей тензорів [3, с. 59], робимо висновок, що $\dot{e}_{ij}$, $\dot{\sigma}^{ij}$, $\dot{s}^{ij}$, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^i$, $\dot{\mathbf{s}}^i$ теж є S-тензорами.

Вважатимемо, що функції U_i, U^i, F_i, F^i, e_{ij}, σ^{ij}, s^{ij}, векторні поля $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$, вектор-функції $\boldsymbol{\sigma}^i$, $\mathbf{s}^i$ можна розвивати в ряди за поліномами Лежандра $P_k\left(\frac{x^3}{h}\right)$ [2, с. 34–35]. Моменти цих функцій порядку k позначимо через $\overset{(k)}{U}_i$, $\overset{(k)}{U}{}^i$, $\overset{(k)}{F}_i$, $\overset{(k)}{F}{}^i$, $\overset{(k)}{e}_{ij}$, $\overset{(k)}{\sigma}{}^{ij}$, $\overset{(k)}{s}{}^{ij}$, $\overset{(k)}{\mathbf{u}}$, $\overset{(k)}{\mathbf{f}}$, $\overset{(k)}{\boldsymbol{\sigma}}{}^i$, $\overset{(k)}{\mathbf{s}}{}^i$, $k = 0,1,\ldots,\infty$. Неважко переконатись, що моменти фіксованого порядку всіх компонент S-тензора, отриманого за допомогою звуження деякого S-тензора, складають тензор поверхні S.

Перед тим, як продовжити викладки, звернемо увагу на те, що вектор-функції $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}^i$, функції a_{ij}, a^{ij}, a_i^j, a, $b_{\alpha\beta}$, b_α^β, Γ_{ij}^k, $\dot{C}^{ijk\ell}$ не залежать від поперечної координати x^3. Ця обставина полегшить завдання вивести рівняння рівноваги оболонок відносно моментів складових і компонент несиметричного тензора напружень, дотримуючись схеми, запропонованої Векуа в праці [2] для лінійно-пружних оболонок.

Оскільки [3, с. 265]

$$g = a\vartheta^2, \qquad \vartheta = (1 - k_1 x^3)(1 - k_2 x^3),$$

то рівняння (6) можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \partial_\alpha(\sqrt{a}\,\vartheta \mathbf{s}^\alpha) + \partial_3(\vartheta \mathbf{s}^3) + \vartheta \mathbf{f} = 0. \tag{43}$$

Домовимось, що нижче вільний індекс k і символ k у позначеннях моментів пробігатимуть значення $0,1,\ldots,\infty$. Помножимо обидві частини рівняння (43) на множники $\frac{2k+1}{2h} P_k\left(\frac{x^3}{h}\right)$, а потім проінтегруємо відносно x^3 від $-h$

до h. Будемо мати

$$\frac{2k+1}{2h}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-h}^{h}\partial_\alpha(\sqrt{a}\vartheta\mathbf{s}^\alpha)P_k\left(\frac{x^3}{h}\right)dx^3 +$$

$$+\frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h}\partial_3(\vartheta\mathbf{s}^3)P_k\left(\frac{x^3}{h}\right)dx^3 + \frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h}\vartheta\mathbf{f}P_k\left(\frac{x^3}{h}\right)dx^3 = 0. \quad (44)$$

Урахувавши припущення (10) і (15), отримаємо

$$\frac{2k+1}{2h}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-h}^{h}\partial_\alpha(\sqrt{a}\vartheta\mathbf{s}^\alpha)P_k\left(\frac{x^3}{h}\right)dx^3 \approx \frac{1}{\sqrt{a}}\partial_\alpha\left(\sqrt{a}\overset{(k)}{\mathbf{s}}{}^\alpha\right), \quad (45)$$

$$\frac{2k+1}{2h}\int_{-h}^{h}\vartheta\mathbf{f}P_k\left(\frac{x^3}{h}\right)dx^3 \approx \overset{(k)}{\mathbf{f}}. \quad (46)$$

Застосувавши правила інтегрування частинами, запишемо

$$\int_{-h}^{h}\partial_3(\vartheta\mathbf{s}^3)P_k\left(\frac{x^3}{h}\right)dx^3 = \overset{(+)}{\vartheta}\overset{(+)}{\mathbf{s}}{}^3 - (-1)^k\overset{(-)}{\vartheta}\overset{(-)}{\mathbf{s}}{}^3 - \frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\vartheta\mathbf{s}^3P_k'\left(\frac{x^3}{h}\right)dx^3, \quad (47)$$

де

$$\overset{(\pm)}{\mathbf{s}}{}^3 = \mathbf{s}^3(x^1, x^2, \pm h), \qquad \overset{(\pm)}{\vartheta} = \vartheta(x^1, x^2, \pm h). \quad (48)$$

Скориставшись відомою рівністю для поліномів Лежандра [2, с. 35–36]

$$P_k'(\omega) = (2k-1)P_{k-1}(\omega) + (2k-5)P_{k-3}(\omega) + \ldots \quad (49)$$

та врахувавши наближення (10), з рівності (44) будемо мати

$$\int_{-h}^{h}\partial_3(\vartheta\mathbf{s}^3)P_k\left(\frac{x^3}{h}\right)dx^3 \approx \overset{(+)}{\mathbf{s}}{}^3 - (-1)^k\overset{(-)}{\mathbf{s}}{}^3 - \frac{2}{2k+1}\underline{\overset{(k)}{\mathbf{s}}}{}^3, \quad (50)$$

де

$$\underline{\overset{(k)}{\mathbf{s}}}{}^3 = (2k+1)\left(\overset{(k-1)}{\mathbf{s}}{}^3 + \overset{(k-3)}{\mathbf{s}}{}^3 + \ldots\right). \quad (51)$$

Тепер за допомогою формул (44), (45), (46) і (50) запишемо наближене рівняння

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_\alpha\left(\sqrt{a}\overset{(k)}{\mathbf{s}}{}^\alpha\right) - \frac{1}{h}\underline{\overset{(k)}{\mathbf{s}}}{}^3 + \frac{2k+1}{2h}\left[\overset{(+)}{\mathbf{s}}{}^3 - (-1)^k\overset{(-)}{\mathbf{s}}{}^3\right] + \overset{(k)}{\mathbf{f}} = 0. \quad (52)$$

Зі сказаного вище випливає, що $\overset{(k)}{s}{}^{\alpha\beta}$, $\overset{(k)}{s}{}^{\alpha3}$, $\overset{(k)}{s}{}^{3\alpha}$, $\overset{(k)}{F}{}^\alpha$ є тензорами поверхні S, а $\overset{(k)}{s}{}^{33}$, $\overset{(k)}{F}{}^3$ – її скалярами для фіксованого k; коваріантні похідні від компонент тензорів на поверхні S складають тензори поверхні S. Якщо обидві частини рівняння (52) помножимо скалярно на $\mathbf{r}^\beta$ та $\mathbf{n}$ відповідно, використаємо відому рівність $\frac{1}{\sqrt{a}}\partial_\alpha\sqrt{a} = \Gamma^\beta_{\alpha\beta}$, формули Ґаусса, Вейнґартена, (5), (13), (18), (19), (29), (48) і (51), то отримаємо

$$\nabla_\alpha\overset{(k)}{s}{}^{\alpha\beta} - b^\beta_\alpha\overset{(k)}{s}{}^{\alpha3} - \frac{1}{h}\underline{\overset{(k)}{s}}{}^{3\beta} + \frac{2k+1}{2h}\left(\overset{(+)}{s}{}^{3\beta} - (-1)^k\overset{(-)}{s}{}^{3\beta}\right) + \overset{(k)}{F}{}^\beta = 0,$$

$$\nabla_\alpha\overset{(k)}{s}{}^{\alpha3} + b_{\alpha\beta}\overset{(k)}{s}{}^{\alpha\beta} - \frac{1}{h}\underline{\overset{(k)}{s}}{}^{33} + \frac{2k+1}{2h}\left(\overset{(+)}{s}{}^{33} - (-1)^k\overset{(-)}{s}{}^{33}\right) + \overset{(k)}{F}{}^3 = 0, \quad (53)$$

де

$$\underline{\overset{(k)}{s}}{}^{3i} = (2k+1)\left(\overset{(k-1)}{s}{}^{3i} + \overset{(k-3)}{s}{}^{3i} + \ldots\right), \qquad \overset{(\pm)}{s}{}^{3i} = s^{3i}(x^1, x^2, \pm h).$$

Неважко переконатись, що $\overset{(+)}{s}{}^{3\alpha}$, $\overset{(-)}{s}{}^{3\alpha}$ – тензори поверхні S, а $\overset{(+)}{s}{}^{33}$, $\overset{(-)}{s}{}^{33}$ – це скаляри поверхні S. Як уже було сказано вище, $b_{\alpha\beta}$, b_{α}^{β} є коваріантними та змішаними компонентами тензора поверхні S. Виходячи з головних властивостей тензорів, робимо висновок, що рівняння (53) записані в тензорній формі, справедливій відносно довільної системи координат з S-сім'ї.

Тепер порівняємо отримані формули з формулами (21). Очевидно, що рівняння відносно моментів компонент тензора напружень, отримані за допомогою інтегрування правої частини формули (21), на відміну від рівнянь (53), міститимуть зайві доданки $-b_{\alpha}^{\beta}\overset{(k)}{s}{}^{3\alpha}$, $-2H\overset{(k)}{s}{}^{3\beta}$ та $-2H\overset{(k)}{s}{}^{33}$. Отримати спрощення виявилось можливим саме завдяки поданню системи рівнянь рівноваги у векторній формі.

Формули (41) (відповідно (36)) допоможуть нам знайти

$$\overset{(k)}{s}{}^{ij} \approx \frac{2k+1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} \dot{s}^{ij} P_k\left(\frac{x^3}{h}\right) dx^3$$

$$\left(\text{відповідно } \overset{(k)}{\mathbf{s}}{}^{i} \approx \frac{2k+1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} \dot{\mathbf{s}}^{i} P_k\left(\frac{x^3}{h}\right) dx^3\right).$$

$\dot{s}^{ij}$ є S-тензором, а моменти фіксованого порядку всіх компонент S-тензора, отриманого за допомогою звуження деякого S-тензора, складають тензор поверхні S. Цей факт і формули (42) (відповідно формули (37)) показують, що отримані наближені вирази для $\overset{(k)}{s}{}^{ij}$ (відповідно для $\overset{(k)}{\mathbf{s}}{}^{i}$) можна використовувати замість них у рівняннях (53) (відповідно в рівнянні (52)). Моменти функцій $\dot{\sigma}^{ij}$ (відповідно вектор-функцій $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{i}$) можна виразити за допомогою формул (38) (відповідно (34)) і (49) через моменти $\dot{e}_{ij}$, а ті, у свою чергу, за допомогою формул (28) (відповідно (22)) і (49) через $\overset{(k)}{U}_{i}$ та $\overset{(k)}{U}{}^{i}$ (відповідно через $\overset{(k)}{\mathbf{u}}$). Таким чином, можна отримати систему рівнянь відносно моментів компонент вектора переміщень (відповідно моментів вектора переміщень) нескінченного порядку, використовуючи правила коваріантного диференціювання суми, різниці та добутку тензорів [3, с. 127–129]. При цьому вважатимемо, що описані вище ряди за поліномами Лежандра мають властивості, які дозволяють використовувати їх замість їхніх сум у формулах (28), (38) і (53) (відповідно у формулах (22), (34) і (52)) у процесі визначення виразів для моментів. Достатньою умовою цього є абсолютна збіжність цих рядів і рядів, складених з коваріантних похідних членів цих рядів [7, с. 3–30]. Перехід до скінченних відрізків рядів і систем буде розглянуто в наступних роботах.

1. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. – Москва: Высш. школа, 1976. – 272 с.
2. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – Москва: Наука, 1982. – 288 с.
3. *Векуа И. Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. – Москва: Наука, 1978. – 296 с.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1950. – 300 с.
5. *Марчук М. В., Тучапський Р. І.* Система основних рівнянь нелінійної теорії пружності у векторній формі // Конф. молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача. – Львів, 2005. – С. 39–40.
6. *Погорелов В. И.* Строительная механика тонкостенных конструкций. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2007. – 528 с.
7. *Шкіль М. І.* Математичний аналіз: В 2 ч. – Київ: Вища шк., 1995. – Ч. II. – 510 с.

СИСТЕМА ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТОНКИХ И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Обобщен подход, предложенный Векуа для изотропных линейно-упругих оболочек. Приведена система уравнений равновесия, соотношений упругости и нелинейных геометрических зависимостей для тела с криволинейной анизотропией в тензорной и векторной формах и ее приближенный аналог тоже в тензорной и векторной формах для тонких и пологих оболочек постоянной толщины относительно координатной системы, нормально связанной со срединной поверхностью оболочки. Рассмотрено 4 вида разных операторов ковариантного дифференцирования. Получены уравнения равновесия оболочек относительно моментов разложения составных и компонент тензора напряжений по полиномам Лежандра.

SYSTEM OF BASIC EQUATIONS OF NON-LINEAR ELASTICITY THEORY FOR THIN AND SHALLOW SHELLS

An approach offered by Vekua for isotropic linearly-elastic shells is generalized. The system of equilibrium equations, relations of elasticity and non-linear geometric dependences for a body with curvilinear anisotropy in the tensor and vector forms and its approximate analogue too in the tensor and vector forms for thin and shallow shells of constant value of width concerning a coordinate system normally dependent with the median surface of the shell are proposed. Four sorts of different covariant derivation operators are surveyed. The equilibrium equations for shells concerning the moments of decomposition of the composite and components of the stress tensor on the Legendre polynomials are obtained.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.07.06