

## ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ НЕОДНОРІДНОЇ ЗА ТОВЩИНОЮ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТРІЩИНАМИ

*Задача про напружений стан і граничну рівновагу неоднорідної за товщиною пружнопластичної циліндричної оболонки з двома наскрізними тріщинами, розміщеними вздовж твірної, зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь з невідомими границями інтегрування. Запропоновано алгоритм, що передбачає сумісне розв'язування отриманої системи з умовами обмеженості напружень біля тріщин та умовами пластичності тонких оболонок. Як приклад, розглянуто оболонку, виготовлену з функціонально градієнтного матеріалу.*

Оболонкові елементи конструкцій часто працюють в умовах, коли їх зовнішня і внутрішня поверхні контактують з середовищами (деколи агресивними), які мають неоднакові фізико-хімічні властивості. У таких випадках поверхні оболонки захищають різними покриттями або виготовляють її з шаруватих структур чи функціонально градієнтних матеріалів (ФГМ), тобто композитних матеріалів мікроскопічної неоднорідності з неперервно змінними механічними властивостями за товщиною стінки елемента конструкції. Почали створювати ФГМ для космічних кораблів як матеріали, що витримують надвисокі температури. З часом такі матеріали набули широкого застосування, що зумовило необхідність проводити не лише температурний аналіз, а й досліджувати їх напружено-деформований стан, міцність тощо. У роботі [11] вперше розв'язано задачу про нерівномірний розподіл температури та зумовлених нею напружень у пластині, виготовленій з ФГМ. Результати досліджень розподілу напружень у циліндричній і сферичній оболонках, а також у порожнистому циліндрі з ФГМ, зумовлених температурою чи силовим навантаженням, наведені в [9, 10, 12, 14]. У роботі [3] досліджено вплив механічних параметрів ФГМ на граничну рівновагу циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною. У запропонованій роботі проведено такі дослідження для циліндричної оболонки з двома тріщинами.

**Постановка задачі.** Розглянемо віднесену до триортогональної системи координат  $\alpha, \beta, \gamma$  виготовлену з ФГМ безмежну кругову циліндричну оболонку, послаблену двома колінеарними тріщинами однакової довжини  $2\ell_0$ , розміщеними вздовж твірної. Початок координат  $\alpha = 0, \beta = 0$  помістимо в центрі відрізка серединної поверхні оболонки, що з'єднує ближні вершини тріщин. Його довжину позначимо  $2\ell_d$ . Береги тріщин і оболонка завантажені так, що напружено-деформований стан оболонки симетричний відносно ліній  $\alpha = 0$  та  $\beta = 0$ . Під час деформації береги тріщин не контактують. Розміри тріщин, рівень зовнішнього навантаження та властивості ФГМ вважаємо такими, що на продовженні тріщин по всій товщині оболонки вузькими смугами розвиваються пластичні деформації. Відповідно до аналога  $\delta_c$ -моделі [4] зони пластичних деформацій замінимо поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичних зон на пружний об'єм – невідомими зусиллями та моментами, що задовольняють відповідні умови пластичності тонких оболонок [8]. Позначимо довжину пластичних зон біля ближніх вершин тріщин через  $\ell_p$ , а їх реакцію відповідно через  $N^{(1)}$  та  $M^{(1)}$ . Аналогічні величини біля дальніх вершин позначимо через  $\ell^p$ ,  $N^{(2)}$  та  $M^{(2)}$ .

Таким чином, у рамках прийнятого аналога  $\delta_c$ -моделі пружнопластичну задачу про граничну рівновагу оболонки з тріщинами заданої довжини

$2\ell_0$  зведено до задачі про пружну рівновагу такої ж оболонки з фіктивними тріщинами невідомої довжини  $2\ell_1 = 2\ell_0 + \ell_p + \ell^p$ . На берегах, наприклад, правої фіктивної тріщини повинні виконуватись умови

$$\begin{aligned} N_2^+(\alpha, +0) &= N_2^-(\alpha, -0) = f_1(\alpha), \\ M_2^+(\alpha, +0) &= M_2^-(\alpha, -0) = f_2(\alpha), \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= \begin{cases} N^{(1)} - N_2^0, & \alpha_d - \alpha_p \leq \alpha \leq \alpha_d, \\ N_2^{(1)} - N_2^0, & \alpha_d \leq \alpha \leq \alpha_d + 2\alpha_0, \\ N^{(2)} - N_2^0, & \alpha_d + 2\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_d + \alpha_1; \end{cases} \\ f_2(\alpha) &= \begin{cases} M^{(1)} - M_2^0, & \alpha_d - \alpha_p \leq \alpha \leq \alpha_d, \\ M_2^{(1)} - M_2^0, & \alpha_d \leq \alpha \leq \alpha_d + 2\alpha_0, \\ M^{(2)} - M_2^0, & \alpha_d + 2\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_d + \alpha_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Тут  $N_2^{(1)}, M_2^{(1)}$  – зусилля і момент, прикладені до берегів реальної тріщини;  $N_2^0, M_2^0$  – ці ж параметри на лінії тріщини в суцільній оболонці, зумовлені зовнішнім навантаженням;  $\alpha_d = \ell_d/R$ ;  $\alpha_p = \ell_p/R$ ;  $\alpha_0 = \ell_0/R$ ;  $\alpha_1 = \ell_1/R$ ;  $R$  – радіус серединної поверхні оболонки.

**Основні співвідношення неоднорідних за товщиною оболонок з тріщинами.** В неоднорідних за товщиною оболонках модуль пружності та коефіцієнт Пуассона є функціями нормальній до серединної поверхні координати  $\gamma$ :

$$E = E(\gamma), \quad \nu = \nu(\gamma). \quad (2)$$

Залежності (2) такі, що характеристики матеріалу оболонки задовольняють узагальнений закон Гука та справджується гіпотеза недеформованих нормальних елементів [1]. Систему ключових рівнянь для такої оболонки з позовжніми тріщинами при заданих обмеженнях на навантаження можна записати у вигляді [6]

$$L_{ij}u_i = q_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Тут  $u_i$  – компоненти переміщення серединної поверхні оболонки

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad L_{12} = L_{21} = \left( C_{11} - C_{66} + \frac{K_{11}}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ L_{13} &= L_{31} = C_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{K_{11}}{R} \left( \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right), \\ L_{22} &= \left[ C_{11} + \frac{1}{R} \left( 2K_{11} - \frac{1}{R} D_{11} \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \left[ C_{66} + \frac{1}{R} \left( 2K_{66} + \frac{4}{R} D_{66} \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \\ L_{23} &= L_{32} = \left( C_{11} + \frac{K_{11}}{R} \right) \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{R} \left[ K_{11} + \frac{D_{12} + 4D_{66}}{R} \right] \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \\ &\quad - \frac{1}{R} \left( K_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \frac{\partial^3}{\partial \beta^3}, \\ L_{33} &= C_{11} - \frac{2}{R} \left( K_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + K_{11} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) + \frac{1}{R^2} D_{11} \nabla^2 \nabla^2, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \\ q_1 &= R \frac{\partial}{\partial \alpha} (C_{12} \varepsilon_{22}^0 + K_{12} x_{22}^0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_2 &= R \frac{\partial}{\partial \beta} (RC_{12} + K_{12})\varepsilon_{22}^0 + (RK_{11} + D_{11})\alpha_{22}^0, \\
q_3 &= R(C_{11}\varepsilon_{22}^0 + K_{11}\alpha_{22}^0) - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (K_{12}\varepsilon_{22}^0 + D_{12}\alpha_{22}^0) - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (K_{11}\varepsilon_{22}^0 + D_{11}\alpha_{22}^0), \\
\varepsilon_{22}^0 &= \frac{1}{R} [u_2(\alpha)] \delta(\beta), & \alpha_{22}^0 &= -\frac{1}{R} [\theta_2(\alpha)] \delta(\beta), \\
C_{ij} &= \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma) d\gamma, & K_{ij} &= \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma) \gamma d\gamma, & D_{ij} &= \int_{-h}^h B_{ij}(\gamma) \gamma^2 d\gamma, \\
B_{11}(\gamma) &= \frac{E}{1-\nu^2}, & B_{12}(\gamma) &= \nu B_{11}, & B_{66}(\gamma) &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (4)
\end{aligned}$$

$[u_2(\alpha)]$ ,  $[\theta_2(\alpha)]$  – стрибки переміщень і кута повороту, відмінні від нуля на відрізках, що відповідають фіктивним тріщинам, і тотожно дорівнюють нулеві поза ними.

Враховуючи співвідношення (4), а також той факт, що функції переміщень  $u_i(\alpha, \beta)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , при переході через тріщину мають стрибки, а функції зусиль і моментів неперервні, запишемо формули для визначення збуреного нормального зусилля  $N_2$  і згинного моменту  $M_2$  у довільній точці оболонки

$$\begin{aligned}
N_2 &= \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \left( C_{11} + \frac{K_{11}}{R} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{1}{R} \left[ C_{11} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{R} \left( K_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + K_{11} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \right] u_3 - \frac{1}{R} \left( C_{11} + \frac{K_{11}}{R} \right) \varepsilon_{22}^0, \\
M_2 &= \frac{K_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \left( K_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{1}{R} \left[ K_{11} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{R} \left( D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \right] u_3 - \frac{1}{R^2} d_{11} \varepsilon_{22}^0. \quad (5)
\end{aligned}$$

**Інтегральні рівняння задачі.** Розв'язуючи систему диференціальних рівнянь (3) операторним методом [7] і враховуючи (4), для визначення переміщень  $u_i$  отримуємо формули

$$u_i = L_i \varphi_2 + P_i \psi_2, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

де  $L_i, P_i$  – диференціальні оператори, не вище сьомого порядку [7], а функції  $\varphi_2(\alpha, \beta)$ ,  $\psi_2(\alpha, \beta)$  задовольняють рівняння

$$D\varphi_2 = \varepsilon_{22}^0, \quad D\psi_2 = \alpha_{22}^0, \quad (7)$$

$$D = D^0 + \frac{4R}{d_1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left[ (C_{11}K_{66} - C_{66}K_{11}) \nabla^2 \nabla^2 + RC_{66}(C_{11} - K_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right],$$

$$d_1 = C_{11} - K_{66}, \quad D^0 = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2.$$

На основі побудованого з допомогою інтегрального перетворення Фур'є фундаментального розв'язку рівнянь (7) [6], операції згортки та формул (5), (6) запишемо інтегральне представлення нормального зусилля  $N_2$  та згинного моменту  $M_2$ , перенісши початок координат у центр правої фіктивної тріщини:

$$\mu_i^*(\eta) = \sum_{j=1}^2 \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_j(\xi) \left[ \frac{a_{ij}}{\xi - \eta} + K_{ij}^*(\xi, \eta) \right] d\xi, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned}\mu_1^*(\eta) &= \frac{4\pi}{C_{11}(1-\mu^2)\sigma_T} N_2(\eta), & \mu_2^*(\eta) &= \frac{4\pi}{Ra^2 C_{11}(1-\mu^2)\sigma_T} M_2(\eta), \\ F_1(\xi) &= \frac{1}{R} \frac{d}{du} [u_2(\xi)], & F_2(\xi) &= a^2 \frac{d}{du} [\theta_2(\xi)], \\ \eta &= \alpha - \alpha_c, & \alpha_c &= \alpha_d + \alpha_1, & a^2 &= 3 - 2\eta_1 - \eta_1^2, \\ a_{11} &= \frac{1}{2}, & a_{12} = a_{21} &= c \frac{1}{16} (11 - 13v + v^2 + v^3), & a_{22} &= \frac{1}{2} (3 - 2v - v^2), \\ K_{ij}^*(\xi, \eta) &= \frac{a_{ij}}{\eta - 2\alpha_c} + K_{ij}(\xi - \eta) + K_{ij}(\xi + \eta + 2\alpha_c), \\ c^2 &= \frac{h^2}{3R^2 \sqrt{1-v^2}}, & \mu &= \frac{C_{12}}{C_{21}}, & \eta_1 &= \frac{D_{12}}{D_{21}},\end{aligned}$$

ядра  $K_{ij}(z)$  – регулярні в області  $\xi \in [-\alpha_1, \alpha_1]$  [4];  $2h$  – товщина оболонки.

Задовольнивши тепер граничні умови (1) на берегах обох тріщин, і врахувавши подання (8) після нескладних перетворень отримуємо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 F_j(t) \left[ \frac{a_{ij}}{t-s} + \alpha_1 K_{ij}^*(\alpha_1 t, \alpha_1 s) \right] dt = f_i^*(\alpha_1 s), \quad |s| < 1, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned}f_1^*(s) &= \frac{4\pi}{C_{11}(1-\mu^2)\sigma_T} f_1 \left( \frac{s + \alpha_c}{\alpha_1} \right), \\ f_2^*(s) &= \frac{4\pi}{Ra^2 C_{11}(1-\mu^2)\sigma_T} f_2 \left( \frac{s + \alpha_c}{\alpha_1} \right), & s &= \frac{\eta}{\alpha_1}, & t &= \frac{\xi}{\alpha_1},\end{aligned}$$

$\sigma_T$  – інтегральна характеристика порогу текучості неоднорідного за товщиною матеріалу.

Розв'язки системи сингулярних рівнянь (9) повинні задовольняти умови

$$\int_{-1}^1 F_j(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

які забезпечують неперервність переміщення  $u_2$  та кута повороту  $\theta_2$  у вершинах тріщин і впливають зі співвідношення (4).

Згідно з прийнятою моделлю в системі рівнянь (9) невідомими є границі інтегрування  $\alpha_1$  (невідомі розміри пластичних деформацій  $\ell_p$  та  $\ell^p$ ), а також зусилля  $N^{(1)}, N^{(2)}$  і моменти  $M^{(1)}, M^{(2)}$ , що відповідають реакції пластичних зон на пружний об'єм і задовольняють певну умову пластичності, наприклад, умову Треска у вигляді умови пластичного поверхневого шару

$$\frac{N^{(i)}}{2h\sigma_T} + 3 \frac{M^{(i)}}{2h^2\sigma_T} = 1, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

або умови пластичного шарніру [8]

$$\left( \frac{N^{(i)}}{2h\sigma_T} \right)^2 + \frac{|M^{(i)}|}{h^2\sigma_T} = 1, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Умови (11), (12) використовуємо для визначення довжини пластичних зон  $\ell_p$  та  $\ell^p$ . Для знаходження невідомих зусиль і моментів  $N^{(i)}, M^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , застосуємо умову обмеженості напружень біля вершин тріщин. Для цього достатньо, щоб відповідні коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів

дорівнювали нулеві:

$$K_N(\ell_1) = K_N(-\ell_1) = K_M(\ell_1) = K_M(-\ell_1) = 0. \quad (13)$$

Таким чином, задача про напружено-деформований стан неоднорідної за товщиною оболонки з двома поздовжніми тріщинами завдовжки  $\ell_1$  зводиться до сумісного розв'язання системи інтегральних рівнянь (9), умов (10), умов пластичності (11) або (12) та умов обмеженості напружень (13). Розв'язок системи (9) можна подати у вигляді інтерполяційних поліномів Лагранжа за чебишевськими вузлами та шукати його чисельно одним із варіантів методу механічних квадратур [2]. У зв'язку з цим зауважимо: функції  $f_i^*(s)$ , які знаходяться у правих частинах інтегральних рівнянь, мають розриви в точках, що відповідають вершинам реальних тріщин. Порівняння аналітичного розв'язку канонічних сингулярних інтегральних рівнянь (регулярна частина ядер дорівнює нулеві) з розривною правою частиною і відповідного розв'язку, отриманого методом механічних квадратур, показало, що використання прямого чисельного методу безпосередньо до систем типу (9) приводить до значних похибок розв'язку в точках розриву, де його поведінка є найбільш цікавою. Тому розв'язок системи (9) подамо у вигляді [4]

$$F_j(t) = h_j(t) + \psi_j(t), \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

Тут  $h_j(t)$  – розв'язок канонічної системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 a_{ij} \int_{-1}^1 \frac{h_j(t)}{t-s} dt = f_i^*(s), \quad |s| \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

який задовольняє умови

$$\int_{-1}^1 h_i(t) dt = 0. \quad (16)$$

Розв'язок системи (15) отримаємо на основі обернення інтеграла Коші, скориставшись формулою

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-t} d\tau = t(v_b - v_a) + \sqrt{1-b^2} - \sqrt{1-a^2} + \sqrt{1-t^2} \ln \left( \frac{\sin((v_a+v)/2) \sin((v_b-v)/2)}{\sin((v_b+v)/2) \sin((v_a-v)/2)} \right),$$

$$v = \arccos t, \quad v_a = \arccos a, \quad v_b = \arccos b.$$

Після деяких перетворень розв'язок системи (15) запишемо у вигляді

$$h_i(t) = \frac{1}{\Delta \pi^2 \sqrt{1-t^2}} \left[ \pi D_i^0 t - \sum_{j=1}^2 D_i^j Z_j(t) \right], \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

$$\text{де } D_i^0 = F_R^i(N_2^0, M_2^0), \quad D_i^j = F_R^i(N^{(j)}, M^{(j)}), \quad j = 1, 2,$$

$$F_R^i(X, Y) = b_{1i} \frac{X}{2h\sigma_T} + b_{2i} \frac{k^*}{h^2\sigma_T} Y, \quad b_{11} = a_{22}, \quad b_{12} = -a_{21}, \quad b_{22} = a_{11},$$

$$Z_j(t) = v^* t + (-1)^j q_j - \frac{1}{2} \sqrt{1-t^2} L^j(t), \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

$$L^j(t) = \ln \frac{1 - (-1)^j (\tau_j t - q_i \sqrt{1-t^2})}{1 - (-1)^j (\tau_j t + q_i \sqrt{1-t^2})}, \quad k^* = \frac{h}{2Rc},$$

$$q_i = \sqrt{1-\tau_i^2}, \quad v_j^* = \arccos \tau_j, \quad \tau_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_P}{\alpha_1}, \quad \tau_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha^P}{\alpha_1}.$$

Підставивши подання (14) у систему (9) і врахувавши (15), (16), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь вигляду (9) для визначення функцій  $\psi_j(t)$ . В отриманій системі праві частини – неперервні функції  $g_i$ , які з урахуванням (17) мають вигляд

$$g_i(s) = g_i^0(s) + \sum_{p=1}^{P_0} G_p g_i^{(p)}(s), \quad (18)$$

$$P_0 = 4, \quad G_1 = \frac{N^{(1)}}{2h}, \quad G_2 = k^* \frac{M^{(1)}}{h^2}, \quad G_3 = \frac{N^{(2)}}{2h}, \quad G_4 = k^* \frac{M^{(2)}}{h^2},$$

$$g_i^0 = k\pi \sum_{j=1}^2 D_j^0 \mathcal{G}_{ij}^0(s), \quad k = -\frac{\alpha_1}{\pi^2 \Delta},$$

$$g_i^{(p)} = -k\pi \sum_{j=1}^2 b_{pj} \mathcal{G}_{ij}^{(1)}(s), \quad p = 1, 2,$$

$$g_i^{(p)} = -k\pi \sum_{j=1}^2 b_{p-2,j} \mathcal{G}_{ij}^{(2)}(s), \quad p = 3, 4,$$

$$\mathcal{G}_{ij}^0(s) = \int_0^\pi K_{ij}^*(\alpha_1 \cos v, \alpha_1 s) \cos v \, dv,$$

$$\mathcal{G}_{ij}^{(n)}(s) = \int_0^\pi K_{ij}^*(\alpha_1 t, \alpha_1 s) Z_n(t) \, dt, \quad n = 1, 2.$$

Відповідно до (18) функції  $\psi_j(t)$  шукаємо у вигляді лінійної комбінації

$$\psi_j(t) = \psi_j^0(t) + \sum_{p=1}^4 G_p \psi_j^{(p)}(t).$$

Кожна пара  $\psi_j^{(p)}$ ,  $j = 1, 2$ , є розв'язком системи типу (9) з правою частиною  $g_j^p$  і задовольняє умови

$$\int_{-1}^1 \psi_j^{(p)}(t) \, dt = 0, \quad p = 0, 1, \dots, 4.$$

Розв'язок  $\psi_j^{(p)}$  будемо за допомогою методу механічних квадратур, описаного в [2]. Проінтегрувавши розв'язки системи (9), розкриття берегів тріщини в довільній її точці через відомі величини стрибків узагальнених переміщень знаходимо за формулою

$$\delta(t, \gamma) = [v(t)] + \gamma[\theta(t)], \quad |t| \leq 1, \quad \gamma \leq h.$$

**Числові результати.** Як приклад розглянуто нескінченну циліндричну оболонку, виготовлену з ФГМ, зовнішня поверхня якої виготовлена з алюмінію ( $E_{\text{ext}} = 70$  ГПа), а внутрішня – з германію ( $E_{\text{int}} = 151$  ГПа). За товщиною модуль пружності  $E(\gamma)$  змінюється за законом [13]

$$E(\gamma) = (E_{\text{ext}} - E_{\text{int}})V + E_{\text{int}}, \quad V = \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^m, \quad \xi = \frac{\gamma}{2h}, \quad (19)$$

а коефіцієнт Пуассона  $\nu(\gamma) = \text{const}$ .

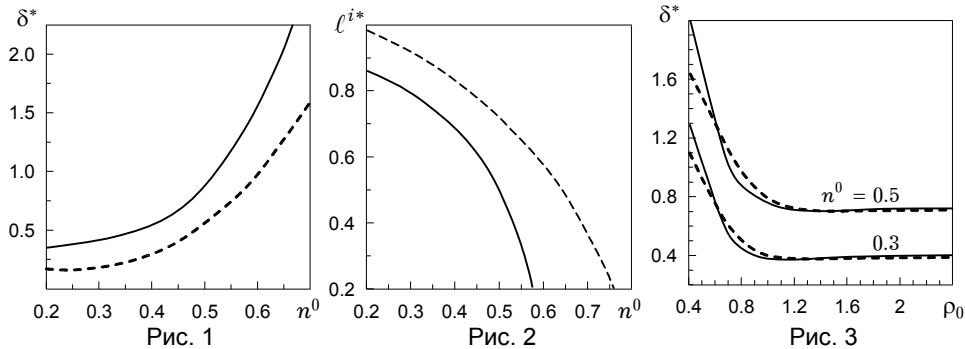
Числовий аналіз проведено для оболонки, що знаходиться під дією внутрішнього тиску інтенсивності  $p$ ,  $N_2^0 = Rp$ ,  $M_2^0 = 0$  за таких значень параметрів:  $h/R = 0.01$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $\ell_0/R = 0.2$ ;  $\ell_0/\ell_d = 1$ .

На рис. 1 показано залежність відносного розкриття вершин тріщин  $\delta^* = \delta(t, 0)E_{\text{int}}/(\ell_0 \sigma_T)$  від відносної інтенсивності внутрішнього тиску  $n^0 =$

$= Rp/(2h\sigma_T)$ . Суцільна лінія відповідає ближнім вершинам ( $t = \tau_1$ ), а штрихова – дальнім ( $t = \tau_2$ ). Розкриття тріщини визначали на серединній поверхні оболонки ( $\gamma = 0$ ). Числовий аналіз показав, що на зовнішній поверхні ( $\gamma = h$ ) воно більше в середньому на 8%, а на внутрішній ( $\gamma = -h$ ) – менше на 3%. При цьому якісна картина така ж, як на рис. 1.

На рис. 2 показано залежність відносних довжин пластичних зон  $\ell^{i*}$  біля ближніх,  $\ell^{1*} = \ell_0 / (\ell_0 + \ell_p)$ , і дальніх,  $\ell^{2*} = \ell_0 / (\ell_0 + \ell^p)$ , вершин тріщин від  $n^0$ . Суцільна лінія відповідає  $\ell_p^{1*}$ , а штрихова –  $\ell_p^{2*}$ .

Залежність відносного розкриття вершин тріщин  $\delta^*$  від відносної віддалі між ними  $\rho_0 = \ell_d / \ell_0$  для  $n^0 = 0.3$  і  $n^0 = 0.5$  показано на рис. 3. Суцільні лінії відповідають ближнім вершинам, а штрихові – дальнім. Взаємодія тріщин помітна для  $\rho_0 < 1.1$ . На відміну від однорідних оболонок [4], зменшення розкриття ближніх вершин тріщин на початку їх взаємодії майже відсутнє. Розкриття тріщин і довжини пластичних зон біля їх вершин визначали за виконання умов пластичності (11) або (12). В обох випадках результати відрізнялись не більше ніж на 4%. Дослідження проводили для різних значень  $m$  у поданні (19). Різниця між результатами  $m = 1$  та  $m = 2$  не більше 12%. З ростом  $m$  така різниця зменшується.



**Висновок.** Якщо за критерій руйнування вибрати критерій критичного розкриття вершини тріщини, то руйнування циліндричної оболонки з ФГМ почнеться біля ближніх вершин. Закон розподілу модуля пружності  $E(\gamma)$  за товщиною оболонки мало впливає на її граничний стан на відміну від відношення його граничних значень  $E_{\text{ext}} / E_{\text{int}}$ . Вибір умови пластичності (11) або (12) практично не впливає на розкриття тріщин і розміри пластичних зон біля їх вершин.

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. – Москва: Наука, 1973. – 304 с.
3. Кушнір Р., Николишин Т., Ростун М. Гранична рівновага виготовленої з функціонально градієнтного матеріалу циліндричної оболонки з поверхневою тріщиною // Машинознавство. – 2006. – № 5. – С. 3–7.
4. Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
5. Николишин М. М. Напряженное состояние многослойной цилиндрической оболочки с системой параллельных разрезов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – Вып. 22. – С. 85–89.
6. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
7. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.

8. Прагер В. Проблемы теории пластичности. – Москва: Физматгиз, 1958. – 136 с.
9. Kim K. S., Noda N. A. Green's function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material // Acta Mech. – 2002. – **156**. – P. 145–161.
10. Kim K. S., Noda N. A. Green's function approach to the deflection of a FGM plate under transient thermal loading // Arch. Appl. Mech. – 2002. – **72**. – P. 127–137.
11. Koizumi M. The concept of FGM // Ceramic Transact., Functionally Gradient Materials. – 1993. – **34**. – P. 3–10.
12. Obata Y., Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material // J. Thermal Stresses. – 1994. – **17**. – P. 471–487.
13. Ruhi M., Angoshtari A., Naghdabadi R. Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials // J. Thermal Stresses. – 2005. – **28**. – P. 391–408.
14. Shao Z. S., Fan L. F., Wang T. J. Analytical solutions of stresses in functionally graded circular hollow cylinder with finite length // Key Eng Mater. – 2004. – P. 261–263; 651–656.

#### **ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТРЕЩИНАМИ**

*Задача о напряженном состоянии и предельном равновесии неоднородной по толщине упругопластической цилиндрической оболочки с двумя сквозными трещинами, расположенными вдоль образующей, сведена к системе сингулярных интегральных уравнений с неизвестными пределами интегрирования. Предложен алгоритм, учитывающий совместное решение полученной системы с условиями ограниченности напряжений около трещин и условиями пластичности тонких оболочек. В качестве примера исследована оболочка, изготовленная из функционально градиентного материала.*

#### **INTEGRAL EQUATIONS OF THICKNESS-INHOMOGENEOUS ELASTICO-PLASTIC CYLINDRICAL SHELL WITH CRACKS**

*A problem on the stress state and limit equilibrium of thickness-inhomogeneous elastico-plastic cylindrical shell with two through cracks, located along the generatrix, has been reduced to a system of singular integral equations with unknown limits of integration. An algorithm that expects solution of the system obtained together with both conditions of the stress boundedness near a crack and conditions of thin shell plasticity has been proposed. As an example we have considered a shell made of functionally gradient material.*

<sup>1</sup> Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

<sup>2</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів