УДК 539.3

В. В. Михаськів[1], І. Я. Жбадинський[1], О. І. Степанюк[2]

ВИКОРИСТАННЯ ПОТЕНЦІАЛІВ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ОПИСУ ХВИЛЬОВОГО ПОЛЯ ВІД ДИНАМІЧНОГО РОЗКРИТТЯ МНОЖИННИХ ТРІЩИН У БІМАТЕРІАЛІ

На основі властивостей потенціалів Гельмгольца отримано подання вектора переміщень у тривимірному пружному біматеріалі з гармонічно осцилюючими тріщинами, яке тотожно задовольняє умови ідеального контакту на міжфазній поверхні (аналог функції Ґріна).

У тривимірних динамічних задачах теорії пружності для шаруватих композитів з тріщинами граничні умови контакту складових тіла задаються по безмежних областях, що ускладнює числовий аналіз. Шляхом залучення у розв'язках потенціалів Гельмгольца вказані умови переформулювали у вигляді інтегральних рівнянь типу згортки. Нижче як результат обернення цих рівнянь отримано аналітичні формули зв'язку між переміщеннями як відбитих, так і заломлених на міжфазній поверхні хвиль та визначеними в обмежених областях функціями гармонічного розкриття тріщин.

Розглянемо композит із двох ідеально з'єднаних пружних півпросторів A і B з модулями зсуву G^A, G^B, коефіцієнтами Пуассона ν^A, ν^B і густинами ρ^A, ρ^B відповідно. Нехай півпростір D $(D = A, B)$ містить M^D плоских довільно орієнтованих тріщин, які не лежать на міжфазній поверхні S^0. Тріщини моделюються гармонічним у часі t вектором стрибка переміщень їх поверхонь $\Delta\mathbf{u}^{(n)D}(\mathbf{x}^{(n)D}, t) = \Delta\mathbf{u}^{(n)D}(\mathbf{x}^{(n)D})\exp(-i\omega t)$, $n = 1, 2, \ldots, M^D$, $D = A, B$ [4], де ω – циклічна частота, $\Delta\mathbf{u}^{(n)D}$ – вектор амплітуди стрибка переміщень протилежних поверхонь n-ї тріщини півпростору D. В такому випадку часовий множник $\exp(-i\omega t)$ вилучається з розв'язку, що дозволяє звести задачу до пошуку амплітуд актуальних величин.

Для спрощення математичного запису умов контакту півпросторів пов'яжемо з кожною тріщиною локальну декартову систему координат $O^{(n)D}x_1^{(n)D}x_2^{(n)D}x_3^{(n)D}$, $n = 1, 2, \ldots, M^D$, $D = A, B$, так, щоб область тріщин $S^{(n)D}$ містилась у координатній площині $x_3^{(n)D} = 0$. Базову систему координат $O^{(0)}x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_3^{(0)}$ зв'яжемо з поверхнею поділу матеріалів $S^{(0)}$ таким чином, щоб півпросторові A відповідали значення $x_3^{(0)} > 0$, а півпростору B – значення $x_3^{(0)} < 0$.

У базовій системі координат умови ідеального механічного контакту півпросторів будуть:

$$u_j^A(\mathbf{x}^{(0)}) = u_j^B(\mathbf{x}^{(0)}), \qquad \sigma_{j3}^A(\mathbf{x}^{(0)}) = \sigma_{j3}^B(\mathbf{x}^{(0)}),$$
$$j = 1, 2, 3, \qquad \mathbf{x}^{(0)} \in S^{(0)}, \tag{1}$$

де $\mathbf{x}^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ – радіус вектор точки тіла в системі координат $O^{(0)}x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_3^{(0)}$; u_j^D, σ_{j3}^D, $j = 1, 2, 3$, – компоненти вектора переміщень і відповідного тензора напружень у матеріалі D.

Щоб задовольнити умови контакту півпросторів, вектори пружного переміщення у біматеріалі задамо у формі суперпозиції:

$$\mathbf{u}^D = \nabla\varphi^D + \nabla \times \boldsymbol{\psi}^D + \sum_{n=1}^{M^D} \mathbf{u}^{(n)D}, \qquad D = A, B. \tag{2}$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007. – 50, № 3. – С. 154-159.

У рівняннях (2) складова $\mathbf{u}^{(n)D}$ забезпечує розрив переміщень в області $S^{(n)D}$, тобто описує рафіноване хвильове поле, зумовлене динамічним розкриттям n-ї тріщини у півпросторі D. Скалярні потенціали φ^A, φ^B поздовжніх хвиль і векторні потенціали $\boldsymbol{\psi}^A(\psi_1^A, \psi_2^A, \psi_3^A)$, $\boldsymbol{\psi}^B(\psi_1^B, \psi_2^B, \psi_3^B)$ поперечних хвиль використовуються для тотожного задоволення умов ідеального механічного контакту (1).

Із фізичної інтерпретації переміщення $\mathbf{u}^{(n)D}$ випливає, що інтегральні зображення його компонент $u_j^{(n)D}$ і відповідних напружень $\sigma_{ij}^{(n)D}$, $j = 1,2,3$, такі ж, як для безмежного однорідного тіла з тріщиною, що характеризується механічними сталими матеріалу D. За просторового розкриття тріщини матимемо [4]

$$u_j^{(n)D}(\mathbf{x}^{(n)D}) = \sum_{r=1}^{3}\sum_{q=1}^{2} \mathbf{P}_{jrqD}^{\mathbf{x}^{(n)D}} \left[\iint_{S^{(n)D}} \Delta u_r^{(n)D}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\exp\left(i\omega_{qD} \left|\mathbf{x}^{(n)D} - \boldsymbol{\xi}\right|\right)}{\left|\mathbf{x}^{(n)D} - \boldsymbol{\xi}\right|} dS_{\boldsymbol{\xi}} \right],$$

$$j = 1,2,3, \qquad n = 1,2,\ldots,M^D, \qquad D = A,B, \tag{3}$$

де $\omega_{1D} = \omega / c_1^D$, $\omega_{2D} = \omega / c_2^D$ – хвильові числа; c_1^D і c_2^D – швидкості поширення в матеріалі D поздовжніх і поперечних хвиль відповідно; $\left|\mathbf{x}^{(n)D} - \boldsymbol{\xi}\right|$ – відстань між актуальною точкою $\mathbf{x}^{(n)D}$ півпростору D і точкою інтегрування $\boldsymbol{\xi}$; $\Delta u_r^{(n)D}(\mathbf{x}^{(n)D})$, $r = 1,2,3$, – компоненти вектора стрибка переміщень протилежних поверхонь n-ї тріщини півпростору D; δ_{ij} – символ Кронекера; $\mathbf{P}_{jrqD}^{\mathbf{x}}$ – диференціальні оператори:

$$\mathbf{P}_{j11D}^{\mathbf{x}} = -\frac{2}{\omega_{2D}^2} \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_1 \partial x_3}, \qquad \mathbf{P}_{j12D}^{\mathbf{x}} = \delta_{j1} \frac{\partial}{\partial x_3} + \delta_{j3} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{2}{\omega_{2D}^2} \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_1 \partial x_3},$$

$$\mathbf{P}_{j21D}^{\mathbf{x}} = -\frac{2}{\omega_{2D}^2} \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_2 \partial x_3}, \qquad \mathbf{P}_{j22D}^{\mathbf{x}} = \delta_{j2} \frac{\partial}{\partial x_3} + \delta_{j3} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{2}{\omega_{2D}^2} \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_2 \partial x_3},$$

$$\mathbf{P}_{j31D}^{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[1 + \frac{2}{\omega_{2D}^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \right],$$

$$\mathbf{P}_{j32D}^{\mathbf{x}} = -2 \left[\delta_{j1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \delta_{j2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{\omega_{2D}^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \right], \qquad j = 1,2,3.$$

Функції φ^A, $\boldsymbol{\psi}^A$, φ^B, $\boldsymbol{\psi}^B$, що входять у співвідношення (2), вибираємо у вигляді потенціалів Гельмгольца з густинами α_j:

$$\varphi^{\left\{ A \atop B \right\}}(\mathbf{x}^{(0)}) = \frac{\partial}{\partial x_3^{(0)}} \iint_{S^0} \alpha_{\left\{ 1 \atop 4 \right\}}(\boldsymbol{\eta}) \frac{\exp\left(i\omega_{1\left\{ A \atop B \right\}} \left|\mathbf{x}^{(0)} - \boldsymbol{\eta}\right| \right)}{\left|\mathbf{x}^{(0)} - \boldsymbol{\eta}\right|} dS_{\boldsymbol{\eta}},$$

$$\psi_j^{\left\{ A \atop B \right\}}(\mathbf{x}^{(0)}) = \frac{\partial}{\partial x_3^{(0)}} \iint_{S^0} \alpha_{\left\{ 1+j \atop 4+j \right\}}(\boldsymbol{\eta}) \frac{\exp\left(i\omega_{2\left\{ A \atop B \right\}} \left|\mathbf{x}^{(0)} - \boldsymbol{\eta}\right| \right)}{\left|\mathbf{x}^{(0)} - \boldsymbol{\eta}\right|} dS_{\boldsymbol{\eta}}, \qquad j = 1,2,$$

$$\psi_3^{\left\{ A \atop B \right\}}(\mathbf{x}^{(0)}) = 0. \tag{4}$$

Слід зазначити, що потенціали (4) тотожно задовольняють рівняння Гельмгольца, умови випромінювання на безмежності, а їх граничні значення на поверхні $S^{(0)}$ є такими [1]:

$$\lim_{x_3^{(0)}\to+0}\varphi^A(\mathbf{x}^{(0)}) = -2\pi\alpha_1(\mathbf{x}^{(0)}), \qquad \lim_{x_3^{(0)}\to+0}\psi_j^A(\mathbf{x}^{(0)}) = -2\pi\alpha_{1+j}(\mathbf{x}^{(0)}),$$

$$\lim_{x_3^{(0)}\to-0}\varphi^B(\mathbf{x}^{(0)}) = 2\pi\alpha_4(\mathbf{x}^{(0)}), \qquad \lim_{x_3^{(0)}\to-0}\psi_j^B(\mathbf{x}^{(0)}) = 2\pi\alpha_{4+j}(\mathbf{x}^{(0)}),$$

$$j = 1, 2. \tag{5}$$

Задовольняючи поданнями (2)–(4) з урахуванням властивостей (5) контактні умови (1), одержимо систему інтегральних рівнянь другого роду відносно густин α_j:

$$\sum_{n=1}^{6}\Lambda_{jn}^{\mathbf{x}^{(0)}}\left(\alpha_n(\mathbf{x}^{(0)})\right) + \sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}\left\{\Phi_{jnk}^{\mathbf{x}^{(0)}}\left[\iint_{S^0}\alpha_n(\boldsymbol{\eta})\frac{\exp\left(i\omega_{kA}\left|\mathbf{x}^{(0)}-\boldsymbol{\eta}\right|\right)}{\left|\mathbf{x}^{(0)}-\boldsymbol{\eta}\right|}dS_{\boldsymbol{\eta}}\right] + \right.$$

$$\left. +\Phi_{j(3+n)k}^{\mathbf{x}^{(0)}}\left[\iint_{S^0}\alpha_{3+n}(\boldsymbol{\eta})\frac{\exp\left(i\omega_{kB}\left|\mathbf{x}^{(0)}-\boldsymbol{\eta}\right|\right)}{\left|\mathbf{x}^{(0)}-\boldsymbol{\eta}\right|}dS_{\boldsymbol{\eta}}\right]\right\} = p_j(\mathbf{x}^{(0)}),$$

$$\mathbf{x}^{(0)} \in S^0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 6, \tag{6}$$

де стрибки переміщень $\Delta u_r^{(n)D}$, $r = 1, 2, 3$, $n = 1, 2, \ldots, M^D$, $D = A, B$, містяться у правих частинах:

$$p_j(\mathbf{x}^{(0)}) = \sum_{k=1}^{M^A}\sum_{r=1}^{3}\sum_{q=1}^{2}\mathbf{Q}_{jrqA}^{\mathbf{x}^{(k0)A}}\left[\iint_{S^{(k)A}}\Delta u_r^{(k)A}(\boldsymbol{\xi})\frac{\exp\left(i\omega_{qA}\left|\mathbf{x}^{(k0)A}-\boldsymbol{\xi}\right|\right)}{\left|\mathbf{x}^{(k0)A}-\boldsymbol{\xi}\right|}dS_{\boldsymbol{\xi}}\right] -$$

$$-\sum_{k=1}^{M^B}\sum_{r=1}^{3}\sum_{q=1}^{2}\mathbf{Q}_{jrqB}^{\mathbf{x}^{(k0)B}}\left[\iint_{S^{(k)B}}\Delta u_r^{(k)B}(\boldsymbol{\xi})\frac{\exp\left(i\omega_{qB}\left|\mathbf{x}^{(k0)B}-\boldsymbol{\xi}\right|\right)}{\left|\mathbf{x}^{(k0)B}-\boldsymbol{\xi}\right|}dS_{\boldsymbol{\xi}}\right].$$

Тут

$$\mathbf{Q}_{jr1D}^{\mathbf{x}} =$$

$$= \left[\delta_{r3}\frac{\nu^D}{1-\nu^D} - \frac{2}{\omega_{2A}^2}\frac{\partial^2}{\partial x_r\partial x_3}\right]\left(\ell_j^{(k0)D}\frac{\partial}{\partial x_1} + m_j^{(k0)D}\frac{\partial}{\partial x_2} + p_j^{(k0)D}\frac{\partial}{\partial x_3}\right),$$

$$\mathbf{Q}_{jr2D}^{\mathbf{x}} =$$

$$= \left[-\delta_{r3}\frac{1}{1-\nu^D} + \frac{2}{\omega_{2A}^2}\frac{\partial^2}{\partial x_r\partial x_3}\right]\left(\ell_j^{(k0)D}\frac{\partial}{\partial x_1} + m_j^{(k0)D}\frac{\partial}{\partial x_2} + p_j^{(k0)D}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) +$$

$$+ \delta_{r1}\left(\ell_j^{(k0)D}\frac{\partial}{\partial x_3} + p_j^{(k0)D}\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \delta_{r2}\left(m_j^{(k0)D}\frac{\partial}{\partial x_3} + p_j^{(k0)D}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) +$$

$$+ 2\delta_{r3}p_j^{(k0)D}\frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad r = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{Q}_{(3+j)r1D}^{\mathbf{x}} =$$

$$= \left[\frac{\nu^D}{2(1-\nu^D)}\delta_{3r}\omega_{2D}^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_r\partial x_3}\right]\left[\frac{\nu^D}{2(1-\nu^D)}\delta_{3j}\omega_{2D}^2 + \ell_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \right.$$

$$+ m_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + p_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \tilde{\ell}_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} + \tilde{m}_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} +$$

$$\left. + \tilde{p}_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\right], \qquad r = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{Q}^{\mathbf{x}}_{(3+j)32D} =$$

$$= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \omega_{2D}^2\right)\left[\ell_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + m_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + p_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \right.$$

$$\left. + \tilde{\ell}_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \tilde{m}_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} + \tilde{p}_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\right] +$$

$$+ \frac{\omega_{2D}^2}{2}\left[2p_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \tilde{m}_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} + \tilde{p}_{j3}^{(k0)D}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\right],$$

$$\mathbf{Q}^{\mathbf{x}}_{(3+j)r2D} =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{3\omega_{2D}^2}{4}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_{(3-r)}^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\omega_{2D}^2}{2}\right)^2\right]\left(\delta_{1r}\tilde{p}_{j3}^{(k0)D} + \right.$$

$$\left. + \delta_{2r}\tilde{m}_{j3}^{(k0)D}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{3\omega_{2D}^2}{4}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\delta_{2r}\tilde{p}_{j3}^{(k0)D} + \delta_{1r}\tilde{m}_{j3}^{(k0)D}\right) +$$

$$+ \tilde{\ell}_{j3}^{(k0)D}\left(\frac{\omega_{2D}^2}{4} + \frac{\partial^2}{\partial x_r^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_{(3-r)}\partial x_3} + \left[\ell_{j3}^{(k0)D}\left(\delta_{1r}\frac{\omega_{2D}^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) + \right.$$

$$\left. + m_{j3}^{(k0)D}\left(\delta_{2r}\frac{\omega_{2D}^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + p_{j3}^{(k0)D}\left(\frac{\omega_{2D}^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x_3},$$

$$r = 1,2, \qquad j = 1,2,3,$$

$$\mathbf{x}^{(k0)D}\left(x_1^{(k0)D}, x_2^{(k0)D}, x_3^{(k0)D}\right) = \mathbf{O}^{(k)D}\mathbf{O}^{(0)} + \mathbf{x}^{(0)}, \qquad \mathbf{x}^{(0)} \in S^{(0)}, \qquad j = 1,2,3,$$

$$\ell_{j3}^{(k0)D} = \ell_j^{(k0)D}\ell_3^{(k0)D}, \qquad m_{j3}^{(k0)D} = m_j^{(k0)D}m_3^{(k0)D}, \qquad p_{j3}^{(k0)D} = p_j^{(k0)D}p_3^{(k0)D},$$

$$\tilde{\ell}_{j3}^{(k0)D} = \ell_j^{(k0)D}m_3^{(k0)D} + m_j^{(k0)D}\ell_3^{(k0)D}, \qquad \tilde{m}_{j3}^{(k0)D} = m_j^{(k0)D}p_3^{(k0)D} + p_j^{(k0)D}m_3^{(k0)D},$$

$$\tilde{p}_{j3}^{(k0)D} = p_j^{(k0)D}\ell_3^{(k0)D} + \ell_j^{(k0)D}p_3^{(k0)D},$$

$\mathbf{O}^{(k)D}\mathbf{O}^{(0)}$ – вектор, що з'єднує центри k-ї та базової систем координат; $\ell_j^{(k0)D}$, $m_j^{(k0)D}$, $p_j^{(k0)D}$, $j = 1,2,3$, $D = A,B$, – напрямні косинуси осей k-ї системи координат у системі координат $O^{(0)}x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_3^{(0)}$; $\Lambda_{jn}^{\mathbf{x}}$ і $\Phi_{jnk}^{\mathbf{x}}$ – відомі диференціальні оператори [6].

Густини α_j визначаємо з рівнянь (6) шляхом застосування інтегрального перетворення Фур'є за координатами x_1, x_2 з наступним застосуванням при одержанні оригіналів теореми про згортку [7]. Таким чином, одержимо вирази для густин α_j, $j = 1,2,\ldots,6$, а далі з урахуванням співвідношень (4) – вирази для потенціалів відбитих $(\varphi^A, \boldsymbol{\psi}^A)$ і заломлених (φ^B, $\boldsymbol{\psi}^B$) на поверхні поділу матеріалів хвиль у формі

$$\begin{Bmatrix} \varphi^D(\mathbf{x}^{(0)}) \\ \psi_{k-1}^D(\mathbf{x}^{(0)}) \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_3^{(0)}}\sum_{j=1}^{6}\iint_{S^{(0)}}\frac{\exp\left(i\omega_{\left\{1 \atop 2\right\}D}\left|\mathbf{x}^{(0)} - \boldsymbol{\xi}\right|\right)}{\left|\mathbf{x}^{(0)} - \boldsymbol{\xi}\right|}\iint_{S^{(0)}} p_j(\boldsymbol{\eta})\int_0^\infty \frac{\tau}{F_{\mathrm{St}}(\tau)}\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{1j}^D \\ \mathbf{U}_{kj}^D \end{Bmatrix} \times$$

$$\times J_0\left(\tau\left|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}\right|\right)d\tau\, dS_{\boldsymbol{\eta}}\, dS_{\boldsymbol{\xi}}, \qquad k = 2,3, \qquad D = A,B. \qquad (7)$$

Тут $\mathbf{U}_{kj}^{D}$ – диференціальні оператори змінних η_1, η_2, що діють за законами:

$$\mathbf{U}_{11}^{A} = Gf_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_1}, \quad \mathbf{U}_{12}^{A} = Gf_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_2}, \quad \mathbf{U}_{13}^{A} = Gf_2(\tau), \quad \mathbf{U}_{14}^{A} = -2f_3(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_1},$$

$$\mathbf{U}_{15}^{A} = -2f_3(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_2}, \quad \mathbf{U}_{16}^{A} = -2f_4(\tau), \quad \mathbf{U}_{21}^{A} = -\mathbf{U}_{32}^{A} = \frac{Gf_5(\tau)}{V(\tau)V_2^A(\tau)}\frac{\partial^2}{\partial\eta_1\partial\eta_2},$$

$$\mathbf{U}_{22}^{A} = -\frac{G}{V(\tau)V_2^A(\tau)}\left[V_2^B(\tau)F_{\mathrm{St}}(\tau) - f_5(\tau)\frac{\partial^2}{\partial\eta_2^2}\right], \qquad \mathbf{U}_{23}^{A} = -Gf_6(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_2},$$

$$\mathbf{U}_{24}^{A} = -\mathbf{U}_{35}^{A} = \frac{2f_7(\tau)}{V(\tau)V_2^A(\tau)}\frac{\partial^2}{\partial\eta_1\partial\eta_2}, \qquad \mathbf{U}_{25}^{A} = \frac{2}{V(\tau)V_2^A(\tau)}\left[F_{\mathrm{St}}(\tau) + f_7(\tau)\frac{\partial^2}{\partial\eta_2^2}\right],$$

$$\mathbf{U}_{26}^{A} = -2f_8(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_2}, \qquad \mathbf{U}_{31}^{A} = \frac{G}{V(\tau)V_2^A(\tau)}\left[V_2^B(\tau)F_{\mathrm{St}}(\tau) - f_5(\tau)\frac{\partial^2}{\partial\eta_1^2}\right],$$

$$\mathbf{U}_{33}^{A} = Gf_6(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_1}, \qquad \mathbf{U}_{34}^{A} = -\frac{2}{V(\tau)V_2^A(\tau)}\left[F_{St}(\tau) + f_7(\tau)\frac{\partial^2}{\partial\eta_1^2}\right],$$

$$\mathbf{U}_{36}^{A} = 2f_8(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_1}, \quad \mathbf{U}_{11}^{B} = f_9(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_1}, \quad \mathbf{U}_{12}^{B} = f_9(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_2}, \quad \mathbf{U}_{13}^{B} = f_{10}(\tau),$$

$$\mathbf{U}_{14}^{B} = -\,2f_{11}(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_1}, \quad \mathbf{U}_{15}^{B} = -\,2f_{11}(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_2}, \quad \mathbf{U}_{16}^{B} = -\,2f_{12}(\tau),$$

$$\mathbf{U}_{21}^{B} = -\,\mathbf{U}_{32}^{B} = -\frac{f_{13}(\tau)}{V(\tau)V_2^B(\tau)}\frac{\partial^2}{\partial\eta_1\partial\eta_2},$$

$$\mathbf{U}_{22}^{B} = \frac{1}{V(\tau)V_2^B(\tau)}\left[V_2^A(\tau)F_{\mathrm{St}}(\tau) - f_{13}(\tau)\frac{\partial^2}{\partial\eta_2^2}\right],$$

$$\mathbf{U}_{23}^{B} = -f_{14}(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_2}, \qquad \mathbf{U}_{24}^{B} = -\,\mathbf{U}_{35}^{B} = -\frac{2f_{15}(\tau)}{V(\tau)V_2^B(\tau)}\frac{\partial^2}{\partial\eta_1\partial\eta_2},$$

$$\mathbf{U}_{25}^{B} = \frac{2}{V(\tau)V_2^B(\tau)}\left[F_{St}(\tau) - f_{15}(\tau)\frac{\partial^2}{\partial\eta_2^2}\right], \qquad \mathbf{U}_{26}^{B} = 2f_{16}(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_2},$$

$$\mathbf{U}_{31}^{B} = -\frac{1}{V(\tau)V_2^B(\tau)}\left[V_2^A(\tau)F_{St}(\tau) - f_{13}(\tau)\frac{\partial^2}{\partial\eta_1^2}\right], \quad \mathbf{U}_{33}^{B} = f_{14}(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_1},$$

$$\mathbf{U}_{34}^{B} = -\frac{2}{V(\tau)V_2^B(\tau)}\left[F_{\mathrm{St}}(\tau) - f_{15}(\tau)\frac{\partial^2}{\partial\eta_1^2}\right], \qquad \mathbf{U}_{36}^{B} = -2f_{16}(\tau)\frac{\partial}{\partial\eta_1},$$

$$V(\tau) = V_2^A(\tau) + GV_2^B(\tau), \qquad G = \frac{G^B}{G^A},$$

$$V_j^D(\tau) = \sqrt{\tau^2 - \omega_{jD}^2} = \begin{cases} \left|\sqrt{\tau^2 - \omega_{jD}^2}\right|, & \tau \ge \omega_{jD}, \\ -i\left|\sqrt{\omega_{jD}^2 - \tau^2}\right|, & \tau < \omega_{jD}, \end{cases} \qquad D = A, B.$$

Функції $f_j(\tau)$, $j = 1, 2, \ldots, 16$, наведено у роботі [6]; $J_0(\tau r)$ – функція Бесселя нульового порядку; $F_{\mathrm{St}}(\tau)$ – функція Стоунлі [6].

Аналітичне визначення двовимірних інтегралів по області S^0 у поданні (7) проводимо за схемою роботи [5] з використанням табличних інтегралів [2]:

$$\int_0^\infty x \frac{\exp\left(-p\sqrt{x^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+z^2}} J_0(cx)\,dx = \frac{\exp\left(-z\sqrt{p^2+c^2}\right)}{\sqrt{p^2+c^2}},$$

$$\int_0^{2\pi} J_0\left(x\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\beta}\right)d\beta = 2\pi J_0(ax)J_0(bx).$$

Безмежний інтеграл за змінною τ з огляду на спадання підінтегральної функції при $\tau \to \infty$ береться чисельно шляхом заміни верхньої межі інтегрування скінченною. Тоді у формулі (7) залишаться інтеграли лише по областях, що займають тріщини.

Виведене співвідношення (7) між переміщеннями відбитих і заломлених на міжфазній поверхні хвиль та амплітудами підповерхневих джерел збурень важливі з точки зору гранично-інтегрального формулювання аналогічних задач для такого ж композиту під час задання навантажень на поверхнях тріщин, оскільки воно дозволяє перейти до інтегральних рівнянь виключно стосовно функцій динамічного розкриття тріщин. Зокрема, такий підхід використано в роботі про взаємодію двох компланарних тріщин по один бік від міжфазної поверхні [3].

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
2. *Градштейн И. С. Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.
3. *Жбадинський І. Я., Михаськів В. В., Степанюк О. І.* Задача усталеного деформування тривимірного кусково-однорідного тіла з компланарними тріщинами // Акуст. вісн. – 2003. – **6**, № 4. – С. 27–32.
4. *Михаськив В. В.* Моделирование трехмерного нестационарного взаимодействия трещин в упругом теле при помощи функций их раскрытия // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 1. – С. 83–92.
5. *Станкевич В. З.* Обчислення деяких двовимірних інтегралів, характерних для динамічних задач теорії тріщин у півбезмежному тілі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1995. – Вип. 38. – С. 56–61.
6. *Mykhas'kiv V. V., Stepanyuk O. I.* Boundary integral analysis of the symmetric dynamic problem for an infinite bimaterial solid with an embedded crack // Meccanica. – 2001. – **36**, No. 4. – P. 479–495.
7. *Sneddon I. N.* Fourier transforms. – New York: McGraw-Hill, 1951. – 542 p.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ПРИ ОПИСАНИИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ОТ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСКРЫТИЯ МНОЖЕСТВЕННЫХ ТРЕЩИН В БИМАТЕРИАЛЕ

На основании свойств потенциалов Гельмгольца получено представление вектора перемещений в трехмерном упругом биматериале с гармонически осциллирующими трещинами, которое тождественно удовлетворяет условиям идеального контакта на межфазной поверхности (аналог функции Грина).

USING OF HELMHOLTZ POTENTIALS FOR DESCRIPTION OF WAVE FIELD DUE TO DYNAMIC MULTIPLE CRACKS OPENING IN BIMATERIAL

On the base of Helmholtz potentials properties the representations for the displacements in 3D elastic bimaterial with the time-harmonic opening cracks, which satisfy identically the ideal contact conditions on the interface, are obtained (Green's function analogue).

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

[2] Львів. нац. акад. ветеринарної медицини ім. С. З. Гжицького, Львів

Одержано 01.03.07