УДК 539.3

Я. Й. Бурак, Є. Я. Чапля, Г. І. Мороз

ПРО ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НЕСИМЕТРИЧНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ З УРАХУВАННЯМ ГАЛУЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ДЕФОРМУВАННЯ

Запропоновано варіаційну постановку крайових задач механіки пружних систем, які знаходяться під дією силового навантаження, як у рамках моделі класичної теорії пружності, так і моделі моментної теорії пружності. Показано, що в рамках моделі моментної теорії пружності за одного й того ж зовнішнього силового навантаження у пружному тілі враховується додатково релаксація напруженого стану, яка зумовлює зменшення енергії пружного деформування. При цьому додатковими внутрішніми ступенями свободи є вектор густини моментного імпульсу та тензор градієнта локального повороту.

Вступ. При побудові математичних моделей нелінійної механіки пружних систем ефективно використовують енергетичні підходи на основі повних функціоналів Гамільтона в рамках моделі нелінійної теорії пружності для механічних систем, які знаходяться під дією зовнішнього силового навантаження [3, 4, 7]. При цьому базовим є встановлення визначальних фізичних співвідношень, які характеризують локальний стан системи, та формулювання відповідних крайових задач математичної фізики. На цій основі додатково встановлюють також достатні умови існування і єдиності розв'язків крайових задач.

Як розвиток такого підходу в роботі [9] запропоновано методику побудови визначальних співвідношень нелінійної моментної теорії пружності та постановку відповідних крайових задач. Для такої моделі функціонал Гамільтона визначається на розширеному просторі фазових координат: векторів силового та моментного імпульсів і відповідно тензора ґрадієнта переміщення і тензора ґрадієнта локального повороту.

У цій роботі аналізуються два варіанти варіаційної постановки крайових задач для пружних систем: у рамках теорії пружності та моментної теорії пружності, які знаходяться під дією одного й того ж заданого зовнішнього силового навантаження. Ідея постановки такої задачі на основі двох послідовних модельних наближень (теорії пружності та моментної теорії пружності) індукована, зокрема, роботою [1], у якій розв'язки систем диференціальних рівнянь будуються з використанням гіллястих ланцюгових дробів. Відзначимо також праці [3, 5], у яких запропоновано послідовнісний варіаційний підхід до конструктивної побудови розв'язків крайових задач теорії пружних пластин.

1. Варіаційна постановка крайових задач класичної теорії пружності. Розглядаємо пружне деформівне тверде тіло K^*. У відліковій конфігурації (природний стан) пружна система ненавантажена, однорідна і в евклідовому просторі займає область X_0, яка обмежена поверхнею ∂X_0. Місце довільної точки $k \in K^*$ у відліковій конфігурації ($t < t_1$) характеризуємо радіусом-вектором $\mathbf{r}_0$. У часовому інтервалі (t_1, t_2) деформівна пружна система знаходиться під дією поверхневих і масових сил і в актуальній конфігурації ($t_1 \le t \le t_2$) займає область $X(t) \bigcup \partial X(t)$. Місце точки $k \in K^*$ у довільний момент часу t ($t_1 \le t \le t_2$) визначається радіусом-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$, де $\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$ − вектор переміщення цієї точки з вихідної конфігурації в актуальну.

При варіаційному формулюванні математичної моделі нелінійної теорії пружності за вихідний приймають повний енергетичний функціонал Гамільтона [3]

$$F\left[\mathbf{p}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}\right] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{X_0} \left[H(\mathbf{p}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}) + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{f}^+ \cdot \mathbf{u} \right] dV_0 - \right.$$

$$\left. - \int_{\partial X_0} (\boldsymbol{\sigma}_n^+ \cdot \mathbf{u})\, d\Sigma_0 \right\} dt - \int_{X_0} \left(\mathbf{u}_{(2)}^+ \cdot \mathbf{p}_{(2)}\right) dV_0 \,, \qquad (1)$$

де $H(\mathbf{p}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u})$ – функція Гамільтона; $\mathbf{p} = \int_{t_1}^{t} (\nabla_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}^+)\, d\tilde{t}$ – вектор густини силового імпульсу; $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор напружень Піоли – Кірхгофа першого роду; $\nabla_0 \equiv \partial/\partial \mathbf{r}_0$ – набла-оператор Гамільтона; $\nabla_0 \otimes \mathbf{u} = \nabla_0 \otimes \mathbf{r} - \hat{\boldsymbol{I}}$; $\nabla_0 \otimes \mathbf{r}$ – тензор ґрадієнта місця; $\hat{\boldsymbol{I}}$ – одиничний тензор; $\boldsymbol{\sigma}_n^+ = \boldsymbol{\sigma}_n^+(\mathbf{r}_0, t)$ – вектор поверхневих зусиль; $\mathbf{f}^+ = \mathbf{f}^+(\mathbf{r}_0, t)$ – вектор густини заданих зовнішніх масових сил; $\mathbf{u}_{(2)}^+ = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t_2)$ – заданий вектор переміщення у момент часу $t = t_2$; $\mathbf{p}_{(2)} \equiv \mathbf{p}(\mathbf{r}_0, t_2)$.

Тут і надалі всі адитивні параметри фізично малої області $\delta K \subset K^*$ нормовані за геометричними характеристикам цієї області – об'єму δV_0 і площі $\delta\Sigma_0$ елементарної поверхні $\delta\partial K \subset \partial K^*$ у вихідній конфігурації. Тому

$$\delta\mathcal{H} = H \delta V_0, \qquad \delta\mathbf{P} = \mathbf{p}\, \delta V_0 \,,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n^{+*} d\Sigma^* = \boldsymbol{\sigma}_n^+ d\Sigma_0, \qquad \mathbf{f}^{+*} dV^* = \mathbf{f}^+ dV_0 \,,$$

де H і $\mathbf{p}$ – густини адитивних параметрів $\delta\mathcal{H}$ і $\delta\mathbf{P}$; $\boldsymbol{\sigma}_n^{+*}$ – вектор зовнішніх поверхневих зусиль і $\mathbf{f}^{+*}$ – вектор масових сил, які нормовані за об'ємом δV фізично малої області $\delta K \subset K^*$ і площею $\delta\Sigma$ поверхні елементарної площинки $\delta\partial K \subset \partial K^*$ в актуальній конфігурації.

Необхідною умовою мінімуму функціонала Гамільтона (1) є рівність нулеві його першої варіації:

$$\delta F\left[\mathbf{u}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}, \mathbf{p}\right] = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{X_0} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \mathbf{v} \right) \cdot \delta\mathbf{p} + \left(\frac{\partial H}{\partial \nabla_0 \otimes \mathbf{u}} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right) \cdot\cdot\, \delta(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\top} \right] + \right.$$

$$\left. + \int_{\partial X_0} \left[(\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^+) \cdot \delta\mathbf{u} \right] d\Sigma_0 \right\} dt + \int_{X_0} \left[(\mathbf{u}_{(2)} - \mathbf{u}_{(2)}^+) \cdot \delta\mathbf{p}_{(2)} - \right.$$

$$\left. - \mathbf{u}_{(1)} \cdot \delta\mathbf{p}_{(1)} \right] dV_0 = 0 \,. \qquad (2)$$

Тут $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ – вектор швидкості локального поступального руху; $\top$ – символ операції транспонування.

З умови незалежності варіацій $\delta\mathbf{u}$, $\delta(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})$, $\delta\mathbf{p}$ отримуємо такі визначальні фізичні співвідношення математичної моделі деформівного пружного тіла в області $X_0 \times [t_1, t_2]$:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}), \tag{3}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}} \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}), \tag{4}$$

природні граничні умови на поверхні тіла ∂X_0

$$\boldsymbol{\sigma}_n \equiv \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}_n^+(\mathbf{r}_0, t) \tag{5}$$

і граничні умови в часовому інтервалі $[t_1, t_2]$

$$\mathbf{u}\Big|_{t=t_1} = 0, \qquad \mathbf{u}\Big|_{t=t_2} = \mathbf{u}_{(2)}^+(\mathbf{r}_0, t_2). \tag{6}$$

Зі сформульованих фізичних співвідношень (3), (4) випливає, що функція Гамільтона $H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})$ є функцією локального стану на фазовому просторі параметрів $\mathbf{p}$, $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}$. При цьому рівняння (2)–(5) є вихідними фізичними рівняннями моделі, а відповідна диференціальна 1-форма

$$dH = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, d(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^\top$$

є повним диференціалом для функції Гамільтона.

У зв'язку з цим функція Гамільтона $H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})$ буде

$$H = \frac{1}{2}\left[\mathbf{v} \cdot \mathbf{p} + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^\top\right]. \tag{7}$$

Достатньою умовою мінімуму функціонала Гамільтона (1) є умова його опуклості

$$\delta^2 F = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\partial X_0} (\delta\boldsymbol{\sigma}_n \cdot \delta\mathbf{u})\, d\Sigma_0\right] dt + \int_{X_0} \left[\delta\mathbf{u}_{(2)} \cdot \delta\mathbf{p}_{(2)} - \delta\mathbf{u}_{(1)} \cdot \delta\mathbf{p}_{(1)}\right] dV_0 > 0. \tag{8}$$

Отриману умову опуклості (8) подамо таким чином:

$$\delta^2 F = \int_{t_1}^{t_2} \left\{\int_{X_0} \left[\delta\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{p} + \delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, \delta(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^\top + 2(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \delta\mathbf{u}\right] dV_0\right\} dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{\int_{X_0} \left[\delta^2 H + 2(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \delta\hat{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{u}\right] dV_0\right\} dt > 0.$$

Тоді за достатні умови опуклості функціонала F можна прийняти, зокрема, умови

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{X_0} \delta^2 H\, dV_0\right] dt > 0, \qquad \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{X_0} (\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \delta\mathbf{u}\, dV_0\right] dt \ge 0. \tag{9}$$

Співвідношення (3)–(6), (9) складають повну систему визначальних співвідношень модельного опису динамічних процесів у пружних тілах у рамках математичної моделі класичної теорії пружності.

Сконкретизуємо отримані результати для ізотропних матеріалів. У цьому випадку потенціал $H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})$ є функцією незалежних скалярних інваріантів параметрів локального стану $\mathbf{p}$, $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}$ [8, 9].

Для встановлення лінійної системи фізичних співвідношень (2), (3) обмежимося надалі поданням функції Гамільтона $H(\mathbf{p}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})$ у вигляді поліноміальної функції скалярних інваріантів параметрів локального стану до другого порядку включно. За незалежні інваріанти фазових координат $\mathbf{p}$, $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}$ приймемо такі інваріанти:

$$I_2^{(1)} = I(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}), \qquad I_1^{(2)} = I(\nabla_0 \otimes \mathbf{u}) \equiv \nabla_0 \otimes \mathbf{u} \cdot\cdot \hat{\boldsymbol{I}},$$

$$I_2^{(2)} = I\big((\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} \cdot (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}}\big), \qquad I_{21}^{(2)} = I\big((\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} \cdot \big((\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\big)^{\top}\big).$$

Тут індексами «s», «a» позначено відповідно симетричну та антисиметричну складові тензора $\nabla_0 \otimes \mathbf{u}$.

До наведених скалярних інваріантів параметрів локального стану необхідно додати також скалярний інваріант, який характеризує ефекти взаємовпливу параметрів поступального руху та процесу деформування:

$$I_2^{(13)} = I(\mathbf{p} \times \nabla_0 \otimes \mathbf{u}).$$

У підсумку фізичні співвідношення (3), (4) лінійної постановки задачі набувають вигляду

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\big(\mathbf{p} - \gamma(\nabla_0 \times \mathbf{u})\big),$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)(\nabla_0 \cdot \mathbf{u})\hat{\boldsymbol{I}} + G(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} + G'(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} - \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \gamma\mathbf{p}.$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ – антисиметричний тензор Леві – Чивіта; ρ – інерційна характеристика поступальної форми руху; K, G, G' – модулі пружного деформування фізично малої підсистеми; γ – невід'ємний коефіцієнт взаємовпливу параметрів локального руху та деформування.

Функцію Гамільтона (7) з урахуванням співвідношень (3) і (4) подамо таким чином:

$$H = \frac{1}{2\rho}\big[\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - \gamma(\nabla_0 \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{p}\big] + \frac{1}{2}\Big[\left(K - \frac{2}{3}G\right)(\nabla_0 \cdot \mathbf{u})^2 +$$

$$+ 2G(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} \cdot\cdot (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} + 2G'(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{a} \cdot\cdot \big((\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\big)^{\top} -$$

$$- \frac{1}{\rho}(\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \gamma\mathbf{p}) \cdot\cdot \nabla_0 \otimes \mathbf{u}\Big].$$

Тоді для енергії деформації (7) справджується таке співвідношення:

$$H(\mathbf{p}, \nabla_0 \otimes \mathbf{u}) = E\big(\mathbf{p}, (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}}\big) + J\big(\mathbf{p}, (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\big).$$

Тут пружний потенціал $E\big(\mathbf{p}, (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}}\big)$ подається як сума кінетичної енергії поступальної форми руху та енергії пружного деформування:

$$E\big(\mathbf{p}, (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}}\big) =$$

$$= \frac{1}{2\rho}\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2}\left\{\left(K - \frac{2}{3}G\right)(\nabla_0 \cdot \mathbf{u})^2 + 2G(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} \cdot\cdot (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}}\right\}.$$

Дисипативна складова енергії процесу деформування має вигляд

$$J\big(\mathbf{p}, (\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\big) \equiv J\big((\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\big) = G'(\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} \cdot\cdot \big((\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\big)^{\top}. \qquad (10)$$

У співвідношенні (10) функція $J\big((\nabla_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\big)$ є додатно визначеною. Отже, можна стверджувати, що розв'язок задачі класичної несиметричної теорії пружності при заданому зовнішньому силовому навантаженні характеризує як динамічні процеси поступального руху та пружного деформування, так і релаксаційні ефекти, які пов'язані з урахуванням несиметричної складової тензора ґрадієнта переміщень.

2. Варіаційне формулювання крайових задач моментної теорії пружності. Функціонал Гамільтона математичної моделі нелінійної моментної теорії пружності подається так [9]:

$$F\left[\mathbf{p},\mathbf{q},\nabla_0\otimes\mathbf{u},\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi}\right]=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\int\limits_{X_0}\left[H_*(\mathbf{p},\mathbf{q},\nabla_0\otimes\mathbf{u},\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})+\frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\mathbf{u}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{d\mathbf{q}}{dt}\cdot\boldsymbol{\varphi}-\mathbf{f}^+\cdot\mathbf{u}-\boldsymbol{\mu}^+\cdot\boldsymbol{\varphi}\right]dV_0-\left.\int\limits_{\partial X_0}\left[\boldsymbol{\sigma}_n^+\cdot\mathbf{u}+\boldsymbol{\tau}_n^+\cdot\boldsymbol{\varphi}\right]d\Sigma_0\right\}dt-$$

$$-\int\limits_{X_0}\left[\mathbf{u}_{(2)}^+\cdot\mathbf{p}_{(2)}+\boldsymbol{\varphi}_{(2)}^+\cdot\mathbf{q}_{(2)}\right]dV_0\,, \tag{11}$$

де $H_*(\mathbf{p},\mathbf{q},\nabla_0\otimes\mathbf{u},\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})$ – функція Гамільтона; $\mathbf{q}=\int\limits_{t_1}^{t}(\nabla_0\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}+\boldsymbol{\mu}^+)d\tilde{t}$ – вектор густини моментного імпульсу; $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ – тензор моментних напружень; $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор кута локального повороту фізично малого елемента; $\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi}$ – тензор ґрадієнта локального повороту; $\boldsymbol{\tau}_n^+=\boldsymbol{\tau}_n^+(\mathbf{r}_0,t)$ – вектор заданих моментних поверхневих зусиль; $\boldsymbol{\mu}^+=\boldsymbol{\mu}^+(\mathbf{r}_0,t)$ – вектор густини масових моментних зусиль; $\boldsymbol{\varphi}_{(2)}^+$ – заданий вектор кута повороту в момент часу $t=t_2$. Тут $\boldsymbol{\tau}_n^+d\Sigma_0=\boldsymbol{\tau}_n^{+*}d\Sigma^*$; $\boldsymbol{\mu}^+dV_0=\boldsymbol{\mu}^{+*}dV^*$; $\boldsymbol{\tau}_n^{+*}$ – вектор зовнішніх поверхневих зусиль і $\boldsymbol{\mu}^{+*}$ – вектор моментних сил, які нормовані за об'ємом δV фізично малої області $\delta K\subset K^*$ і площею $\delta\Sigma$ поверхні елементарної площинки $\delta\partial K\subset\partial K^*$ в актуальній конфігурації.

Необхідною умовою мінімуму функціонала Гамільтона (11) є рівність нулеві його першої варіації:

$$\delta F\left[(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi},\mathbf{p},\mathbf{q},\nabla_0\otimes\mathbf{u},\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})\right]=\int\limits_{t_1}^{t_2}\left\{\int\limits_{X_0}\left[\left(\frac{\partial H_*}{\partial\mathbf{p}}-\mathbf{v}\right)\cdot\delta\mathbf{p}+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{\partial H_*}{\partial\mathbf{p}}-\boldsymbol{\omega}\right)\cdot\delta\mathbf{q}+\left(\frac{\partial H_*}{\partial\nabla_0\otimes\mathbf{u}}-\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)\cdot\cdot\,\delta(\nabla_0\otimes\mathbf{u})^\top+$$

$$\left.+\left(\frac{\partial H_*}{\partial\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi}}-\hat{\boldsymbol{\tau}}\right)\cdot\cdot\,\delta(\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})^\top\right]dV_0+\int\limits_{\partial X_0}\left[(\boldsymbol{\sigma}_n-\boldsymbol{\sigma}_n^+)\cdot\delta\mathbf{u}+\right.$$

$$\left.\left.+(\boldsymbol{\tau}_n-\boldsymbol{\tau}_n^+)\cdot\delta\boldsymbol{\varphi}\right]d\Sigma_0\right\}dt+\int\limits_{X_0}\left[(\mathbf{u}_{(2)}-\mathbf{u}_{(2)}^+)\cdot\delta\mathbf{p}_{(2)}-\mathbf{u}_{(1)}\cdot\delta\mathbf{p}_{(1)}+\right.$$

$$\left.+(\boldsymbol{\varphi}_{(2)}-\boldsymbol{\varphi}_{(2)}^+)\cdot\delta\mathbf{q}_{(2)}-\boldsymbol{\varphi}_{(1)}\cdot\delta\mathbf{q}_{(1)}\right]dV_0=0\,.$$

Тут $\boldsymbol{\omega}=d\boldsymbol{\varphi}/dt$ – вектор швидкості локального обертального руху.

З умови незалежності варіацій $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\varphi}$, $\delta(\nabla_0\otimes\mathbf{u})$, $\delta(\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})$, $\delta\mathbf{p}$, $\delta\mathbf{q}$ отримуємо такі визначальні фізичні співвідношення математичної моделі деформівного пружного тіла в області $X_0\times[t_1,t_2]$:

$$\mathbf{v}=\frac{\partial H_*}{\partial\mathbf{p}}\equiv\mathbf{v}(\mathbf{p},\mathbf{q},\nabla_0\otimes\mathbf{u},\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})\,,$$

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\partial H_*}{\partial\mathbf{q}}\equiv\boldsymbol{\omega}(\mathbf{p},\mathbf{q},\nabla_0\otimes\mathbf{u},\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})\,, \tag{12}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial H_*}{\partial \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}} \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}),$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial H_*}{\partial \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}} \equiv \hat{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}), \tag{13}$$

природні граничні умови на поверхні тіла ∂X_0

$$\boldsymbol{\sigma}_n \equiv \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}_n^+(\mathbf{r}_0, t), \qquad \boldsymbol{\tau}_n \equiv \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau}_n^+(\mathbf{r}_0, t) \tag{14}$$

і граничні умови в часовому інтервалі $[t_1, t_2]$

$$\mathbf{u}\Big|_{t=t_1} = 0, \qquad \mathbf{u}\Big|_{t=t_2} = \mathbf{u}_{(2)}^+(\mathbf{r}_0, t_2),$$

$$\boldsymbol{\varphi}\Big|_{t=t_1} = 0, \qquad \boldsymbol{\varphi}\Big|_{t=t_2} = \boldsymbol{\varphi}_{(2)}^+(\mathbf{r}_0, t_2). \tag{15}$$

Зі сформульованих фізичних співвідношень (12), (13) випливає, що функція Гамільтона $H_*(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})$ є функцією локального стану на фазовому просторі параметрів $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}$. При цьому рівняння (12)–(15) – вихідні рівняння моделі, а відповідна диференціальна 1-форма

$$dH_* = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{q} + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, d(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^\top + \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot\cdot\, d(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^\top$$

є повним диференціалом для функції Гамільтона.

Тоді функція Гамільтона $H_*(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})$ буде

$$H_* = \frac{1}{2}\Big[\mathbf{v} \cdot \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q} + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot\cdot\, (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^\top + \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot\cdot\, (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^\top\Big]. \tag{16}$$

За достатні умови опуклості функціонала F можна прийняти, зокрема, умови

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big[\int_{X_0} \delta^2 H_* dV_0 \, dt \Big] > 0, \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Big[\int_{X_0} (\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \delta\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \delta\mathbf{u} \, dV_0 \Big] dt \ge 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big[\int_{X_0} (\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \delta\hat{\boldsymbol{\tau}}) \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} \, dV_0 \Big] dt \ge 0. \tag{17}$$

Співвідношення (12)–(15), (17) складають повну систему визначальних співвідношень динамічних процесів у пружних тілах в рамках математичної моделі моментної теорії пружності.

Для ізотропних матеріалів потенціал $H_*(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})$ є функцією незалежних скалярних інваріантів параметрів локального стану $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}$. Для встановлення лінійної системи фізичних співвідношень (12), (13), як і у випадку класичної теорії пружності, обмежимося поданням функції $H_*(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})$ у вигляді поліноміальної функції скалярних інваріантів параметрів локального стану до другого порядку включно. За незалежні інваріанти фазових координат $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}$ приймемо такі інваріанти:

$$I_1^{(3)} = I(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}) \equiv \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u} \cdot\cdot\, \hat{\boldsymbol{I}}, \qquad I_1^{(4)} = I(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}) \equiv \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi} \cdot\cdot\, \hat{\boldsymbol{I}},$$

$$I_2^{(1)} = I(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}), \qquad I_2^{(2)} = I(\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}),$$

$$I_2^{(3)} = I\big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}}\big), \qquad I_2^{(4)} = I\big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}} \cdot (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}}\big),$$

$$I_{21}^{(3)} = I\big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} \cdot \big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\big)^\top\big), \qquad I_{21}^{(4)} = I\big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}} \cdot \big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}}\big)^\top\big).$$

Тут індексами « s », « a » позначено відповідно симетричну та антисиметричну складові відповідних тензорів.

До записаних скалярних інваріантів параметрів локального стану додамо також скалярні інваріанти, які характеризують ефекти взаємовпливу параметрів поступального і обертального рухів:

$$I_2^{(12)} = I(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}), \qquad I_2^{(13)} = I(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}),$$

$$I_2^{(14)} = I(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}), \qquad I_2^{(23)} = I(\mathbf{q} \times \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}), \qquad I_2^{(24)} = I(\mathbf{q} \times \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}),$$

$$I_{2*}^{(34)} = I\big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} \cdot \big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}}\big)^{\top}\big), \qquad I_2^{(34)} = I\big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} \cdot \big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}}\big)^{\top}\big).$$

Тоді визначальні співвідношення (12), (13) лінійної постановки задачі набувають вигляду

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\big(\mathbf{p} - \alpha\mathbf{q} - \gamma_1(\boldsymbol{\nabla}_0 \times \mathbf{u}) - \gamma_2(\boldsymbol{\nabla}_0 \times \boldsymbol{\varphi})\big),$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\rho_*}\left(\mathbf{q} - \alpha\frac{\rho_*}{\rho}\mathbf{p} - \alpha_1\frac{\rho_*}{\rho}(\boldsymbol{\nabla}_0 \times \boldsymbol{\varphi}) - \alpha_2\frac{\rho_*}{\rho}(\boldsymbol{\nabla}_0 \times \mathbf{u})\right),$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u})\hat{\boldsymbol{I}} + G\big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} - \beta(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}}\big) +$$

$$+ G'\big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} - \beta'(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}}\big) - \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\gamma_1\mathbf{p} + \alpha_2\mathbf{q}),$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \left(K_m - \frac{2}{3}G_m\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi})\hat{\boldsymbol{I}} + G_m\left((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}} - \beta\frac{G}{G_m}(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}}\right) +$$

$$+ G'_m\left((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}} - \beta'\frac{G'}{G'_m}(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right) - \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\alpha_1\mathbf{q} + \gamma_2\mathbf{p}). \qquad (18)$$

Тут ρ_* – інерційна характеристика обертальної форми руху; K_m, G_m – модулі моментного деформування фізично малої підсистеми, G'_m – коефіцієнт жорсткості несиметричної складової тензора ґрадієнта локального повороту; α, β, β', α_1, α_2, γ_1, γ_2 – коефіцієнти взаємовпливу параметрів процесу деформування і локального повороту.

Енергетичною мірою напружено-деформованого стану тіла в рамках моделі моментної теорії пружності є енергія деформації (16), яка з урахуванням співвідношень (18) подається у вигляді білінійної форми

$$H_* = \frac{1}{2\rho}\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2\rho_*}\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} - \frac{\alpha}{\rho}\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\left(K - \frac{2}{3}G\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u})^2 + \left(K_m - \frac{2}{3}G_m\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi})^2 +\right.$$

$$+ 2G\big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} \cdot\cdot (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} - \beta(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}} \cdot\cdot (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}}\big) +$$

$$+ 2G_m\left[(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}} \cdot\cdot (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}} - \beta\frac{G}{G_m}(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} \cdot\cdot (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}}\right] +$$

$$+ 2G'\big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} \cdot\cdot \big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\big)^{\top} - \beta'(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}} \cdot\cdot \big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\big)^{\top}\big) +$$

$$\left. + 2G'_m\left[(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}} \cdot\cdot \big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}}\big)^{\top} - \beta'\frac{G'}{G'_m}(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} \cdot\cdot \big((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}}\big)^{\top}\right]\right\}. \quad (19)$$

Функцію (19) можна подати таким чином:

$$H_*(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}) =$$

$$= E_*(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}) + J_*(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}).$$

Тут $E_*(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})$ – пружний потенціал, $J_*(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})$ – потенціал розсіяння. При цьому

$$E_* = \frac{1}{2\rho}\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + \frac{1}{2\rho_*}\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} + \frac{1}{2}\Big\{\Big(K - \frac{2}{3}G\Big)(\nabla_0\cdot\mathbf{u})^2 + \Big(K_m - \frac{2}{3}G_m\Big)(\nabla_0\cdot\boldsymbol{\varphi})^2 +$$

$$+ 2G(\nabla_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{s}}\cdot\cdot(\nabla_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{s}} + 2G_m(\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}}\cdot\cdot(\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}}\Big\}, \qquad (20)$$

$$J_* = G'(\nabla_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}}\cdot\cdot\big((\nabla_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}}\big)^{\top} + G'_m(\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}}\cdot\cdot\big((\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}}\big)^{\top} -$$

$$- G\beta\big((\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}}\cdot\cdot(\nabla_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{s}} + (\nabla_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{s}}\cdot\cdot(\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}}\big) -$$

$$- G'\beta'\big((\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}}\cdot\cdot\big((\nabla_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}}\big)^{\top} + (\nabla_0\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{a}}\cdot\cdot\big((\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}}\big)^{\top}\big). \quad (21)$$

У співвідношенні (21) функція $J_*(\mathbf{p},\mathbf{q},\nabla_0\otimes\mathbf{u},\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})$ є додатно визначеною. Отже, можна стверджувати, що розв'язок задачі моментної теорії пружності при фіксованому зовнішньому силовому навантаженні характеризує релаксаційні ефекти, які пов'язані із взаємовпливом параметрів як поступального, так і обертального рухів.

3. Постановка крайових задач моментної теорії пружності за відсутності моментного навантаження. Розглянемо функціонал Гамільтона математичної моделі нелінійної моментної теорії пружності для тіла, яке знаходиться під дією лише зовнішнього силового навантаження:

$$F\big[\mathbf{p},\mathbf{q},\nabla_0\otimes\mathbf{u},\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi}\big] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\Big\{\int_{X_0}\Big[H_*(\mathbf{p},\mathbf{q},\nabla_0\otimes\mathbf{u},\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi}) + \frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\mathbf{u} + \frac{d\mathbf{q}}{dt}\cdot\boldsymbol{\varphi} -$$

$$- \mathbf{f}^{+}\cdot\mathbf{u}\Big]dV_0 - \int_{\partial X_0}\big[\boldsymbol{\sigma}_n^{+}\cdot\mathbf{u}\big]d\Sigma_0\Big\}dt - \int_{X_0}\big[\mathbf{u}_{(2)}^{+}\cdot\mathbf{p}_{(2)}\big]dV_0. \qquad (22)$$

Перша варіація функціонала (22) буде

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2}\Big\{\int_{X_0}\Big[\Big(\frac{\partial H_*}{\partial\mathbf{p}} - \mathbf{v}\Big)\cdot\delta\mathbf{p} + \Big(\frac{\partial H_*}{\partial(\nabla_0\otimes\mathbf{u})} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\Big)\cdot\cdot\,\delta(\nabla_0\otimes\mathbf{u})^{\top} + \frac{\partial H_*}{\partial\mathbf{q}}\cdot\delta\mathbf{q} +$$

$$+ \frac{\partial H_*}{\partial(\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})}\cdot\cdot\,\delta(\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi})^{\top}\Big]dV_0 + \int_{\partial X_0}(\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}_n^{+})\cdot\delta\mathbf{u}\,d\Sigma_0\Big\}dt +$$

$$+ \int_{X_0}\big[(\mathbf{u}_{(2)} - \mathbf{u}_{(2)}^{+})\cdot\delta\mathbf{p}_{(2)} - \mathbf{u}_{(1)}\cdot\delta\mathbf{p}_{(1)}\big]dV_0.$$

З необхідної умови екстремуму функціонала Гамільтона − рівності нулеві його першої варіації, отримуємо такі визначальні співвідношення:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial H_*}{\partial\mathbf{p}} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{p},\mathbf{q},\nabla_0\otimes\mathbf{u},\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi}), \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial H_*}{\partial\mathbf{q}} \equiv 0, \qquad (23)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial H_*}{\partial\nabla_0\otimes\mathbf{u}} \equiv \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{p},\mathbf{q},\nabla_0\otimes\mathbf{u},\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi}), \qquad \hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial H_*}{\partial\nabla_0\otimes\boldsymbol{\varphi}} \equiv 0, \qquad (24)$$

а також граничні умови на поверхні тіла ∂X_0 і в часовому інтервалі $[t_1, t_2]$

$$\boldsymbol{\sigma}_n \equiv \mathbf{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}_n^{+}(\mathbf{r}_0, t),$$

$$\mathbf{u}\big|_{t=t_1} = 0, \qquad \mathbf{u}\big|_{t=t_2} = \mathbf{u}_{(2)}^{+}(\mathbf{r}_0, t_2).$$

З отриманих фізичних співвідношень (23), (24) випливає, що при безмоментному зовнішньому силовому навантаженні процеси пружного деформування в рамках моделі моментної теорії пружності супроводжуються додатково виникненням поля вектора імпульсу обертального руху $\mathbf{q}$ і поля тензора ґрадієнта локального повороту $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}$. При цьому в кожен момент часу вектор швидкості обертального руху $\boldsymbol{\omega}$ і тензор моментних напружень $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ дорівнюють нулеві. Тоді у випадку ізотропних матеріалів маємо

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \frac{1}{\rho_*}\left(\mathbf{q} - \alpha\frac{\rho_*}{\rho}\mathbf{p} - \alpha_1\frac{\rho_*}{\rho}(\boldsymbol{\nabla}_0 \times \boldsymbol{\varphi}) - \alpha_2\frac{\rho_*}{\rho}(\boldsymbol{\nabla}_0 \times \mathbf{u})\right) = 0\,, \tag{25}$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} \equiv \left(K_m - \frac{2}{3}G_m\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi})\hat{\boldsymbol{I}} + G_m\left((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{s}} - \beta\frac{G}{G_m}(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}}\right) +$$

$$+ G'_m\left((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi})^{\mathrm{a}} - \beta'\frac{G'}{G'_m}(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right) - \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot (\alpha_1\mathbf{q} + \gamma_2\mathbf{p}) = 0\,. \tag{26}$$

Співвідношення (25), (26) дозволяють встановити поле імпульсу обертального руху $\mathbf{q}$ і тензора ґрадієнта локальних поворотів $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}$, які виникають у процесі деформування тіла в рамках моделі моментної теорії пружності:

$$\mathbf{q} = \frac{\rho}{\rho_*}\left\{\frac{\alpha\rho^2 G'_m + 2\alpha_1\gamma_2\rho}{\rho^2 G'_m - 2\alpha_1^2\rho_*}\mathbf{p} + \frac{\alpha_1\rho^2\beta' G' + \alpha_2\rho^2 G'_m}{\rho^2 G'_m - 2\alpha_1^2\rho_*}\boldsymbol{\nabla}_0 \times \mathbf{u}\right\},$$

$$\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi} = \beta\frac{G}{G_m}(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} + \frac{\rho^2\beta' G' + 2\alpha_1\alpha_2\rho_*}{\rho^2 G'_m - 2\alpha_1^2\rho_*}(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} + \frac{\alpha\alpha_1\rho_* + \gamma_2\rho}{\rho^2 G'_m - 2\alpha_1^2\rho_*}\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{p}\,.$$

Одержані співвідношення дозволяють також встановити такі модифіковані фізичні співвідношення для поля швидкостей поступального руху $\mathbf{v}$ і тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\left[(1 - \zeta_1)\mathbf{p} - (\gamma_1 + \zeta_3 + \zeta_5)\boldsymbol{\nabla}_0 \times \mathbf{u}\right], \tag{27}$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u})\hat{\boldsymbol{I}} + G\left(1 - \beta^2\frac{G}{G_m}\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} +$$

$$+ G'(1 - \zeta_2)(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} - \frac{1}{\rho}(\gamma_2 + \zeta_3 + \zeta_4)\mathbf{p}\,, \tag{28}$$

де

$$\zeta_1 = \frac{\alpha^2\rho\rho_* G'_m + 4\alpha\alpha_1\gamma_2\rho_* + 2\gamma_2^2\rho}{\rho^2 G'_m - 2\alpha_1^2\rho_*}\,,$$

$$\zeta_2 = \frac{\rho^2(\beta' G')^2 + 2\alpha_1\alpha_2\rho_*(\beta' G' + G'_m) + 2\alpha_1^2\rho_*\beta' G'}{G'(\rho^2 G'_m - 2\alpha_1^2\rho_*)}\,,$$

$$\zeta_3 = \frac{\rho\beta' G'(\alpha\alpha_1\rho_* + \gamma_2\rho)}{\rho^2 G'_m - 2\alpha_1^2\rho_*}\,,$$

$$\zeta_4 = \frac{\rho_*\alpha_1(\alpha\rho G'_m + 2\alpha_1\gamma_2)}{\rho^2 G'_m - 2\alpha_1^2\rho_*}\,,$$

$$\zeta_5 = \frac{\rho_*\alpha_2(\alpha\rho G'_m + 2\alpha_1\gamma_2)}{\rho^2 G'_m - 2\alpha_1^2\rho_*}\,.$$

Білінійній формі (19) з урахуванням модифікованих фізичних співвідношень (27), (28) відповідає така квадратична форма:

$$\begin{aligned} H_* = {} & \frac{1}{2\rho}(1-\zeta_1)\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + \frac{1}{2}\left(K - \frac{2}{3}G\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u})^2 + \\ & + G\left(1 - \beta^2 \frac{G}{G_m}\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} \cdot\cdot (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} + \\ & + \left(G' - \frac{\zeta_2}{G'}\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} \cdot\cdot \left((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right)^{\top} - \\ & - \frac{1}{2\rho}(\gamma_1 + \gamma_2 + 2\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5)\mathbf{p}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_0 \times \mathbf{u}) . \end{aligned} \tag{29}$$

Функцію (29) можна подати як суму двох складових – пружного потенціалу $E_*(\mathbf{p}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})$ і потенціалу розсіяння $J_*(\mathbf{p}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})$:

$$\begin{aligned} E_*(\mathbf{p}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}) = {} & \frac{1}{2\rho}(1-\zeta_1)\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + \frac{1}{2}\left(K - \frac{2}{3}G\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u})^2 + \\ & + G\left(1 - \beta^2 \frac{G}{G_m}\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} \cdot\cdot (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{s}} , \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} J_*(\mathbf{p}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u}) = {} & \left(G' - \frac{\zeta_2}{G'}\right)(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}} \cdot\cdot \left((\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{a}}\right)^{\top} - \\ & - \frac{1}{2\rho}(\gamma_1 + \gamma_2 + 2\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5)\mathbf{p}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_0 \times \mathbf{u}) . \end{aligned} \tag{31}$$

У співвідношенні (31) функція $J_*(\mathbf{p}, \boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})$ є додатно визначеною і характеризує релаксаційні ефекти, пов'язані з урахуванням додаткових ступенів вільності: поля вектора густини моментного імпульсу $\mathbf{q}$ і тензора ґрадієнта локальних поворотів $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \boldsymbol{\varphi}$.

Висновки. Результати модельного опису деформівних пружних систем на основі несиметричної теорії пружності та моментної теорії відповідно за дії заданого зовнішнього силового навантаження підтверджують необхідність ітераційного підходу до побудови математичних моделей з урахуванням галуження процесу деформування. При цьому густина енергії локального опису подається як сума пружної енергії та енергії розсіяння. Встановлено, що, якщо системі надати додаткові ступені вільності, які відповідають моментній теорії, то система, природно, використовує їх для зменшення свого енергетичного стану.

Отримані у роботі результати можуть бути використані також при постановці та розв'язуванні відповідних крайових задач про оптимізацію напружено-деформованого стану елементів тонкостінних конструкцій як при силовому навантаженні, так і в умовах нагріву [2, 6].

1. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – Київ: Наук. думка, 1974. – 272 с.
2. *Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д., Гера Б. В.* Оптимизация переходных процессов в термоупругих оболочках. – Киев: Наук. думка, 1984. – 157 с.
3. *Бурак Я. И., Мороз Г. И.* Вариационная постановка и исследование краевых задач нелинейной теории пластин с использованием энергетического подхода // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, № 6. – С. 977–985.
4. *Бурак Я. Й.* Математична модель потенціального опису нелінійних пружних систем // Доп. НАН України. – 1995. – № 2. – С. 41–49.
5. *Бурак Я. Й., Мороз Г. І.* Математичні проблеми нелінійної механіки пружних систем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45,** № 4. – С. 40–46.
6. *Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 364 с.
7. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 512 с.
8. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. – Москва: Изд-во Моск-го ун-та, 1986. – 262 с.
9. *Burak Y., Moroz H.* An variational approach and mathematical model for nonlinear mechanics of elastic systems // J. Appl. Comput. Sci. – 2004. – No. 2. – P. 17–26.

О ВАРИАЦИОННОМ ФОРМУЛИРОВАНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ВЕТВЛЕНИЯ ПРОЦЕССА ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Предложена вариационная постановка краевых задач механики упругих систем, находящихся под воздействием силового нагружения, как в рамках модели классической теории упругости, так и модели моментной теории упругости. Показано, что в рамках модели моментной теории при одном и том же внешнем силовом нагружении в упругом теле учитывается дополнительно релаксация напряженного состояния, которая приводит к уменьшению энергии упругого деформирования. При этом дополнительными внутренними степенями свободы являются вектор плотности моментного импульса и тензор градиента локального поворота.

ON VARIATIONAL FORMULATION OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF NONSYMMETRICAL ELASTICITY THEORY WITH TAKING INTO ACCOUNT BRANCHING STRAINING PROCESS

The variational formulations of boundary-value problems of mechanics of the elastic systems, which are under force loading, are proposed within the framework of classical model of elasticity theory and model of the couple elasticity theory. It is shown, that within the framework of model of couple elasticity theory at the same external force loading in an elastic body the relaxation of stressed state is taken into account in addition. This relaxation results in reduction of energy of elastic deformation. Thus additional internal degrees of freedom are the density vector of couple pulse and tensor of gradient of local rotation.

Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.08.07