УДК 517.956.4

С. П. Лавренюк, Г. Р. Торган

НЕОБМЕЖЕНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ У СКІНЧЕННИЙ МОМЕНТ ЧАСУ ОДНОГО СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Одержано умови, при яких узагальнений розв'язок слабко нелінійного параболічного рівняння з другою похідною за часом стає необмеженим у скінченний момент часу.

Параболічне рівняння з другою похідною за часом і четвертими похідними за просторовими змінними вигляду

$$u_{tt} = \operatorname{div} \sigma(\nabla u) + \Delta u_t - \delta^2 \Delta^2 u ,$$

де $\sigma \ge 0$, $0 < \delta < 1$, моделює процеси фазового переходу у в'язкопружних середовищах з капілярністю. Задачі для нелінійних рівнянь такого типу досліджено в [4–7].

Крім того, в працях [1, 2] вивчено змішані задачі для певних квазілінійних параболічних рівнянь четвертого порядку в узагальнених просторах Лебеґа. Для квазілінійних еволюційних рівнянь високого порядку з другою похідною за часовою змінною, які містять, зокрема, деякі параболічні рівняння, у праці [3] досліджено принцип Фрагмена – Ліндельофа.

У цій праці одержано умови, при яких узагальнений розв'язок слабко нелінійного параболічного рівняння четвертого порядку стає необмеженим у скінченний момент часу.

Нехай Ω – обмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$; $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$; $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$.

В області Q_T розглянемо задачу для рівняння з дійснозначними коефіцієнтами

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,\ell=1}^{n} (a_{ij}^{s\ell}(x) u_{x_i x_j})_{x_s x_\ell} - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x) |u_{tx_i}|^{q-2} u_{x_i t})_{x_i} - \tag{1}$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + a_0(x) u_t + b_0(x) u = c_0(x) |u|^{p-2} u$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), \tag{1}$$

і крайовими умовами

$$u\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \tag{2}$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega \times (0,T)$.

Припустимо виконання таких умов:

(**A**)

$$a_{ij}^{s\ell} \in L^\infty(\Omega), \qquad a_{ij}^{s\ell} = a_{s\ell}^{ij} \qquad \text{в} \qquad \Omega ,$$

$$\sum_{i,j,s,\ell=1}^{n} a_{ij}^{s\ell}(x) \xi_{ij} \xi_{s\ell} \ge A_0 \sum_{i,j=1}^{n} |\xi_{ij}|^2 , \qquad A_0 > 0 ,$$

для майже всіх $x \in \Omega$ і всіх $\xi_{ij} \in \mathbb{R}$,

$$a_i \in L^\infty(\Omega), \qquad i = 0, \ldots, n ,$$

$$a_0(x) \ge 0, \qquad a_i \ge \alpha_0 > 0, \qquad i = 1, \ldots, n ;$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007. – 50, № 3. – С. 88-93.

(**B**)

$$b_{ij} \in L^{\infty}(\Omega), \qquad b_{ij} = b_{ji}\,,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge 0 \qquad \text{для всіх} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,,$$

$$b_0 \in L^{\infty}(\Omega), \qquad b_0(x) \ge 0\,;$$

(**C**)

$$c_0 \in L^{\infty}(\Omega), \qquad c_0(x) \ge \gamma_0 > 0\,;$$

(**P**)

$$p \in \left(2, \frac{2n}{n-4}\right) \quad \text{при} \quad n > 4 \quad \text{і} \quad p > 2 \quad \text{при} \quad n = 1, \ldots, 4\,,$$

$$(2-q)(q-1) \le \frac{p-2}{2}, \qquad q \in (1,2)\,.$$

Введемо позначення

$$\left\| D^2 u \right\|_2^2 = \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i,j=1}^{n} \left| u_{x_i x_j} \right|^2 dx, \qquad |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| u_{x_i} \right|^2,$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_t} \left[u_t^2 + \sum_{i,j,s,\ell=1}^{n} a_{ij}^{s\ell}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_\ell} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + \right.$$

$$\left. + \; b_0(x) u^2 \right] dx - \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega_t} c_0(x) |u|^p \, dx, \qquad t \in [0,T]\,. \tag{3}$$

Означення 1. Функцію $u \in C([0,T]; H_0^2(\Omega)) \cap C([0,T]; L^p(\Omega))$ таку, що $u_t \in C([0,T]; W_0^{1,q}(\Omega))$, $u_{tt} \in L^{\infty}((0,T); L^2(\Omega))$, і u задовольняє початкові умови (2) і рівність

$$\int\limits_{\Omega_t} \left[u_{tt} v + \sum_{i,j,s,\ell=1}^{n} a_{ij}^{s\ell}(x) u_{x_i x_j} v_{x_s x_\ell} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left| u_{t x_i} \right|^{q-2} u_{t x_i} v_{x_i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + a_0(x) u_t v + b_0(x) u v - c_0(x) |u|^{p-2} u v \right] dx = 0$$

для майже всіх $t \in [0,T]$ і для всіх $v \in H_0^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, назвемо *узагальненим розв'язком задачі* (1)–(3).

Зауваження 1. Згідно з теоремою вкладення Соболєва з умови (**P**) випливає, що $\int\limits_{\Omega_t} |u|^{p-2} uv\, dx$ має сенс.

Лема 1. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**P**), $u_0 \in H_0^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$. *Якщо* $E(0) \le 0$, *тоді* $E'(t) \le 0$.

Д о в е д е н н я. Продиференціюємо рівність (4) за t:

$$E'(t) = \int\limits_{\Omega_t} \left[u_{tt} u_t + \sum_{i,j,s,\ell=1}^{n} a_{ij}^{s\ell}(x) u_{x_i x_j} u_{t x_s x_\ell} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{t x_j} + \right.$$

$$\left. + \; b_0(x) u u_t \right] dx - \int\limits_{\Omega_t} c_0(x) |u|^{p-2} u u_t \, dx\,.$$

Оскільки

$$\int_{\Omega_t}\Bigg[u_{tt}u_t+\sum_{i,j,s,\ell=1}^{n}a_{ij}^{s\ell}(x)u_{x_ix_j}u_{tx_sx\ell}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left|u_{tx_i}\right|^q+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)u_{x_i}u_{tx_j}+$$

$$+a_0(x)u_t^2+b_0(x)uu_t\Bigg]dx=\int_{\Omega_t}c_0(x)|u|^{p-2}\,uu_t\,dx\,,$$

то

$$E'(t)=-\int_{\Omega_t}\left[\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left|u_{tx_i}\right|^q+a_0(x)u_t^2\right]dx\le 0\,. \qquad\Diamond$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**B**), (**C**), (**P**), $u_1\in H_0^1(\Omega)$, $u_0\in H_0^2(\Omega)\bigcap L^p(\Omega)$, $E(0)=-\lambda,\ \lambda>0$. *Тоді існує таке скінченне* $T_0>0$, *що розв'язок задачі* (1)–(3) *прямує до нескінченності при* $t\to T_0-0$.

Д о в е д е н н я. Введемо позначення

$$H(t)=-E(t)\,.$$

Тоді $H'(t)\ge 0$ і функція H монотонно зростає.

Маємо

$$\lambda=H(0)\le H(t)\le\frac{1}{p}\int_{\Omega_t}c_0(x)|u|^p\,dx\le\frac{\gamma_1}{p}\|\,u\,\|_p^p\,,$$

де $\gamma_1=\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}c_0(x)$.

Нехай

$$L(t)=H^{1-\alpha}(t)+\varepsilon\int_{\Omega_t}uu_t\,dx,\qquad \alpha\in(0,1)\,,$$

тоді

$$L'(t)=(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon\int_{\Omega_t}\left[\,u_t^2+uu_{tt}\right]dx\,.$$

Оскільки справджується рівність

$$\int_{\Omega_t}\Bigg[u_{tt}u+\sum_{i,j,s,\ell=1}^{n}a_{ij}^{s\ell}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx\ell}+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left|u_{tx_i}\right|^{q-2}u_{tx_i}u_{x_i}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}+a_0uu_t+b_0(x)u^2\Bigg]dx=\int_{\Omega_t}c_0(x)|u|^p\,dx\,,$$

то

$$L'(t)=(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon\int_{\Omega_t}u_t^2\,dx+\varepsilon\int_{\Omega_t}c_0(x)|u|^p\,dx-$$

$$-\varepsilon\int_{\Omega_t}a_0(x)uu_t\,dx-\varepsilon\int_{\Omega_t}\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\left|u_{tx_i}\right|^{q-2}u_{tx_i}u_{x_i}\,dx-$$

$$-\varepsilon\int_{\Omega_t}\left[\sum_{i,j,s,\ell=1}^{n}a_{ij}^{s\ell}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx\ell}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}+b_0(x)u^2\right]dx\ge$$

$$\geq (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t) + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} u_t^2\, dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p\, dx -$$

$$- \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{i,j,s,\ell=1}^{n} a_{ij}^{s\ell}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_\ell} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + b_0(x)u^2 \right] dx -$$

$$- \frac{\varepsilon}{2\delta_0} \int\limits_{\Omega_t} a_0(x) u_t^2\, dx - \frac{\varepsilon\delta_0}{2} \int\limits_{\Omega_t} a_0(x) u^2\, dx -$$

$$- \frac{\varepsilon\delta_1\alpha_1}{q'} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} \left|u_{x_i}\right|^q dx - \frac{\varepsilon}{q\delta_1^{q/q'}} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left|u_{tx_i}\right|^q dx\,,$$

де $a_i(x) \leq \alpha_1$, $i = 0,1,\ldots,n$, $\delta_0 > 0$, $\delta_1 > 0$.

Отже, будемо мати

$$L'(t) \geq \left[(1-\alpha)H^{-\alpha}(t) - \left(\frac{\varepsilon}{2\delta_0} + \frac{\varepsilon}{q\delta_1^{q/q'}} \right) \right] \int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left|u_{x_i t}\right|^q + \right.$$

$$\left. + a_0(x) u_t^2 \right] dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} u_t^2 dx + \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p\, dx -$$

$$- \varepsilon \int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{i,j,s,\ell=1}^{n} a_{ij}^{s\ell}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_\ell} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + b_0(x)u^2 \right] dx -$$

$$- \frac{\varepsilon\alpha_1\delta_0}{2} \int\limits_{\Omega_t} u^2\, dx - \frac{\varepsilon\delta_1\alpha_1}{q'} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} \left|u_{x_i}\right|^q dx + \beta H(t) - \beta H(t) =$$

$$= \left[(1-\alpha)H^{-\alpha}(t) - \left(\frac{\varepsilon}{2\delta_0} + \frac{\varepsilon}{q\delta_1^{q/q'}} \right) \right] \int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \left|u_{x_i t}\right|^q + \right.$$

$$\left. + a_0(x) u_t^2 \right] dx + \beta H(t) + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{2} \right) \int\limits_{\Omega_t} u_t^2\, dx +$$

$$+ \left(\varepsilon - \frac{\beta}{p} \right) \int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p\, dx + \left(\frac{\beta}{2} - \varepsilon \right) \int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{i,j,s,\ell=1}^{n} a_{ij}^{s\ell}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_\ell} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} + b_0(x)u^2 \right] dx - \frac{\varepsilon\alpha_1\delta_0}{2} \int\limits_{\Omega_t} u^2\, dx -$$

$$- \frac{\varepsilon\delta_1\alpha_1}{q'} \int\limits_{\Omega_t} \sum_{i=1}^{n} \left|u_{x_i}\right|^q dx\,.$$

Візьмемо

$$\delta_0 = H^{\alpha}(t)\delta_2, \qquad \delta_1^{q/q'} = H^{\alpha}(t)\delta_2^{q/q'}, \qquad \delta_1 = [H^{\alpha}(t)]^{q'/q}\delta_2\,.$$

Тоді

$$[H^{\alpha}(t)]^{q'/q} \| \nabla u \|_q^q \leq C_1 \| u \|_p^{p\alpha q'/q} \| \nabla u \|_q^q \leq$$

$$\leq C_2 \| \nabla u \|_q^{p\alpha q'/q + q} \leq C_3 \left\| D^2 u \right\|_2^{p\alpha q'/q + q},$$

$$H^{\alpha}(t) \| u \|_2^2 \leq C_4 \| u \|_p^{\alpha p + 2},$$

де $C_1,\ldots,C_4$ – додатні константи.

Нехай $\alpha p + 2 \le p$, тобто $\alpha \le \frac{p-2}{p}$. Приймемо $\alpha = \frac{(2-q)q}{pq'}$. Тоді

$$L'(t) \ge H^{-\alpha}(t)\left[1-\alpha-\varepsilon\left(\frac{1}{2\delta_2}+\frac{1}{q\delta_2^{q/q'}}\right)\right]\int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\left|u_{x_i t}\right|^q + \right.$$

$$\left. + a_0(x)u_t^2\right]dx + \beta H(t) + \left(\varepsilon+\frac{\beta}{2}\right)\int\limits_{\Omega_t} u_t^2\,dx + \left(\varepsilon-\frac{\beta}{p}\right)\int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p\,dx +$$

$$+\left(\frac{\beta}{2}-\varepsilon\right)\int\limits_{\Omega_t}\left[b_0(x)u^2+\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\right]dx +$$

$$+\left[\left(\frac{\beta}{2}-\varepsilon\right)A_0 - \varepsilon C_5\delta_2\right]\left\| D^2u\right\|_2^2 - \varepsilon\delta_2 C_6\,\|u\|_p^{p\alpha+2}.$$

Якщо $\|u\|_p \le 1$, то за теоремою вкладення Соболєва $\|u\|_p^s \le \|u\|_p^2 \le$ $\le C_7\left\|D^2u\right\|_2^2$ при $s\in[2,p]$. Якщо $\|u\|_p > 1$, то $\|u\|_p^s \le \|u\|_p^p$, тобто правильна нерівність

$$\|u\|_p^s \le C_7\left(\|u\|_p^p + \left\|D^2u\right\|_2^2\right), \qquad 2 \le s \le p.$$

Таким чином,

$$L'(t) \ge H^{-\alpha}(t)\left[1-\alpha-\varepsilon\left(\frac{1}{2\delta_2}+\frac{1}{q\delta_2^{q/q'}}\right)\right]\int\limits_{\Omega_t}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\left|u_{x_i t}\right|^q + \right.$$

$$\left. + a_0(x)u_t^2\right]dx + \left(\varepsilon+\frac{\beta}{2}\right)\int\limits_{\Omega_t} u_t^2\,dx + \left(\varepsilon-\frac{\beta}{p}-C_7\varepsilon\delta_2\right)\int\limits_{\Omega_t} c_0(x)|u|^p\,dx +$$

$$+\beta H(t) + \left(\frac{\beta}{2}-\varepsilon\right)\int\limits_{\Omega_t}\left[b_0(x)u^2+\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\right]dx +$$

$$+\left[\left(\frac{\beta}{2}-\varepsilon\right)A_0 - \varepsilon C_5\delta_2 - \varepsilon C_7\delta_2\right]\left\| D^2u\right\|_2^2.$$

Нехай $\beta = \beta_0\varepsilon,\ 2 < \beta_0 < p$. Тоді існують такі $\varepsilon > 0$ і $\delta_2 > 0$, що

$$L'(t) \ge C(\varepsilon)\left[(H(t) + \|u\|_p^p + \left\|D^2u\right\|_2^2 + \|u_t\|_2^2\right].$$

Розглянемо

$$[L(t]^{1/(1-\alpha)} = \left[H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon\int\limits_{\Omega_t} uu_t\,dx\right]^{1/(1-\alpha)} \le C\left[H(t) + \left|\int\limits_{\Omega_t} uu_t\,dx\right|^{1/(1-\alpha)}\right].$$

Маємо

$$\left|\int\limits_{\Omega_t} uu_t\,dx\right|^{1/(1-\alpha)} \le \left(\int\limits_{\Omega_t} u^2\,dx\right)^{1/2(1-\alpha)}\left(\int\limits_{\Omega_t} u_t^2\,dx\right)^{1/2(1-\alpha)} \le M_1\left(\|u\|_2^s + \|u_t\|_2^2\right),$$

де $s = \frac{2}{1-2\alpha}$; $\alpha < \frac{1}{2}$; M_1 – додатна константа.

Нехай $\frac{2}{1-2\alpha} \le p$, тобто $\alpha \le \frac{p-2}{2p}$. Тоді

$$[L(t)]^{1/(1-\alpha)} \le M_2\left(H(t) + \|u_t\|_2^2 + \left\|D^2u\right\|_2^2 + \|u\|_p^p\right) \le M_3 L'(t).$$

Отже,

$$L'(t) \ge M_4 [L(t)]^{1/(1-\alpha)} . \qquad (4)$$

Оскільки $H(0) = \lambda > 0$, $H'(t) \ge 0$, то $H(t) \ge \lambda$. Тому ε можна вибрати таким, що

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_{\Omega_t} u_0 u_1 \, dx \ge \frac{\lambda}{2} .$$

Позначимо $\gamma = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\gamma > 1$. Проінтегрувавши обидві частини нерівності (5) за t від 0 до t, будемо мати

$$L^{\gamma-1}(t) \ge \frac{1}{L^{1-\gamma}(0) - M_4(\gamma-1)t} .$$

Тому існує таке T_0, що $L(t) \to +\infty$ при $t \to T_0 - 0$.

Отже,

$$\int_{\Omega_t} \left[u_t^2 + \sum_{i,j,s,\ell=1}^{n} a_{ij}^{s\ell}(x) u_{x_i x_j} u_{x_s x_\ell} + |u|^p \right] dx \to \infty ,$$

при $t \to T_0 - 0$. ◊

1. *Процах Н.* Існування та єдиність розв'язку мішаної задачі для одного параболічного нелінійного рівняння // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2001. – Вип. 59. – С. 148–157.
2. *Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного еволюційного рівняння з другою похідною за часом в узагальнених просторах Лебега // Мат. студії. – 2001. – **16**, № 2. – С. 157–168.
3. *Слепцова И. П., Шишков А. Е.* Принцип Фрагмена – Линдалефа для некоторых квазилинейных эволюционных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 2. – С. 239–249.
4. *Abeyaratne R., Knowles J. K.* Implications of viscosity and strain gradient effects for the kinetics of propagating phase boundaries in solids // SIAM. J. Appl. Math. – 1991. – **51**. – C. 1205–1221.
5. *Abeyaratne R., Knowles J. K.* Kinetic relations and propagation of phase boundaries in solids // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1991. – **114**. – C. 119–154.
6. *Rybka P., Hoffmann K.-H.* Convergence of solutions to the equation of quasi-static approximation of viscoelasticity with capillarity // J. Math. Anal. and Appl. – 1998. – **226**, No. 1. – C. 61–81.
7. *Slemrod M.* Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1983. – **81**. – C. 37–85.

НЕОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ В КОНЕЧНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ ОДНОГО СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Получены условия, при которых обобщенное решение слабо нелинейного параболического уравнения со второй производной по времени становится неограниченным в конечный момент времени.

UNBOUNDEDNESS OF SOLUTIONS AT THE FINITE TIME OF ONE SEMI-LINEAR FOURTH ORDER EQUATION

In the paper the conditions, at which the generalized solution of semi-linear parabolic equation with the second time derivative is unbounded at the finite moment of time have been obtained.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
10.04.07