

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА ЗА НЕПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ТЕПЛОВЕ НАВАНТАЖЕННЯ

Сформульовано задачу ідентифікації закону зміни в часі температури однієї з граничних поверхонь неоднорідного циліндра, його теплового і термонапруженого станів за температурою і деформаціями іншої граничної поверхні. Запропоновано методичку та числовий алгоритм розв'язання задачі ідентифікації.

Діагностику та контроль теплового і термонапруженого станів деталей працюючого теплоенергообладнання через обмеження доступу до їх граничної поверхні часто доводиться здійснювати за умов неповної інформації про теплове навантаження [9, 10], що зумовлює недоозначеність відповідних задач теплопровідності та термопружності. Для розв'язання таких задач необхідно використовувати додаткову інформацію. Якщо вихідну задачу доозначити інформацією про поведінку параметрів теплового процесу (температури, теплового потоку) в деяких точках деталі, то задачу ідентифікації теплового навантаження можна звести до обернених задач теплопровідності, які є некоректними і розв'язання яких передбачає побудову регуляризованих алгоритмів [9, 13]. Якщо ж вихідну задачу доозначити інформацією про поведінку параметрів механічного процесу (переміщень, деформацій, напружень), то в результаті отримаємо обернену задачу термопружності [1, 2, 8, 11, 12].

У цій статті досліджено обернену задачу термопружності, до якої зводиться задача ідентифікації закону зміни в часі температури однієї з граничних поверхонь неперервно неоднорідного за радіальною координатою циліндра, його теплового і термонапруженого станів, коли додатково відома поведінка деформацій іншої граничної поверхні. Вплив неоднорідності матеріалу на термонапружений стан тіла досліджувався у працях [3, 5, 6, 14].

1. Постановка задачі. Розглянемо довгий порожнистий циліндр за умов плоскої деформації. Вважаємо, що відомі температури $t_i(\tau_*)$, $i = 1, 2$, внутрішньої, $r = R_1$, і зовнішньої, $r = R_2$, граничних поверхонь, де R_i , $i = 1, 2$, – відповідно внутрішній і зовнішній радіуси циліндра; τ_* – час. Нехай на граничних поверхнях $r = R_i$, $i = 1, 2$, задано нормальні стискуючі напруження $P_i(\tau_*)$, $i = 1, 2$. Усі теплофізичні та механічні характеристики матеріалу приймаємо неперервними функціями від координати r . Тоді температурне поле циліндра $T(\rho, \tau)$ задовольняє рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \lambda(\rho) \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \rho} \right) = c(\rho) \gamma(\rho) \frac{\partial T(\rho, \tau)}{\partial \tau}, \quad \rho \in (k, 1), \quad \tau \in (0, \tau_m] \quad (1)$$

і крайові умови

$$T(k, \tau) = t_1(\tau), \quad (2)$$

$$T(1, \tau) = t_2(\tau), \quad (3)$$

$$T(\rho, 0) = f(\rho), \quad (4)$$

де $\rho = r/R_2$; $\tau = a\tau_*/R_2^2$ – критерій Фур'є; $\lambda(\rho) = \lambda_*(\rho)/\lambda_0$ – безрозмірний коефіцієнт теплопровідності; $c(\rho) = c_*(\rho)/c_0$ – безрозмірна питома масова теплоємність; $\gamma(\rho) = \gamma_*(\rho)/\gamma_0$ – безрозмірна густина матеріалу; λ_* , c_* , γ_* –

відповідно коефіцієнт теплопровідності, питома масова теплоємність і густина матеріалу, а λ_0, c_0, γ_0 – деякі сталі значення цих величин; $a = \lambda_0/(c_0\gamma_0)$; $k = R_1/R_2$; $f(\rho)$ – початковий розподіл температури; τ_m – стала.

Напружено-деформований стан розглядуваного циліндра описується [4] рівнянням рівноваги

$$\rho \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \sigma_r = \sigma_\varphi, \quad (5)$$

фізичними співвідношеннями

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_*} [\sigma_r - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_z)] + \alpha_* T, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E_*} [\sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha_* T, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_*} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)] + \alpha_* T, \end{aligned} \quad (6)$$

та рівнянням суцільності

$$\rho \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \rho} + \varepsilon_\varphi = \varepsilon_r \quad (7)$$

за умов $\varepsilon_z = 0$ і

$$\sigma_r(k, \tau) = -P_1(\tau), \quad \sigma_r(1, \tau) = -P_2(\tau). \quad (8)$$

Тут σ_j та ε_j , $j = r, \varphi, z$, – діагональні компоненти відповідно тензора напружень і деформацій у циліндричній системі координат; $E_*(\rho)$ – модуль Юнга; $\nu(\rho)$, $\alpha_*(\rho)$ – відповідно коефіцієнт Пуассона та лінійного температурного розширення.

Задачу (1)–(8) за відомих функцій і коефіцієнтів, які входять у рівняння і крайові умови, називають *прямою задачею* термопружності. Сформулюємо тепер наступну задачу ідентифікації. Припустимо, що з огляду на зазначені вище причини закон зміни в часі температури граничної поверхні $\rho = k$ не є відомим, тобто не є відомою функція $t_1(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_m]$. Потрібно визначити функцію $t_1(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_m]$, температурне поле циліндра, а також його напружено-деформований стан, якщо додатково відома поведінка в часі сумарних деформації $\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi$ граничної поверхні $\rho = 1$:

$$\varepsilon_r(1, \tau) + \varepsilon_\varphi(1, \tau) = \psi(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_m], \quad (9)$$

де $\psi(\tau)$ – відома функція.

2. Побудова розв'язку задачі. Зведемо сформульовану задачу ідентифікації до *оберненої задачі* термопружності [1, 2]. З цією метою замінимо умову (2) умовою (9) і розглянемо задачу (1), (3), (4), (9). Виразимо сумарну деформацію $\varepsilon_r(1, \tau) + \varepsilon_\varphi(1, \tau)$ через температуру $T(\rho, \tau)$. Із співвідношень (6) випливає, що

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi = \frac{1-2\nu}{2G_*} \sigma + 2(1+\nu)\alpha_* T, \quad (10)$$

де $\sigma = \sigma_r + \sigma_\varphi$; G_* – модуль зсуву. Скориставшись запропонованим у робо-

ті [3] методом розв'язування задачі термопружності (5)–(8), отримаємо

$$\begin{aligned}\sigma(\rho, \tau) = & \frac{G_*}{1-\nu} \int_k^{\rho} \eta(\varphi_*(\rho) - \varphi_*(\eta)) \sigma(\eta, \tau) d\eta - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \alpha_* G_* T(\rho, \tau) - \\ & - \frac{G_*}{1-\nu} \int_k^1 \eta(\varphi_*(1) - \varphi_*(\eta)) \sigma(\eta, \tau) d\eta + \frac{2G_*}{(1-\nu)\bar{G}_*} \int_k^1 \eta \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_* G_* T(\eta, \tau) d\eta + \\ & + \frac{G_*}{(1-\nu)\bar{G}_*} \left[k^2 P_1(\tau) \left(1 + \int_k^1 \frac{\eta G_*}{1-\nu} \varphi_*(\eta) d\eta \right) - P_2(\tau) \right] - \frac{k^2 G_*}{1-\nu} P_1(\tau) \varphi_*(\rho),\end{aligned}$$

де

$$\bar{G}_* = \int_k^1 \frac{\eta G_*}{1-\nu} d\eta, \quad \varphi_*(\rho) = \int_k^{\rho} \frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{G_*} \right) d\eta.$$

Якщо отриману рівність підставити у формулу (10), то умову (9) можна записати так:

$$\begin{aligned}\frac{b_1}{\bar{G}} \int_k^1 \eta \frac{(1+\nu)\alpha G}{1-\nu} T(\eta, \tau) d\eta + b_2 \alpha(1) T(1, \tau) = & \frac{\psi(\tau)}{\alpha_0} - \\ & - \frac{b_1}{2\alpha_0 \bar{G}} \left[k^2 p_1(\tau) \left(1 + \int_k^1 \frac{\eta G}{1-\nu} \varphi(\eta) d\eta \right) - p_2(\tau) \right] + \frac{b_1 k^2}{2\alpha_0} p_1(\tau) \varphi(1),\end{aligned}\quad (11)$$

де $\alpha(\rho) = \alpha_*(\rho)/\alpha_0$ – безрозмірний коефіцієнт лінійного температурного розширення; $G(\rho) = G_*(\rho)/G_0$ – безрозмірний модуль зсуву; α_0, G_0 – деякі сталі значення коефіцієнта лінійного температурного розширення і модуля зсуву; $\bar{G} = \bar{G}_*/G_0$; $\varphi = \varphi_* G_0$; $p_i(\tau) = P_i(\tau)/G_0$, $i = 1, 2$;

$$b_1 = \frac{1-2\nu(1)}{1-\nu(1)}, \quad b_2 = \frac{1+\nu(1)}{1-\nu(1)}.$$

Поклавши в умові (11) $\tau = 0$, отримаємо умову погодження початкової температури, заданих сумарних деформацій граничної поверхні $\rho = 1$ і безрозмірних тисків усередині та зовні циліндра в початковий момент часу

$$\begin{aligned}\frac{b_1}{\bar{G}} \int_k^1 \eta \frac{(1+\nu)\alpha G}{1-\nu} f(\eta) d\eta + b_2 \alpha(1) f(1) = & \frac{\psi(0)}{\alpha_0} - \\ & - \frac{b_1}{2\alpha_0 \bar{G}} \left[k^2 p_1(0) \left(1 + \int_k^1 \frac{\eta G}{1-\nu} \varphi(\eta) d\eta \right) - p_2(0) \right] + \frac{b_1 k^2}{2\alpha_0} p_1(0) \varphi(1),\end{aligned}$$

виконання якої забезпечує неперервність розв'язку задачі (1), (3), (4), (11).

Для розв'язання задачі (1), (3), (4), (11) скористаємося методом скінченних різниць [7]. Для цього область неперервної зміни аргументів ρ і τ замінимо дискретною множиною точок – сіткою $\{\rho_i = k + ih, \tau_j = j\ell; i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, M\}$, де h, ℓ – відстані між вузлами сітки, $N = (1-k)/h$, $M = \tau_m/\ell$. Замість функцій неперервних аргументів розглянемо функції дискретних аргументів. Частинні похідні першого та другого порядків за змінною ρ у рівнянні (1) апроксимуємо центральними різницями з точністю $O(h^2)$, а похідну за часом – несиметричною різницею з точністю $O(\ell)$ [7]. Записана на такій дискретній множині неявна різницева схема крайової задачі (1), (3),

(4), (11) має вигляд

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N g_i T_i^{j+1} &= F_0^{j+1}, \\ -A_i T_{i-1}^{j+1} + C_i T_i^{j+1} - B_i T_{i+1}^{j+1} &= F_i^{j+1}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ T_N^{j+1} &= F_N^{j+1}, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{kh}{2} \frac{b_1}{G} \frac{1+v(k)}{1-v(k)} \alpha(k) G(k), \\ g_i &= h \rho_i \frac{b_1}{G} \frac{1+v(\rho_i)}{1-v(\rho_i)} \alpha(\rho_i) G(\rho_i), \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ g_N &= \frac{h}{2} \frac{b_1}{G} \frac{1+v(1)}{1-v(1)} \alpha(1) G(1) + b_2 \alpha(1), \\ A_i &= \frac{1}{h^2} \rho_{i-1/2} \lambda \left(\rho_{i-1/2} \right), \quad B_i = \frac{1}{h^2} \rho_{i+1/2} \lambda \left(\rho_{i+1/2} \right), \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ C_i &= \frac{1}{h^2} \left(\rho_{i-1/2} \lambda \left(\rho_{i-1/2} \right) + \rho_{i+1/2} \lambda \left(\rho_{i+1/2} \right) \right) + \rho_i c(\rho_i) \gamma(\rho_i) \frac{1}{\ell}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ F_0^{j+1} &= \frac{\Psi^{j+1}}{\alpha_0} - \frac{b_1}{2\alpha_0 G} \left[k^2 p_1^{j+1} \left(1 + \frac{kh}{2} \frac{G(k)}{1-v(k)} \Phi_0 + \frac{h}{2} \frac{G(1)}{1-v(1)} \Phi_N + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + h \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\rho_i G(\rho_i)}{1-v(\rho_i)} \Phi_i \right) - p_2^{j+1} \right] + \frac{b_1 k^2}{2\alpha_0} p_1^{j+1} \Phi_N, \\ F_i^{j+1} &= \rho_i c(\rho_i) \gamma(\rho_i) \frac{T_i^j}{\ell}, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad F_N^{j+1} = t_2(\tau_{j+1}), \\ T_i^j &= T(\rho_i, \tau_j), \quad T_i^0 = f(\rho_i), \quad \Psi^{j+1} = \Psi(\tau_{j+1}), \\ p_1^{j+1} &= p_1(\tau_{j+1}), \quad p_2^{j+1} = p_2(\tau_{j+1}), \quad \Phi_i = \varphi(\rho_i), \\ \rho_{i-1/2} &= k + h \left(i - \frac{1}{2} \right), \quad \rho_{i+1/2} = k + h \left(i + \frac{1}{2} \right), \quad 1 \leq i \leq N-1. \end{aligned}$$

Апроксимацію інтеграла у лівій частині умови (11) здійснено за формулою трапецій з точністю $O(h^2)$. За цією ж формулою здійснюється і обчислення інтегралів у правій частині умови (11).

Розв'язок системи (12) знаходимо методом прогонки для складних систем [7]. Беручи до уваги вигляд коефіцієнтів g_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$, і враховуючи, що $C_i > A_i + B_i$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, можна показати [7], що у випадку системи (12) алгоритм методу прогонки для складних систем є коректний і стійкий.

Розв'язавши систему (12), знаходимо температурне поле циліндра T_i^j , $i = 0, 1, \dots, N$; $j = 0, 1, \dots, M$, зокрема, температуру внутрішньої граничної поверхні T_0^j , $j = 0, 1, \dots, M$. Термонапружений стан циліндра, який відповідає знайденому температурному полю, визначаємо за допомогою співвідношень (5)–(7) і методу, розробленого у роботі [3].

3. Числова апробація методики. З метою апробації запропонованої методики розв'язання сформульованої задачі розглянемо неоднорідний циліндр [3], коли теплофізичні характеристики матеріалу є такими функціями від координати ρ :

$$\lambda(\rho) = 2\rho^2 - 3\rho + 2, \quad c(\rho) = \rho^2 - 1.2\rho + 1.4, \quad \gamma(\rho) = -\rho^2 + 1.6\rho + 0.5, \\ \alpha(\rho) = 0.5\rho^2 - 0.4\rho + 1, \quad G(\rho) = 0.6\rho^2 - 0.9\rho + 1.2,$$

За умов $\lambda_0 = 40 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$; $c_0 = 442.8 \text{ Вт} \cdot \text{с}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$; $\gamma_0 = 7.9 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$; $\nu = 0.3$; $\alpha_0 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$; $G_0 = 79.2 \text{ ГПа}$;

$$t_1(\tau) = f(k) + \alpha_1(\exp(-\tau) - \exp(-6\tau)), \quad t_2(\tau) = f(1) + \alpha_2(1 - \exp(-2\tau)), \\ p_1(\tau) = QH(\tau), \quad p_2(\tau) = 0,$$

де α_1, α_2, Q – сталі величини; $H(\tau)$ – функція Гевісайда, розв'яжемо пряму задачу термопружності і визначимо поведінку в часі відносних сумарних деформацій $(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi)/\alpha_0$ граничної поверхні $\rho = 1$. Використаємо знайдені деформації як задані в оберненій задачі і визначимо температуру поверхні $\rho = k$ як розв'язок оберненої задачі $T_0^j, j = 0, 1, \dots, M$. Порівнюючи $T_0^j, j = 0, 1, \dots, M$, із заданою у прямій задачі температурою $t_1(\tau), \tau \in [0, \tau_m]$, оцінимо величину відхилення $T_0^j, j = 0, 1, \dots, M$, від $t_1(\tau), \tau \in [0, \tau_m]$.

Поведінку в часі відносних сумарних деформацій $\varepsilon(\tau) = \frac{1}{\alpha_0}(\varepsilon_r(1, \tau) + \varepsilon_\varphi(1, \tau))$, визначених з прямої задачі термопружності при $k = 0.6, f(\rho) = 20 \text{ } ^\circ\text{C}, \alpha_1 = 300 \text{ } ^\circ\text{C}, \alpha_2 = 30 \text{ } ^\circ\text{C}, Q = 10 \text{ Мпа}, h = \ell = 10^{-2}, \tau_m = 1.5$, зображено на рис. 1. Крива $T_0^j, j = 0, 1, \dots, 150$, наведена на цьому рисунку, розрахована як розв'язок оберненої задачі, при апроксимації деформацій $\varepsilon(\tau)$ кубічним сплайном з відносною похибкою $1.0 \cdot 10^{-3}$. Кружечками позначено поведінку заданої функції $t_1(\tau), \tau \in [0, 1.5]$. Проведені дослідження показали, що для рівномірного розбиття проміжків $\rho \in [k, 1]$ і $\tau \in [0, 1.5]$ з кроком $h = \ell = 10^{-2}$ максимальна відносна величина відхилення розв'язку оберненої задачі $T_0^j, j = 0, 1, \dots, 150$, від функції $t_1(\tau), \tau \in [0, 1.5]$ не перевищує 2.5%. Це підтверджує стійкість розв'язку оберненої задачі до малих похибок вхідних даних і свідчить про задовільну точність, з якою знайдено цей розв'язок.

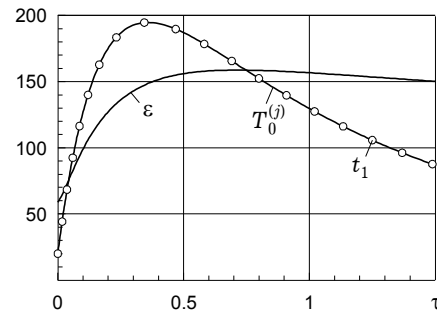


Рис. 1

Висновок. Сформульовано задачу ідентифікацію закону зміни в часі температури однієї із граничних поверхонь неперервно неоднорідного за радіальною координатою циліндра, його теплового і термонапруженого станів за поведінкою температури і деформацій іншої граничної поверхні. Запропонована методика та числовий алгоритм розв'язання оберненої задачі термопружності, до якої зведено сформульовану задачу. На основі розв'язку прямої задачі термопружності проведено числову апробацію методики розв'язання задачі ідентифікації.

Робота виконана у рамках спільного проекту фундаментальних досліджень вчених наукових установ НАН України та Сибірського відділення РАН.

1. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
2. *Вигак В. М., Костенко А. В., Засадна Х. Е.* Оптимальное управление нагревом неоднородных тел при ограничении на прочность // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 9. – С. 34–39.
3. *Вигак В. М., Калиняк Б. М.* Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних та термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду // Доп. НАН України. – 1998. – № 11. – С. 60–67.
4. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
5. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Гарматій Г. Ю.* Аналітично-чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – 37, № 6. – С. 39–44.
6. *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Квазістатичні температурні напруження в багатошаровому термочутливому циліндрі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, № 4. – С. 7–16.
7. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 592 с.
8. *Ясінський А.* Обернена задача визначення теплового навантаження та термонапруженого стану циліндричних тіл за поверхневими переміщеннями // Машинознавство – 2003. – № 11. – С. 18–22.
9. *Alifanov O. M.* Inverse heat transfer problems. – Berlin: Springer, 1994. – 348 p.
10. *Beck J. V., Blackwell B., Clair C. R. St.* Inverse heat conduction: Ill-posed problems. – New York: Wiley-Intersci. Publ., 1985. – 308 p.
11. *Blanc G., Raynaud M.* Solution of the inverse heat conduction problem from thermal strain measurements // ASME. J. Heat Transfer. – 1996. – 118. – P. 842–849.
12. *Chen H. T., Wu X. Y., Hsiao Y. S.* Estimation of surface condition from the theory of dynamic thermal stresses // Int. J. Thermal Sciences. – 2004. – 43. – P. 95–104.
13. *Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of inverse problems. – Dordrecht: Kluwer, 1996. – 332 p.
14. *Ruhi M., Angoshtari A., Naghdabadi R.* Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials // J. Thermal Stresses. – 2005. – 28. – P. 391–408.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКЕ

Сформулирована задача идентификации закона изменения во времени температуры одной из граничных поверхностей неоднородного цилиндра, его теплового и термонапряженного состояний по температуре и деформациям другой граничной поверхности. Предложена методика и численный алгоритм решения задачи идентификации.

INVERSE THERMOELASTICITY PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS CYLINDER WITH INCOMPLETE INFORMATION ABOUT THERMAL LOADING

The identification problem for the law of time change of surface temperature of inhomogeneous cylinder, its thermal and thermal stressed states has been formulated using the defined temperature and strain on the other boundary. The method and numerical algorithm for solving the identification problem have been proposed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.02.07