УДК 517.53

М. М. Шеремета, О. А. Волох

ПРО ПОСЛІДОВНОСТІ МАКСИМАЛЬНИХ ЧЛЕНІВ ПОХІДНИХ ГЕЛЬФОНДА – ЛЕОНТЬЄВА ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

Для фіксованого $r > 0$ досліджено поведінку послідовності $\left(r^n \mu(r, D_\ell^n f)\right)$ при $n \to \infty$, де $D_\ell^n f$ – похідна Гельфонда – Леонтьєва цілої функції f відносно додатної функції ℓ, а $\mu(r, D_\ell^n f)$ – максимальний член степеневого розвинення функції $D_\ell^n f$.

Для $0 < R \le +\infty$ нехай $A(R)$ – клас аналітичних в крузі $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < < R\}$ функцій

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k , \tag{1}$$

а $A(0)$ – клас формальних степеневих рядів. Будемо говорити, що $f \in A^+(R)$, якщо $f \in A(R)$, $f_0 \ge 0$ і $f_k > 0$ для всіх $k \ge 1$.

Для $f \in A(0)$ і $\ell(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \ell_k z^k \in A^+(0)$ формальний степеневий ряд

$$D_\ell^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell_k}{\ell_{k+n}} f_{k+n} z^k \tag{2}$$

називається [1, 8] n-ю похідною Гельфонда – Леонтьєва. Якщо $\ell(z) = e^z$, тобто $\ell_k = 1/k!$, то $D_\ell^n f(z) = f^{(n)}(z)$ – звичайна n-а похідна функції f. Якщо ж $\ell(z) = \dfrac{1}{1-z}$, тобто $\ell_k = 1$ для всіх $k \ge 0$, то отримуємо оператор $D_\ell^n f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k+n} z^k$, який використовувався в [3]. Вважатимемо надалі, що f – ціла функція. Нарешті, нехай $\mu(r, f) = \max\left\{|f_n| r^n : n \ge 0\right\}$ – максимальний член ряду (1), а $\nu(r, f) = \max\left\{n : |f_n| r^n = \mu(r, f)\right\}$ – його центральний індекс.

Метою цієї роботи є вивчення поведінки послідовності $\left(\mu(r, D_\ell^n f)\right)$ при $n \to \infty$ для фіксованого $r > 0$. Для цього нам потрібно спочатку вияснити, за яких умов на послідовність (ℓ_k) функція $D_\ell^n f$ є також цілою. Правильне таке твердження.

Твердження 1. *Для того щоб для кожної цілої функції f похідна Гельфонда – Леонтьєва $D_\ell^n f$ була цілою функцією, необхідно та достатньо, щоб*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{\ell_k}{\ell_{k+1}}} < +\infty . \tag{3}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $D_\ell^n f = D_\ell^1 (D_\ell^{n-1} f)$, то досить довести твердження 1 для $n = 1$. За умовою (3) для радіуса $R[D_\ell^1 f]$ збіжності ряду (2) з $n = 1$ маємо

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007. – 50, № 3. – С. 120-128.

$$\frac{1}{R[D_\ell^1 f]} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{\ell_k f_{k+1}}{\ell_{k+1}}} \le \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{\ell_k}{\ell_{k+1}}}\ \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{f_{k+1}} = 0\,,$$

тобто $D_\ell^1 f$ – ціла функція. *Достатність* умови (3) доведено.

Доведемо її *необхідність*. Припустимо, що $\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{\ell_k}{\ell_{k+1}}} = +\infty$. Тоді існують зростаюча послідовність (k_n) натуральних чисел і послідовність (ω_n) додатних чисел такі, що $\omega_n \to \infty$ $(n\to\infty)$ і $\frac{\ell_{k_n}}{\ell_{k_n+1}} = (\omega_n)^{k_n}$ $(n \ge 1)$. Нехай $f_k = 0$ для $k \ne k_n + 1$ і $f_{k_n+1} = (\omega_n)^{-k_n/2}$. Тоді

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{f_{k+1}} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{f_{k_n+1}} = \varlimsup_{n\to\infty} (\omega_n)^{-1/2} = 0\,,$$

тобто f – ціла функція. З іншого боку, $\frac{\ell_{k_n} f_{k_n+1}}{\ell_{k_n+1}} = (\omega_n)^{k_n/2} \to +\infty,\ n\to\infty$, тобто $D_\ell^1 f$ не є цілою функцією. Твердження 1 доведено. ◊

Вважаємо надалі умову (3) виконаною. На зв'язок між послідовностями максимальних членів $\mu(r, D_\ell^n f) = \max\left\{ \frac{\ell_k}{\ell_{k+n}} |f_{k+n}| r^k : k \ge 0 \right\}$ і центральних індексів $\nu(r, D_\ell^n f) = \max\left\{ k \ge 0 : \frac{\ell_k}{\ell_{k+n}} |f_{k+n}| r^k = \mu(r, D_\ell^n f) \right\}$ похідних Гельфонда –Леонтьєва вказує наступне твердження.

Твердження 2. *Якщо* $\nu(r, D_\ell^n f) \ge 1$, *то*

$$\frac{\ell_{\nu(r,D_\ell^n f)-1}}{\ell_{\nu(r,D_\ell^n f)}} \le \frac{r^{n+1}\mu(r, D_\ell^{n+1} f)}{r^n \mu(r, D_\ell^n f)} \le \frac{\ell_{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)}}{\ell_{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)+1}}. \tag{4}$$

Д о в е д е н н я. За означенням маємо

$$\mu(r, D_\ell^{n+1} f) = \frac{\ell_{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)}}{\ell_{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)+n+1}} \left| f_{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)+n+1} \right| r^{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)} =$$

$$= \frac{\ell_{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)}}{r\ell_{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)+1}} \frac{\ell_{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)+1}}{\ell_{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)+1+n}} \left| f_{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)+1+n} \right| r^{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)+1} \le$$

$$\le \frac{\ell_{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)}}{r\ell_{\nu(r,D_\ell^{n+1} f)+1}} \mu(r, D_\ell^n f)\,,$$

а якщо $\nu(r, D_\ell^n f) \ge 1$, то

$$\mu(r, D_\ell^n f) = \frac{\ell_{\nu(r,D_\ell^n f)}}{\ell_{\nu(r,D_\ell^n f)+n}} \left| f_{\nu(r,D_\ell^n f)+n} \right| r^{\nu(r,D_\ell^n f)} =$$

$$= \frac{r\ell_{\nu(r,D_\ell^n f)}}{\ell_{\nu(r,D_\ell^n f)-1}} \frac{\ell_{\nu(r,D_\ell^n f)-1}}{\ell_{\nu(r,D_\ell^n f)-1+n+1}} \left| f_{\nu(r,D_\ell^n f)-1+n+1} \right| r^{\nu(r,D_\ell^n f)-1} \le$$

$$\le \frac{r\ell_{\nu(r,D_\ell^n f)}}{\ell_{\nu(r,D_\ell^n f)-1}} \mu(r, D_\ell^{n+1} f)\,.$$

З цих нерівностей випливають нерівності (4). Твердження 2 доведено. ◊

Легко побачити, що, якщо $\ell_0 = 0$, то $\nu(r, D_\ell^n f) \ge 1$ і

$$\mu(r, D_\ell^n f) = \hat{\mu}(r, D_\ell^n f) := \max\left\{ \frac{\ell_k}{\ell_{k+n}} |f_{k+n}| r^k : k \ge 1 \right\} \tag{5}$$

для всіх $r \ge 0$ і $n \ge 1$. Рівність (5) може бути правильною і у випадку, коли $\ell_0 > 0$ (не втрачаючи загальності, можемо вважати, що $\ell_0 = 1$), але за додаткових умов на функції f та ℓ. Наприклад, якщо позначимо

$$æ_k(\ell) = \frac{\ell_k}{\ell_{k+1}}, \qquad æ_k(f) = \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|},$$

то матимемо наступне твердження.

Твердження 3. *Якщо* $\ell_0 = 1$ *і* $\dfrac{æ_n(f)}{æ_n(\ell)} \le q < +\infty$ *для всіх* $n \ge 1$, *то рівність* (5) *правильна для всіх* $n \ge 1$ *і всіх* $r > \dfrac{q}{\ell_1}$.

Справді, для $r > \dfrac{q}{\ell_1}$ маємо

$$\hat{\mu}(r, D_\ell^n f) = \max\left\{ \frac{\ell_k}{\ell_{k+n}} |f_{k+n}| r^k : k \ge 1 \right\} \ge \frac{\ell_1}{\ell_{1+n}} |f_{1+n}| r > q \frac{|f_{n+1}|}{\ell_{n+1}} \ge$$
$$\ge \frac{æ_n(f)}{æ_n(\ell)} \frac{|f_{n+1}|}{\ell_{n+1}} = \frac{|f_n|}{\ell_n} = \frac{\ell_0}{\ell_n} |f_n|,$$

тобто $\mu(r, D_\ell^n f) = \max\left\{ \dfrac{\ell_0}{\ell_n} |f_n|, \hat{\mu}(r, D_\ell^n f) \right\} = \hat{\mu}(r, D_\ell^n f)$ і $\nu(r, D_\ell^n f) \ge 1$.

Наступна теорема вказує на поведінку послідовностей $\left(\nu(r, D_\ell^n f) + n\right)$ і $\left(r^n \mu(r, D_\ell^n f)\right)$ при $n \to \infty$ для фіксованого r.

Теорема 1. *Нехай* $\ell_0 = 1$ *і послідовність* $\left(æ_n(\ell)\right)$ *неспадна,* $\dfrac{æ_n(f)}{æ_n(\ell)} \le$ $\le q < +\infty$, $n \ge 1$ *і* $r > \dfrac{q}{\ell_1}$. *Тоді*

(*i*) *послідовність* $\left(\nu(r, D_\ell^n f) + n\right)$ *неспадна і прямує до* $+\infty$ *при* $n \to +\infty$;

(*ii*) *за умови* $\ell_1 \le 1$ *послідовність* $\left(r^n \mu(r, D_\ell^n f)\right)$ *є неспадною, а якщо* $\ell_1 < 1$, *то* $r^n \mu(r, D_\ell^n f) \uparrow +\infty$, $n \to \infty$, *і*

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{\ln\left(r^n \mu(r, D_\ell^n f)\right)}{n} \ge \ln \frac{1}{\ell_1}. \tag{6}$$

Д о в е д е н н я. За твердженням 3 $\nu(r, D_\ell^n f) \ge 1$. Тому з (4) випливає, що $æ_{\nu(r, D_\ell^n f)-1}(\ell) \le æ_{\nu(r, D_\ell^{n+1} f)}(\ell)$ і з огляду на неспадання послідовності $\left(æ_n(\ell)\right)$ маємо $\nu(r, D_\ell^n f) - 1 \le \nu(r, D_\ell^{n+1} f)$, тобто послідовність $\left(\nu(r, D_\ell^n f) + n\right)$ неспадна і прямує до $+\infty$ при $n \to +\infty$.

Якщо ж $\ell_1 \le 1$, то $æ_0(\ell) > 1$ і з (4) випливає неспадання послідовності $\left(r^n \mu(r, D_\ell^n f)\right)$, а якщо $\ell_1 < 1$, то $æ_0(\ell) > 1$ і ця послідовність є зростаючою до $+\infty$ при $n \to +\infty$. Більше того, $r^n \mu(r, D_\ell^n f) \ge \dfrac{1}{\ell_1^n}$, звідки випливає нерівність (6). Теорему 1 доведено. ◊

Припустимо тепер, що $\ell_0 = 0$. Тоді $\nu(r, D_\ell^n f) \geq 1$ для кожного $r \geq 0$ і, якщо послідовність $(æ_n(\ell))$ неспадна, то з (4), як вище, випливає нерівність $\nu(r, D_\ell^n f) \leq \nu(r, D_\ell^{n+1} f) + 1$, тобто послідовність $(\nu(r, D_\ell^n f) + n)$ неспадна і прямує до $+\infty$ при $n \to +\infty$, яке б не було $r \geq 0$.

Зауважимо, що оцінка $\nu(r, D_\ell^n f) \leq \nu(r, D_\ell^{n+1} f) + 1$ непокращувана. Щоб це показати, виберемо $\ell_k = \ell_1^k$ для всіх $k \geq 1$ і припустимо, що ціла функція f така, що $æ_k(f) \uparrow +\infty,\ k \to \infty$. Тоді $\nu(r, f) = k$ і $\mu(r, f) = |f_k| r^k$ для $æ_{k-1}(f) \leq r < æ_k(f)$, а

$$D_\ell^n f(z) = \frac{1}{\ell_1^n} \sum_{k=1}^{\infty} f_{k+n} z^k. \tag{7}$$

Оскільки $æ_{k-1}(D_\ell^{n+1} f) = æ_k(D_\ell^n f)$, $æ_k(D_\ell^n f) = æ_{k+n}(f)$ і $æ_k(D_\ell^{n+1} f) = æ_{k+n+1}(f)$, то для $r \in [æ_{k+n}(f), æ_{k+n+1}(f))$ маємо $\nu(r, D_\ell^n f) = k + 1$ і $\nu(r, D_\ell^{n+1} f) = k$, тобто $\nu(r, D_\ell^n f) = \nu(r, D_\ell^{n+1} f) + 1$, що вказує на непокращуваність оцінки $\nu(r, D_\ell^n f) \leq$ $\leq \nu(r, D_\ell^{n+1} f) + 1$.

У зв'язку з неспаданням послідовності $(\nu(r, D_\ell^n f) + n)$ для будь-якого $r \geq 0$ за умов $\ell_0 = 0$ і неспадання послідовності $(æ_n(\ell))$ виникає питання, чи за таких умов послідовність $(r^n \mu(r, D_\ell^n f))$ є також неспадною для будь-якого $r \geq 0$. Приклад ряду (7) на це питання дає негативну відповідь, бо для нього

$$r^n \mu(r, D_\ell^n f) = \frac{1}{\ell_1^n} \max\{|f_{k+n}| r^{k+n} : k \geq 1\} \leq \frac{\mu(r, f)}{\ell_1^n}, \tag{8}$$

і, якщо $\ell_1 > 1$, то $r^n \mu(r, D_\ell^n f) \to 0,\ n \to \infty$, а якщо $\ell_1 = 1$, то $r^n \mu(r, D_\ell^n f) \leq$ $\leq \mu(r, f)$, яке б не було $r > 0$. Отже, послідовність $(r^n \mu(r, D_\ell^n f))$ може бути незростаючою. Зауважимо, що з (8) для ряду (7) випливає протилежна до (6) оцінка $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln(r^n \mu(r, D_\ell^n f))}{n} \leq \ln \dfrac{1}{\ell_1}$, яке б не було $\ell_1 > 0$.

Припустимо тепер, що $f_k = \dfrac{1}{q^k} \ell_k$, $q > 0$, для всіх $k \geq 0$. Тоді $æ_n(f) =$ $= q_n æ(\ell)$, $n \geq 0$, $D_\ell^n f(z) = \dfrac{1}{q^n} \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ і $r^n \mu(r, D_\ell^n f) = \left(\dfrac{r}{q}\right)^n \mu(r, f)$, тобто послідовність $(r^n \mu(r, D_\ell^n f))$ може бути зростаючою до $+\infty$ при $n \to \infty$ тільки за умови $r > q$, незалежно від того, якими є $\ell_0 \geq 0$ і $\ell_1 > 0$.

Перейдемо до оцінок зверху. Якщо $æ_k(\ell) \nearrow æ(\ell) \leq +\infty,\ k \to \infty$, то $\mu(r, D_\ell^n f) \leq æ(\ell)^n \mu(r, f)$, тобто

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(r^n \mu(r, D_\ell^n f))}{n} \leq \ln æ(\ell). \tag{9}$$

Клас функцій $\ell \in A^+(0)$, для яких $æ_k(\ell) \nearrow æ(\ell) < +\infty,\ k \to \infty$, досить вузький, а у випадку, коли $æ_k(\ell) \nearrow +\infty,\ k \to \infty$, оцінка (9) тривіальна і не дає належної інформації. Вважаючи, що $æ_k(\ell) \nearrow +\infty,\ k \to \infty$, продовжимо дослідження асимптотичної поведінки послідовності $(r^n \mu(r, D_\ell^n f))$.

Почнемо із загального випадку, коли виконується тільки умова (3), з якої випливає існування такого числа $q > 1$, що $\dfrac{\ell_k}{\ell_{k+1}} \le q^k$. Тоді

$$\frac{\ell_k}{\ell_{k+n}} = \frac{\ell_k}{\ell_{k+1}} \frac{\ell_{k+1}}{\ell_{k+2}} \ldots \frac{\ell_{k+n-1}}{\ell_{k+n}} \le q^k q^{k+1} \ldots q^{k+n-1} = q^{nk+n(n-1)/2} \le q^{(k+n)n},$$

і, отже,

$$r^n \mu(r, D_\ell^n f) \le \max\left\{q^{(k+n)n} |f_{k+n}| r^{k+n} : k \ge 0\right\} = \mu(rq^n, f). \tag{10}$$

Звідси випливає, що швидкість зростання послідовності $\left(r^n \mu(r, D_\ell^n f)\right)$ при $n \to \infty$ залежить від швидкості зростання $\ln \mu(r, f)$ при $r \to +\infty$. Для характеристики зростання $\ln \mu(r, f)$ використовують різні шкали зростання, найзагальнішою з яких є шкала узагальнених порядків [7].

Через L позначимо клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій і будемо говорити, що $\sigma \in L^0$, якщо $\sigma \in L$ і $\sigma((1+o(1))x) = (1+o(1))\sigma(x)$, $x \to +\infty$, а $\sigma \in L_{nз}$, якщо $\sigma \in L$ і $\sigma(cx) = (1+o(1))\sigma(x)$, $x \to +\infty$, для кожного $c \in (0, +\infty)$, тобто σ є повільно зростаючою функцією.

Нехай $\sigma \in L$, $\beta \in L$, f – ціла функція і $M(r,f) = \max\left\{|f(z)| : |z| = r\right\}$. Узагальненим порядком функції f називають [7] величину $\rho_{\sigma\beta}[f] = \varlimsup\limits_{r\to+\infty} \dfrac{\sigma(\ln M(r,f))}{\beta(\ln r)}$.

Теорема 2. *Нехай* $\sigma \in L$, $\beta \in L$, $\rho_{\sigma\beta}[f] < +\infty$ *і виконується умова* (3). *Тоді, якщо* $\beta \in L^0$, *то*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\sigma\left(\ln\left\{r^n \mu(r, D_\ell^n f)\right\}\right)}{\beta(n)} < +\infty, \tag{11}$$

а якщо $\beta \in L_{ns}$, *то*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\sigma\left(\ln\left\{r^n \mu(r, D_\ell^n f)\right\}\right)}{\beta(n)} \le \rho_{\sigma\beta}[f]. \tag{12}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $\rho_{\sigma\beta}[f] < +\infty$, то для кожного $\rho > \rho_{\sigma\beta}[f]$ і всіх $r \ge r_0(\rho)$ з огляду на нерівність Коші маємо $\ln \mu(r,f) \le \ln M(r,f) \le \sigma^{-1}(\rho\beta(\ln r))$. Тому для кожного $r > 0$ і всіх досить великих n з (10) отримуємо

$$\ln\left\{r^n \mu(r, D_\ell^n f)\right\} \le \sigma^{-1}\left(\rho\beta(\ln r + n\ln q)\right). \tag{13}$$

Якщо $\beta \in L_{nз}$, то $\beta(\ln r + n\ln q) = \left(1+o(1)\right)\beta(n)$, $n \to \infty$, для будь-яких фіксованих $r > 0$ і $q > 1$, тому з нерівності (13) з огляду на довільність ρ отримуємо нерівність (12).

Якщо $\beta \in L^0$, то [9], для кожного $c \in (0, +\infty)$ існує $\lambda(c) \in (0, +\infty)$ таке, що $\beta(cx) \le \lambda(c)\beta(x)$ для всіх $x \ge x_0$. Тому з (13) отримуємо нерівність $\sigma\left(\ln\left\{r^n \mu(r, D_\ell^n f)\right\}\right) \le \lambda\beta(n)$, де λ – додатна стала, незалежна від n, звідки випливає (11). Теорему 2 доведено. ◊

Зауважимо, що, якщо $\beta(x) \equiv x$, то з (13) отримуємо

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\sigma\left(\ln\left\{r^n \mu(r, D_\ell^n f)\right\}\right)}{n} \le \ln q \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\sigma(\ln M(r,f))}{\ln r}. \tag{14}$$

Теорема 3. *Якщо* $\frac{\ell_k}{\ell_{k+1}} \le q^k$, $q>1$, *для всіх* $k \ge k_0$, *то для цілої функції* f *порядку* ρ *правильна непокращувана оцінка*

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln\{r^n\mu(r,D_\ell^n f)\}}{n} \le \rho\ln q. \tag{15}$$

Д о в е д е н н я. Оцінка (15) випливає з оцінки (14), якщо вибрати $\sigma(x) \equiv \ln x$, $x \ge x_0$.

Щоб довести точність оцінки (15), для всіх k приймемо $\frac{\ell_k}{\ell_{k+1}} \equiv q^k$, $q>1$, і розглянемо класичну функцію Міттаг – Леффлера $E_\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(1+\frac{k}{\rho}\right)}$, $\rho>0$.

Добре відомо (див., наприклад, [2, с. 114]), що $\ln M(r,E_\rho) = \ln E_\rho(r) = r^\rho + O(1)$ при $r\to+\infty$. За теоремою Бореля (див., наприклад, [4, с. 17]) $\ln M(r,f) \sim \ln\mu(r,f)$ при $r\to+\infty$ для кожної цілої функції скінченного порядку. Тому $\ln\mu(r,E_\rho) = (1+o(1))r^\rho$ при $r\to+\infty$.

Оскільки [6, с. 35] $\frac{d^2}{dx^2}\ln\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2} > 0$, $x\ge 0$, то функція $\ln\Gamma(1+x)$ опукла на $[0,+\infty)$. Звідси випливає, що

$$2\ln\Gamma\left(1+\frac{n}{\rho}\right) < \ln\Gamma\left(1+\frac{(n-1)}{\rho}\right) + \ln\Gamma\left(1+\frac{(n+1)}{\rho}\right),$$

тобто $æ_n(E_\rho) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{n+1}{\rho}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n}{\rho}\right)} \uparrow +\infty$, $n\to\infty$. Використовуючи формулу Стірлінга [6, с. 39] $\Gamma(x) = x^{x-1/2}e^{-x}(2\pi)^{1/2}e^{\theta/(12x)}$, $0\le\theta\le 1$, неважко показати, що $æ_n(E_\rho) = (1+o(1))(n/\rho)^{1/\rho} = o(rq^n)$, $n\to\infty$, для будь-яких фіксованих $r>0$ і $q>1$.

Зауважимо ще, що якщо f – ціла функція, $æ_n(f)\uparrow+\infty$, $n\to\infty$, і $r > æ_n(f)$, тобто $æ_{j-1}(f) \le r \le æ_j(f)$ для деякого $j\ge n+1$, то $\mu(r,f) = |f_j|r^j = \max\{|f_k|r^k : k\ge n\}$. Тому, оскільки $rq^n \ge æ_n(E_\rho)$ для $n\ge n_0$, маємо

$$r^n\mu(r,D_\ell^n E_\rho) = \max\left\{\frac{\ell_k}{\ell_{k+n}}\frac{r^{k+n}}{\Gamma\left(1+\frac{k+n}{\rho}\right)} : k\ge 0\right\} =$$

$$= q^{-n(n+1)/2}\max\left\{\frac{(rq^n)^{k+n}}{\Gamma\left(1+\frac{k+n}{\rho}\right)} : k\ge 0\right\} =$$

$$= q^{-n(n+1)/2}\max\left\{\frac{(rq^n)^{k}}{\Gamma\left(\frac{1+k}{\rho}\right)} : k\ge n\right\} = q^{-n(n+1)/2}\mu(rq^n,E_\rho),\ n\ge n_0.$$

Оскільки $n(n+1)/2 = o(\ln\mu(rq^n,E_\rho))$, $n\to\infty$, то звідси отримуємо

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln\{r^n\mu(r,D_\ell^n E_\rho)\}}{n}=\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln\ln\mu(rq^n,E_\rho)}{n\ln q+\ln r}\lim_{r\to+\infty}\frac{n\ln q+\ln r}{n}=\rho\ln q,$$

тобто оцінка (15) точна.

Для дослідження поведінки послідовності $\left(r^n\mu(r,D_\ell^n f)\right)$ можна використати результати з [5] про функції, спряжені за Юнґом.

Припустимо, що $æ_k(\ell)\uparrow+\infty,\ k\to\infty$. Тоді $\dfrac{\ell_k}{\ell_{k+n}}\le æ_{k+n}^n(\ell)$ і, отже,

$$r^n\mu(r,D_\ell^n f)\le\max\left\{æ_{k+n}^n(\ell)|f_{k+n}|r^{k+n}:k\ge0\right\}\le$$

$$\le\max\left\{æ_k^n(\ell)|f_k|r^k:k\ge0\right\}=\mu(n,F_r),\tag{16}$$

де $\mu(\sigma,F_r)=\max\left\{|f_k|r^k e^{\sigma\ln æ_k(\ell)}:k\ge0\right\}$ – максимальний член послідовності $F_r=\left(|f_k|r^k e^{\sigma\ln æ_k(\ell)}\right)$. Він існує, оскільки з умови (3) випливає, що $\ln æ_k(\ell)=$ $=O(k),\ k\to\infty$, $|f_k|^{1/k}=o(1),\quad k\to\infty$, і, отже, $|f_k|r^k e^{\sigma\ln æ_k(\ell)}\to0,\ k\to\infty$, для будь-яких фіксованих $r>0$ і $\sigma\in R$.

Нехай $\Omega(+\infty)$ – клас додатних на $(-\infty,+\infty)$ функцій Φ таких, що похідні Φ' є неперервно диференційовні, додатні та зростають до $+\infty$ $(-\infty,+\infty)$. Через φ позначимо функцію, обернену до Φ', і нехай $\Psi(\sigma)=$ $=\sigma-\dfrac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном. З теореми 1 з [5] випливає твердження: *для того щоб* $\ln\mu(\sigma,F_r)\le\Phi(\sigma)\in\Omega(+\infty)$ *для всіх* $\sigma\ge\sigma_0$, *необхідно та достатньо, щоб* $\ln|f_k|r^k\le-\ln æ_k(\ell)\Psi\left(\varphi(\ln æ_k(\ell))\right)$ *для всіх* $k\ge k_0$. Тому з (16) отримуємо таку теорему.

Теорема 4. *Нехай* $\Phi\in\Omega(+\infty)$. *Якщо* $\ln|f_k|r^k\le-\ln æ_k(\ell)\Psi\left(\varphi(\ln æ_k(\ell))\right)$ *для всіх* $k\ge k_0$, *то* $\ln\{r^n\mu(r,D_\ell^n f)\}\le\Phi(n)$ *для всіх* $n\ge n_0$.

Вибираючи тим чи іншим чином функцію $\Phi\in\Omega(+\infty)$, з теореми 4 можемо отримати відповідні наслідки. Зупинимось тільки на випадку $\Phi(\sigma)=$ $=Te^{\rho\sigma}(\sigma\ge\sigma_0)$, $0<\rho<+\infty$, який відповідає шкалі скінченного порядку. Тоді $x\Psi(\varphi(x))=\dfrac{x}{\rho}\ln\dfrac{x}{eT\rho}$, $x\ge x_0$. Тому за теоремою 4 маємо, що $\ln\{r^n\mu(r,D_\ell^n f)\}\le$ $\le Te^{\rho n}$ для всіх $n\ge n_0$, якщо тільки $\ln\left(|f_k|r^k\right)\le-\dfrac{\ln æ_k(\ell)}{\rho}\ln\dfrac{\ln æ_k(\ell)}{eT\rho}$, $k\ge k_0$. Звідси легко випливає нерівність

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\ln\{r^n\mu(r,D_\ell^n f)\}}{e^{\rho n}}\le\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\ln æ_k(\ell)}{e\rho}\left(|f_k|r^k\right)^{\rho/\ln æ_k(\ell)}.\tag{17}$$

Оцінку (17), як і оцінку (15), покращити не можна. Справді, якщо $\ln æ_k(\ell)=k$, то для функції Міттаг – Леффлера, як вище (з $q=e$), маємо

$$\frac{\ln\{r^n\mu(r,D_\ell^n E_\rho)\}}{e^{\rho n}}=\frac{-n(n+1)}{2e^{\rho n}}+\frac{\ln\mu(re^n,E_\rho)}{e^{\rho n}}=\left(1+o(1)\right)r^\rho,\quad n\to\infty.$$

З іншого боку,

$$\frac{\ln æ_n(\ell)}{e\rho}\left(|f_n r^n|\right)^{\rho/\ln æ_n(\ell)}=\frac{n}{e\rho}\left(\frac{r^n}{\Gamma(1+n/\rho)}\right)^{\rho/n}=\left(1+o(1)\right)r^\rho,\quad n\to\infty,$$

тобто нерівність (17) перетворюється у рівність.

На завершення розглянемо випадок, коли $D_\ell^n f = f^{(n)}$, тобто $æ_k(\ell) = = \dfrac{\ell_k}{\ell_{k+1}} = k+1$ і

$$r^n\mu(r, f^{(n)}) = \max\{(k+1)\ldots(k+n)|f_{k+n}|r^{k+n} : k \ge 0\}. \tag{18}$$

Ясно, що $(k+1)\ldots(k+n) \le (k+n)^n$. З іншого боку, для будь-якого $\varepsilon \in (0,1)$

$$(k+1)\ldots(k+n) \ge (k+[\varepsilon n]+1)\ldots(k+n) \ge (k+[\varepsilon n]+1)^{n-[\varepsilon n]} =$$

$$= \left(\frac{k+[\varepsilon n]+1}{k+n}\right)^{n-[\varepsilon n]}(k+n)^{n-[\varepsilon n]} \ge \varepsilon^{n-[\varepsilon n]}(k+n)^{n-[\varepsilon n]} \ge$$

$$\ge \varepsilon^n (k+n)^{n(1-\varepsilon)-1}.$$

Тому з (18) отримуємо

$$\varepsilon^n \max\{k^{n(1-\varepsilon)-1}|f_k|r^k : k \ge n\} \le r^n\mu(r, f^{(n)}) \le$$

$$\le \max\{k^n|f_k|r^k : k \ge n\}. \tag{19}$$

Оскільки $\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{1}{|f_k|} - \ln r \ge 1$ для $k \ge k_0(r)$, то для $n \ge k_0(r)$ отримуємо

$$\max\{k^n|f_k|r^k : k \ge n\} =$$

$$= \max\left\{\exp\left\{-k\left(\frac{1}{k}\ln\frac{1}{|f_k|} - \ln r\right) + n\ln k\right\} : k \ge n\right\} \le$$

$$\le \exp\{\max\{-k + n\ln k : k \ge 1\}\} \le \exp\{-n + n\ln n\}.$$

Тому з правої нерівності (19) одержуємо нерівність

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln\{r^n\mu(r, f^{(n)})\}}{n\ln n} \le 1. \tag{20}$$

Вияснимо точність оцінки (20). З лівої нерівності (19) для будь-якого $\varepsilon \in (0,1)$ маємо

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln\{r^n\mu(r, f^{(n)})\}}{n\ln n} \ge \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\ln\{\max\{k^{n(1-\varepsilon)}|f_k|r^k : k \ge n\}\}}{n\ln n}. \tag{21}$$

Припустимо, що $f_k = \exp\{-k\ln\ln k\}$ для $k \ge 3$ і розглянемо функцію $g(x) = -x\ln\ln x + n(1-\varepsilon)\ln x + x\ln r,\ x \ge 3$. Очевидно, що

$$g'(x) = -\ln\ln x - \frac{1}{\ln x} + \frac{n(1-\varepsilon)}{x} + \ln r$$

і

$$g''(x) = -\frac{1}{(x\ln x)} + \frac{1}{(x\ln^2 x)} - \frac{n(1-\varepsilon)}{x^2} < 0.$$

Тому функція g має єдину точку максимуму $x = x_*(n)$ таку, що

$$x_*(n)\ln\ln x_*(n) + x_*(n)\frac{1}{\ln x_*(n)} = n(1-\varepsilon) + x_*(n)\ln r.$$

Звідси випливає, що $x_*(n) = o(n),\ n \to \infty$, тобто $x_*(n) < n$ для $n \ge n_0$. На $(x_*(n), +\infty)$ (і, отже, на $[n, +\infty)$) функція g спадна, тому

$$\max\{-k\ln\ln k + n(1-\varepsilon)\ln k + k\ln r : k \ge n\} =$$

$$= -n\ln\ln n + n(1-\varepsilon)\ln n + n\ln r =$$

$$= (1+o(1))n(1-\varepsilon)\ln n, \qquad n \to \infty.$$

Звідси і з (21) випливає, що для цілої функції з коефіцієнтами $f_k = \exp\{-k\ln\ln k\}$, $k \ge 3$, справджується нерівність

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln\{r^n\mu(r,f^{(n)})\}}{n\ln n} \ge 1-\varepsilon ,$$

тобто з огляду на довільність ε в (20) досягається рівність і, отже, доведено наступну теорему.

Теорема 5. *Для кожної цілої функції* f *оцінка* (20) *є правильною і непокращуваною.*

1. *Гельфонд А. О., Леонтьев А. Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье // Мат. сб. – 1951. – **29**, № 3. – С. 477–500.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – 1970. – 591 с.
3. *Казьмин Ю. А.* Об интерполяционной проблеме I // Сиб. мат. журн. – 1967. – С. 293–312.
4. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. – Москва: Наука, 1978. – 431 с.
5. *Сумик О. М., Шеремета М. М.* Про зростання спряжених за Юнгом функцій // Мат. студії. – 1999. – **11**, № 2. – С. 221–224.
6. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа.– Москва: Гостехиздат, 1963. – Ч. 2. – 515 с.
7. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэфициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 100–108.
8. *Шеремета М. Н.* О степенных рядах с удовлетворяющими специальному условию производными Гельфонда–Леонтьева // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1996. – **3**, № 3/4. – С. 423–445.
9. *Sheremeta M. M.* On two classes of positive functions and the belonging of main characteristics of entire functions then // Мат. студії. – 2003. – **19**, № 1. – P. 75–82.

О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ МАКСИМАЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ ПРОИЗВОДНЫХ ГЕЛЬФОНДА – ЛЕОНТЬЕВА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

Для фиксированного $r > 0$ *исследовано поведение последовательности* $\left(r^n\mu(r,D_\ell^n f)\right)$ *при* $n\to\infty$, *где* $D_\ell^n f$ *– производная Гельфонда – Леонтьева целой функции* f *по положительной функции* ℓ, *а* $\mu(r,D_\ell^n f)$ *– максимальный член степенного разложения функции* $D_\ell^n f$.

ON THE SEQUENCES OF MAXIMAL TERMS OF GELFOND – LEONT'EV DERIVATIVES OF ENTIRE FUNCTION

For fixed $r > 0$ *the behaviuor of the sequence* $\left(r^n\mu(r,D_\ell^n f)\right)$ *as* $n\to\infty$ *is investigated, where* $D_\ell^n f$ *is the Gelfond – Leont'ev derivative of an entire function* f *by a positive function* ℓ *and* $\mu(r,D_\ell^n f)$ *is a maximal term of the power development of* $D_\ell^n f$.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
26.04.06