УДК 517.946+511.37

В. С. Ільків[1,2], Т. В. Магеровська[3]

КРАЙОВА ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

В області, що є декартовим добутком відрізка $[0,T]$ і p-вимірного тора Ω_p, досліджено нелокальну задачу із загальними лінійними багатоточковими умовами для строго гіперболічного (хвильового) рівняння $u_{tt} = a^2(t)\Delta u$. Задача є некоректною за Адамаром і пов'язана з проблемою малих знаменників. За допомогою метричного підходу доведено теорему про оцінки знизу малих знаменників. На основі таких оцінок отримано умови існування і єдиності розв'язку задачі у просторах Соболєва функцій, періодичних за змінними $x_1,\ldots,x_p$.

1. Вступ. Задачі з двоточковими та багатоточковими нелокальними умовами для рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними досліджувалися багатьма авторами [1, 2, 4–6, 9–14, 17]. У роботах [4–6, 9–11, 14] вивчено такі задачі для систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у шкалах просторів Соболєва періодичних за просторовими змінними функцій. Ці задачі є некоректними за Адамаром, а умови їх розв'язності пов'язані з проблемою оцінювання знизу малих знаменників, які виникають в рядах Фур'є, що зображають формальні розв'язки цих задач.

Розв'язання проблеми малих знаменників здійснюється на основі метричного підходу [5, 9, 10, 14–16]. У рамках цього підходу розглядається не окрема задача, а множина задач. Елементами цієї множини є задачі із фіксованими даними (коефіцієнтами диференціальних рівнянь, коефіцієнтами крайових умов чи іншими параметрами), які утворюють певну область у просторі даних. Існування і єдиність розв'язку у відповідній шкалі просторів доводиться для майже всіх (за мірою Лебеґа) точок згадуваної області або для всіх точок підобласті, міра якої відрізняється від міри області на довільне мале число.

Для рівнянь і систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами встановлено розв'язність ряду нелокальних задач у шкалі просторів Соболєва $\mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, а для рівнянь зі змінними коефіцієнтами існують приклади нелокальних задач, які не є розв'язними у шкалі просторів Соболєва [7]. Зокрема, якщо нелокальна задача з багатоточковими умовами для одного рівняння зі змінним коефіцієнтом

$$D_t u = i\gamma Du + \cos t \cdot D^2 u,$$

$$\nu\, u(0,x) - \sum_{j=1}^{M} \mu_j\, u(T_j, x) = \varphi(x), \qquad x \in \Omega_1, \qquad T_j \ne \pi/2,$$

де $\gamma, \nu, \mu_1,\ldots,\mu_M$ – довільні дійсні числа, $T_1 < \ldots < T_M$, $D_t = \partial/\partial t$, $D = \partial/\partial x$, має єдиний розв'язок $u = u(t,x)$, то $u(\pi/2,\cdot) \notin \mathbf{L}_2(\Omega_1)$ для довільних $\varphi(x) = \sum_k \hat{\varphi}(k) e^{ikx}$, $\varphi(x) \notin \mathbf{H}_q(\Omega_1)$, і $q \in \mathbb{R}$, оскільки

$$\left\| u\left(\frac{\pi}{2},\cdot\right)\right\|^2_{L_2(\Omega_1)} \ge \mathrm{const} \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left((1 - \max_{j=1,\ldots,M} \sin T_j) k^2\right) |\hat{\varphi}(k)|^2 .$$

У цій роботі, яка є продовженням [8], показано, що для строго гіперболічних рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами нелокальна задача розв'язна у просторах Соболєва, подібно до нелокальних задач для рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Розглянуто нелокальну задачу для рівняння типу коливань струни $\partial^2 u/\partial t^2 = a^2(t)\Delta u$ із загальними нелокальними багатоточковими умовами. Встановлено оцінки знизу для малих знаменників, які виникли при дослідженні задачі, а також гладкість й оцінку норми розв'язку задачі у просторах Соболєва.

Аналогічно можна дослідити нелокальні задачі для довільного строго гіперболічного рівняння другого порядку, а також для строго гіперболічних рівнянь вищих порядків.

2. Постановка задачі. Позначимо p-вимірний тор для змінної $x = (x_1,\dots,x_p)$ через Ω_p, $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, а циліндричну область змінних t та x – через $\mathcal{D}^p$, $\mathcal{D}^p = [0,T]\times\Omega_p$. В області $\mathcal{D}^p$ розглядаємо строго гіперболічне (хвильове) рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t)\Delta u = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}, \tag{1}$$

і нелокальні багатоточкові умови

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} + \sum_{j=1}^{M}\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=T_j} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де функція $a(t) > 0$ неперервно диференційовна на відрізку $[0,T]$, коефіцієнти a, b, c, d та a_j, b_j, c_j, d_j – комплексні числа, модуль яких не перевищує одиницю. Функції $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$ є заданими 2π-періодичними функціями, а функція $u = u(t,x)$ є шуканим 2π-періодичним розв'язком задачі (1), (2).

Для довільного числа $q \in \mathbb{R}$ введемо простір 2π-періодичних функцій $\mathbf{H}_q(\Omega_p)$, який є поповненням множини тригонометричних многочленів $\varphi(x) = \sum_k \hat{\varphi}(k)e^{ikx}$ за нормою $\|\varphi\|^2_{\mathbf{H}_q(\Omega_p)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{2q}|\hat{\varphi}(k)|^2$, де $k = (k_1,\dots,k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $kx = k_1x_1 + \dots + k_px_p$, $\tilde{k} = (1 + k_1^2 + \dots + k_p^2)^{1/2}$. Простори $\mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $q \in \mathbb{R}$, утворюють шкалу просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$ за змінною q.

Вивчається питання розв'язності задачі (1), (2) у шкалі просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$: встановлюються умови, при яких задача (1), (2) має розв'язок u, який для всіх значень $t \in [0,T]$ разом із похідною за t належить до шкали просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$ для довільних елементів φ_1 та φ_2 із цієї шкали.

Означення. Двічі неперервно диференційовну на інтервалі $[0,T]$ функцію u назвемо *розв'язком задачі* (1), (2) *із шкали просторів* $\mathbf{H}(\Omega_p)$, якщо для кожного $t \in [0,T]$ елементи $u(t,\cdot)$, $\partial u/\partial t(t,\cdot)$ належать до шкали просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$ і якщо u задовольняє рівняння (1) та умови (2) у слабкому сенсі, тобто для всіх $t \in [0,T]$ і для всіх тригонометричних многочленів $w = w(x)$ виконуються рівності

$$\int_{\Omega_p}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t)\Delta u\right) w\,dx = 0,$$

$$\int_{\Omega_p}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} + \sum_{j=1}^{M}\begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix}\Bigg|_{t=T_j} - \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}\right] w\,dx = 0.$$

Зауваження 1. Якщо $u(t,\cdot)\in \mathbf{H}_\sigma(\Omega_p)$ – розв'язок задачі (1), (2), то $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\cdot)\in \mathbf{H}_{\sigma-2}(\Omega_p)$, причому $\left\|\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,\cdot)\right\|_{\mathbf{H}_{\sigma-2}(\Omega_p)} = a(t)\|u\|_{\mathbf{H}_\sigma(\Omega_p)}$.

3. Побудова та оцінка розв'язку. Введемо вектор-функції

$$U=\operatorname{col}(u,\,\partial u/\partial t),\qquad \varphi=\operatorname{col}(\varphi_1,\,\varphi_2) \tag{3}$$

і запишемо задачу (1), (2) у векторно-матричному вигляді

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ a^2(t)\Delta & 0\end{pmatrix}U, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}U(0,x)+\sum_{j=1}^{M}\begin{pmatrix}a_j & b_j\\ c_j & d_j\end{pmatrix}U(T_j,x)=\varphi(x). \tag{5}$$

Якщо вектор-функції $U(t,x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}U_k(t)\,e^{ikx}$ та $\varphi(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\hat\varphi(k)e^{ikx}$, де $U_k(t)=\operatorname{col}\left(U_{k1}(t),U_{k2}(t)\right)$, $\hat\varphi(k)=\operatorname{col}\left(\hat\varphi_1(k),\hat\varphi_2(k)\right)$, то згідно з означенням вектор-функція $U_k=U_k(t)$ є розв'язком нелокальної задачі

$$\frac{dU_k}{dt}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -a^2(t)\|k\|^2 & 0\end{pmatrix}U_k, \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}U_k(0)+\sum_{j=1}^{M}\begin{pmatrix}a_j & b_j\\ c_j & d_j\end{pmatrix}U_k(T_j)=\hat\varphi(k), \tag{7}$$

причому $\|k\|^2=\tilde k^2-1=k_1^2+\ldots+k_p^2$, $k\in\mathbb{Z}^p$. Оскільки виконуються рівності $u_k(t)=U_{k1}(t)$, $\dfrac{d}{dt}u_k(t)=U_{k2}(t)$, то розв'язок задачі (1), (2) і його похідна мають такий вигляд: $u(t,x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}U_{k1}(t)\,e^{ikx}$, $\dfrac{d}{dt}u(t,x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}U_{k2}(t)\,e^{ikx}$.

Якщо $k\neq 0$, то матриця $\begin{pmatrix}0 & 1\\ \rho_k^2(t) & 0\end{pmatrix}$ системи (6), де $\rho_k(t)=ia(t)\|k\|$, має два прості уявні власні значення $+\rho_k(t)$ та $-\rho_k(t)$.

При $k=0$ власні значення $\pm\rho_k(t)$ співпадають і дорівнюють нулеві, а матриця системи (6) має вигляд $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, тому $\dfrac{d}{dt}U_{k1}=U_{k2}$, $\dfrac{d}{dt}U_{k2}=0$. Загальний розв'язок останньої системи диференціальних рівнянь $U_k(t)=$ $=\operatorname{col}(C_{01}+C_{02}t,\ C_{02})$ при підстановці в умову (7) дає систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix}a+\sum\limits_{j=1}^{M}a_j & b+\sum\limits_{j=1}^{M}a_jT_j+\sum\limits_{j=1}^{M}b_j\\ c+\sum\limits_{j=1}^{M}c_j & d+\sum\limits_{j=1}^{M}c_jT_j+\sum\limits_{j=1}^{M}d_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{01}\\ C_{02}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat\varphi_1(0)\\ \hat\varphi_2(0)\end{pmatrix} \tag{8}$$

для визначення сталих C_{01} і C_{02}. Матриця $\Delta(0)$ системи (8) має визначник

$$\det\Delta(0)=\sum_{j=1}^{M}\begin{vmatrix}a+\sum\limits_{j=1}^{M}a_j & a_j\\ c+\sum\limits_{j=1}^{M}c_j & c_j\end{vmatrix}T_j+\begin{vmatrix}a+\sum\limits_{j=1}^{M}a_j & b+\sum\limits_{j=1}^{M}b_j\\ c+\sum\limits_{j=1}^{M}c_j & d+\sum\limits_{j=1}^{M}d_j\end{vmatrix}.$$

Якщо $\det \Delta(0) = 0$, то система (8) не має розв'язку або має безліч розв'язків, якщо ж $\det \Delta(0) \neq 0$, то існує єдиний розв'язок системи

$$\operatorname{col}(C_{01}, C_{02}) = \Delta^{-1}(0)\operatorname{col}\left(\hat{\varphi}_1(0), \hat{\varphi}_2(0)\right).$$

Якщо $k \neq 0$, а, отже, $\rho_k(t) \neq 0$ на $[0, T]$, то для матриці системи (6) маємо таку факторизацію:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \rho_k^2(t) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_k(t) & 0 \\ 0 & -\rho_k(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix}^{-1},$$

де

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix} = -2\rho_k(t), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \rho_k^{-1}(t) \\ 1 & -\rho_k^{-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Зробимо заміну шуканих вектор-функцій $U_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix} Z_k(t)$.

Тоді вектор-функція $Z_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & \rho_k^{-1}(t) \\ 1 & -\rho_k^{-1}(t) \end{pmatrix} \dfrac{U_k(t)}{2}$ є розв'язком системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dZ_k}{dt} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{d\rho_k(t)}{dt} Z_k = \begin{pmatrix} \rho_k(t) & 0 \\ 0 & -\rho_k(t) \end{pmatrix} Z_k.$$

Враховуючи, що $\dfrac{d\rho_k(t)}{dt} = ia'(t)\|k\|$, маємо таку задачу для функції Z_k:

$$\frac{dZ_k}{dt} = \rho_k(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Z_k + \frac{a'(t)}{2a(t)}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Z_k, \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(0) & -\rho_k(0) \end{pmatrix} Z_k(0) + \\ + \sum_{j=1}^{M} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(T_j) & -\rho_k(T_j) \end{pmatrix} Z_k(T_j) = \hat{\varphi}(k). \tag{10}$$

Розв'язок задачі (9), (10) існує, єдиний і має вигляд

$$Z_k(t) = Y_k(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(0) & -\rho_k(0) \end{pmatrix}^{-1} \Delta^{-1}(k)\hat{\varphi}(k) \tag{11}$$

при виконанні умови

$$\det \Delta(k) \neq 0, \tag{12}$$

де

$$\Delta(k) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \\ + \sum_{j=1}^{M} \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ c_j & d_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(T_j) & -\rho_k(T_j) \end{pmatrix} Y_k(T_j)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(0) & -\rho_k(0) \end{pmatrix}^{-1}, \tag{13}$$

а $Y_k(t)$ − нормальна в точці $t = 0$ фундаментальна система розв'язків системи диференціальних рівнянь (9).

Нехай $\|A\|$ позначає евклідову норму матриці A, тобто $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(A^* A)}$, де A^* − матриця, ермітово спряжена з матрицею A, а $\operatorname{tr} B$ − слід матриці B. Оцінимо норму $\|Y_k\|$ фундаментальної матриці $Y_k = Y_k(t)$.

Лема 1. *Якщо на проміжку* $[\tau', \tau''] \subset [0, T]$ *функція* $a'(t)$ *є невід'ємною, тобто* $a'(t) \geq 0$, *то виконуються нерівності*

$$\frac{a(\tau')}{a(\tau'')} \|Y_k(\tau')\| \leq \|Y_k(\tau'')\| \leq \|Y_k(\tau')\|, \qquad (14)$$

якщо ж функція $a'(t)$ *є недодатною* $(a'(t) \leq 0)$, *то виконуються нерівності*

$$\|Y_k(\tau')\| \leq \|Y_k(\tau'')\| \leq \frac{a(\tau')}{a(\tau'')} \|Y_k(\tau')\|. \qquad (15)$$

Д о в е д е н н я. Оскільки матриця $\rho_k(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ є косоермітовою, а матриця $\dfrac{a'(t)}{2a(t)}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ – ермітовою, то для матриці Y_k^* виконується рівність

$$\frac{d}{dt} Y_k^* = \rho_k(t) Y_k^* \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a'(t)}{2a(t)} Y_k^* \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Цю рівність разом із рівністю (9) для матриці Y_k використовуємо для перетворення формули $\dfrac{d}{dt}\|Y_k\|^2 = \mathrm{tr}\left(\dfrac{dY_k^*}{dt} \cdot Y_k + Y_k^* \cdot \dfrac{dY_k}{dt} \right)$ до вигляду

$$\frac{d}{dt}\|Y_k\|^2 = \frac{a'(t)}{a(t)} \mathrm{tr}\left(Y_k^* \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y_k \right). \qquad (16)$$

Оскільки власними значеннями матриці $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ є числа -2 і 0, то слід матриці $Y_k^* \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y_k$ задовольняє такі умови:

$$-2\| Y_k \|^2 \leq \mathrm{tr}\left(Y_k^* \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y_k \right) \leq 0.$$

У точках неспадання $(a'(t) \geq 0)$ функції $a(t)$ права частина рівності (16) недодатна і

$$-2\frac{a'(t)}{a(t)}\|Y_k\|^2 \leq \frac{d}{dt}\|Y_k\|^2 \leq 0,$$

тому

$$0 \leq \frac{d}{dt}\ln\left(a(t)\| Y_k \|\right) \leq \frac{d}{dt}\ln a(t). \qquad (17)$$

У точках незростання $(a'(t) \leq 0)$ функції $a(t)$ права частина рівності (16) невід'ємна, тому

$$0 \leq \frac{d}{dt}\|Y_k\|^2 \leq -2\frac{a'(t)}{a(t)}\|Y_k\|^2,$$

тобто

$$\frac{d}{dt}\ln a(t) \leq \frac{d}{dt}\ln\left(a(t)\| Y_k \|\right) \leq 0. \qquad (18)$$

Нехай на проміжку $[\tau', \tau'']$ виконуються нерівності (17) або (18), тоді після інтегрування на цьому проміжку відповідно отримуємо оцінки

$$0 \leq \ln\frac{a(\tau'')\| Y_k(\tau'') \|}{a(\tau')\| Y_k(\tau') \|} \leq \ln\frac{a(\tau'')}{a(\tau')},$$

$$\ln\frac{a(\tau'')}{a(\tau')} \leq \ln\frac{a(\tau'')\| Y_k(\tau'') \|}{a(\tau')\| Y_k(\tau') \|} \leq 0,$$

із яких отримуємо нерівності (14) і (15) для норми матриці $Y_k(t)$. ◊

Наслідок 1. *Якщо функція* $a(t)$ *на проміжку* $[0,T]$ *є сталою, то функція* $\|Y_k\|$ *є також сталою на цьому проміжку, причому* $\|Y_k(t)\| = \sqrt{2}$.

Нехай похідна $a'(t)$ змінює на проміжку $[0,T]$ свій знак $\ell - 1$ раз, де $\ell \in \mathbb{N}$, і $t_0 = 0$, $t_\ell = T$.

Якщо $\ell \geq 2$, то існують числа $t_1, t_2, \ldots, t_{\ell-1}$ і числа $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\ell$ такі, що для $j = 1, \ldots, \ell$ виконуються нерівності $t_{j-1} < \tau_j < t_j$, на проміжку $[t_{j-1}, t_j]$ функція $a'(t)$ не змінює знак, а також для $j = 1, \ldots, \ell - 1$ виконуються умови $a'(\tau_j)\, a'(\tau_{j+1}) < 0$, $a'(t_j) = 0$. Позначимо через A_j, $j = 0, 1, \ldots, \ell$, значення функції $a(t)$ в точці t_j.

Наслідок 2. *Якщо функція* $a'(t)$ *не змінює свій знак на проміжку* $[0,T]$ $\left(= [t_0, t_\ell] = [t_0, t_1]\right)$, *то на цьому проміжку у випадку* $a'(\tau_1) > 0$ *виконуються нерівності*

$$\frac{A_0}{a(t)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t) \| \leq 1, \tag{19}$$

$$\frac{A_0}{A_1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t_1) \| \leq 1, \tag{20}$$

а у випадку $a'(\tau_1) < 0$ *– нерівності*

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t) \| \leq \frac{A_0}{a(t)}, \tag{21}$$

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t_1) \| \leq \frac{A_0}{A_1}. \tag{22}$$

Наслідок 3. *Якщо функція* $a'(t)$ *на проміжку* $[0,T]$ *один раз змінює свій знак, то у випадку* $a'(\tau_1) > 0$ *виконуються нерівності* (19) *на проміжку* $[0, t_1]$ *і нерівності* (20) *та нерівності*

$$\frac{A_0}{A_1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t) \| \leq \frac{A_1}{a(t)} \tag{23}$$

на проміжку $[t_1, t_2]$ $\left(= [t_1, t_\ell] = [t_1, T]\right)$, *зокрема*

$$\frac{A_0}{A_1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t_2) \| \leq \frac{A_1}{A_2}. \tag{24}$$

У випадку $a'(\tau_1) < 0$ *виконуються нерівності* (21) *на проміжку* $[0, t_1]$ *і нерівності* (22) *і нерівності*

$$\frac{A_1}{a(t)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t) \| \leq \frac{A_0}{A_1} \tag{25}$$

на проміжку $[t_1, t_2]$ $\left(= [t_1, t_\ell] = [t_1, T]\right)$, *зокрема*

$$\frac{A_1}{A_2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t_2) \| \leq \frac{A_0}{A_1}. \tag{26}$$

У загальному випадку, коли похідна $a'(t)$ змінює свій знак більше одного разу, оцінки фундаментальної матриці встановлено в наступній лемі.

Лема 2. *Нехай похідна* $a'(t)$ *функції* $a(t)$ *на проміжку* $[0,T]$ *змінює свій знак* $\ell - 1$ *раз, причому* $\ell \geq 3$, *і числа* $t_1, \ldots, t_{\ell-1}$ *і* $\tau_1, \ldots, \tau_\ell$ *є вибраними. Тоді на проміжках* $[t_{j-1}, t_j] \subset [0,T]$ *справджуються такі оцінки для фундаментальної матриці системи диференціальних рівнянь* (9).

Якщо $t \in [t_{2s-2}, t_{2s-1}]$, *то у випадку* $a'(\tau_1) > 0$ *виконуються нерівності*

$$\frac{A_{2s-2}}{a(t)} \prod_{j=0}^{s-2} \frac{A_{2j}}{A_{2j+1}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t) \| \le \prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-1}}{A_{2j}}, \tag{27}$$

у випадку $a'(\tau_1) < 0$ *– нерівності*

$$\prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-1}}{A_{2j}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t) \| \le \frac{A_{2s-2}}{a(t)} \prod_{j=0}^{s-2} \frac{A_{2j}}{A_{2j+1}}. \tag{28}$$

Якщо $t \in [t_{2s-1}, t_{2s}]$, *то у випадку* $a'(\tau_1) > 0$ *виконуються нерівності*

$$\prod_{j=0}^{s-1} \frac{A_{2j}}{A_{2j+1}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t) \| \le \frac{A_{2s-1}}{a(t)} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-1}}{A_{2j}}, \tag{29}$$

у випадку $a'(\tau_1) < 0$ *– нерівності*

$$\frac{A_{2s-1}}{a(t)} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{A_{2j-1}}{A_{2j}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t) \| \le \prod_{j=0}^{s-1} \frac{A_{2j}}{A_{2j+1}}. \tag{30}$$

Коли $s = 1$, *нерівності* (27)–(30) *розуміємо як нерівності* (19), (21), (23) *і* (25).

Д о в е д е н н я. Для доведення леми використовуємо метод математичної індукції. Припустивши спочатку виконання нерівностей (27)–(30) для всіх проміжків $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{2s-1}, t_{2s}]$, доведемо ці нерівності для наступних двох проміжків $[t_{2s}, t_{2s+1}]$ і $[t_{2s+1}, t_{2s+2}]$.

Нехай t належить проміжку $[t_{2s}, t_{2s+1}]$. У випадку $a'(\tau_1) > 0$ маємо, що й $a'(\tau_{2s+1}) > 0$. Це означає, що на проміжку $[t_{2s}, t_{2s+1}]$ виконуються нерівності (14), які запишемо у вигляді $\dfrac{A_{2s}}{a(t)} \le \dfrac{\| Y_k(t) \|}{\| Y_k(t_{2s}) \|} \le 1$, а на проміжку $[t_{2s-1}, t_{2s}]$ – нерівності (29) вигляду $\dfrac{A_0 A_2 \ldots A_{2s-2}}{A_1 A_3 \ldots A_{2s-1}} \le \dfrac{\| Y_k(t_{2s}) \|}{\sqrt{2}} \le \dfrac{A_1 A_3 \ldots A_{2s-3} A_{2s-1}}{A_2 A_4 \ldots A_{2s-2} A_{2s}}$. Перемноживши ці нерівності отримаємо формулу (27) для проміжку $[t_{2s}, t_{2s+1}]$.

У випадку $a'(\tau_1) < 0$ отримуємо формулу (28) для проміжку $[t_{2s}, t_{2s+1}]$, перемноживши нерівності (15) для проміжку $[t_{2s}, t_{2s+1}]$ і нерівності (30) для проміжку $[t_{2s-1}, t_{2s}]$.

На підставі формул (27) і (28) для проміжку $[t_{2s}, t_{2s+1}]$ і формул (14) і (15) для проміжку $[t_{2s+1}, t_{2s+2}]$ аналогічно одержуємо формули (29) і (30) для проміжку $[t_{2s+1}, t_{2s+2}]$. ◊

Із леми 2 отримуємо незалежні від k оцінки фундаментальної матриці $Y_k(t)$, використовуючи число $\tilde{A} = \dfrac{A_{\max}}{A_{\min}}$, яке визначає розмах коливань функції $a(t)$ (тут $A_{\max}$ та $A_{\min}$ – максимальне та мінімальне значення функції $a(t)$ на відрізку $[0, T]$). Очевидно, що $\tilde{A} \ge 1$.

Наслідок 4. *На проміжку* $[0, t_{2j}] \subset [0, T]$ *справджуються оцінки*

$$\tilde{A}^{-j} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t) \| \frac{a(t)}{A_0} \le \tilde{A}^{j}, \tag{31}$$

а на проміжку $[0, T]$ *– оцінки*

$$\tilde{A}^{-J} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \| Y_k(t) \| \frac{a(t)}{A_0} \le \tilde{A}^{J}, \tag{32}$$

де J *– ціла частина числа* $(\ell + 1)/2$.

4. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі (1), (2). За допомогою оцінок (31) і (32) встановимо достатні умови існування і єдиності розв'язку задачі (1), (2) у шкалі просторів Соболєва.

Теорема 1. *Якщо коефіцієнти Фур'є* $\hat\varphi(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, *вектор-функції* φ *задовольняють умову*

$$\left\| \begin{pmatrix} \rho_k(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}(k)\,\hat\varphi(k) \right\| \le C\tilde{k}^{\sigma}, \tag{33}$$

де C, σ *– деякі сталі,* $C > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, *які не залежить від вектора* k, *то у шкалі просторів Соболєва існує єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$ *задачі* (1), (2) *такий, що для всіх* $t \in [0,T]$

$$u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega_p), \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma_1 - 1}(\Omega_p), \tag{34}$$

де $\sigma_1 < 1 - \sigma - p/2$.

Д о в е д е н н я. Із формули (11) отримуємо рівність

$$\begin{pmatrix} \rho_k(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_k(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_k(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(t) & -\rho_k(t) \end{pmatrix} \mathrm{Y}_k(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \rho_k(0) & -\rho_k(0) \end{pmatrix}^{-1} \Delta^{-1}(k)\hat\varphi(k) =$$

$$= \frac{a(t)}{A_0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{Y}_k(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_k(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}(k)\hat\varphi(k),$$

з якої, переходячи до норм, маємо скалярну рівність

$$\left(a^2(t)\|k\|^2 |U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}a(t)}{A_0} \left\| \mathrm{Y}_k(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \rho_k(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}(k)\hat\varphi(k) \right\|.$$

Оцінюючи норму справа, переходимо до нерівності

$$\left(a^2(t)\|k\|^2 |U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{a(t)}{A_0} \| \mathrm{Y}_k(t) \| \left\| \begin{pmatrix} \rho_k(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}(k)\hat\varphi(k) \right\|.$$

Використовуючи формулу (32), отримуємо для всіх $t \in [0,T]$ таку нерівність:

$$\left(a^2(t)\|k\|^2 |U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2\right)^{1/2} \le \sqrt{2}\tilde{A}^J \left\| \begin{pmatrix} \rho_k(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}(k)\hat\varphi(k) \right\|, \tag{35}$$

або, враховуючи формулу (33), – нерівність

$$\left(a^2(t)\|k\|^2 |U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2\right)^{1/2} \le \sqrt{2}C\tilde{A}^J \tilde{k}^{\sigma}. \tag{36}$$

Оскільки для всіх векторів $k \ne 0$ виконується нерівність $\tilde{k}^2 \le 2\|k\|^2$ і нерівності

$$\tilde{k}^2 |u_k(t)|^2 \le 2\frac{1}{A_{\min}^2}\left(a^2(t)\|k\|^2 |U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2\right), \tag{37}$$

$$\left|\frac{d}{dt} u_k(t)\right|^2 \le a^2(t)\|k\|^2 |U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2, \tag{38}$$

то при $\sigma_2 < -p$ з нерівностей (36)–(38) випливають нерівності

$$\tilde{k}^{2\sigma_1}\left|u_k(t)\right|^2 \le \frac{1}{A_{\min}^2}4C^2\tilde{A}^{2J}\tilde{k}^{2\sigma_1-2+2\sigma} = \frac{1}{A_{\min}^2}4C^2\tilde{A}^{2J}\tilde{k}^{\sigma_2},$$

$$\tilde{k}^{2\sigma_1-2}\left|\frac{d}{dt}u_k(t)\right|^2 \le 2C^2\tilde{A}^{2J}\tilde{k}^{2\sigma_1-2+2\sigma} = 2C^2\tilde{A}^{2J}\tilde{k}^{\sigma_2}.$$

Обчислюючи норми розв'язку u та його похідної $\partial u/\partial t$, отримуємо незалежні від t оцінки:

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega_p)} \le \left|u_0(t)\right|^2 + \frac{1}{A_{\min}^2}4C^2\tilde{A}^{2J}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\tilde{k}^{\sigma_2},$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{\mathbf{H}_{\sigma_1-1}(\Omega_p)} \le \left|\frac{d}{dt}u_0(t)\right|^2 + 2C^2\tilde{A}^{2J}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\tilde{k}^{\sigma_2}.$$

Зі збіжності ряду $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\tilde{k}^{\sigma_2}$ випливають включення (34). ◊

Умови (33) теореми 1 пов'язані з правими частинами φ_1 і φ_2 нелокальних умов (2), тому для одних правих частин вони виконуються, а для інших не виконуються. Крім того, в умовах немає прямої залежності числа σ від гладкості цих правих частин. Далі для встановлення розв'язності задачі (1), (2) у шкалі просторів $\mathbf{H}(\Omega_p)$ досліджуємо, коли виконуються нерівності (33) відразу для всіх функцій із певного простору шкали $\mathbf{H}(\Omega_p)$.

Позначимо через $\Psi_j(k)$, $j=1,2,3,4$, елементи матриці $\Delta(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$:

$$\Delta(k) = \begin{pmatrix}\Psi_1(k) & \Psi_2(k)\\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k)\end{pmatrix}, \qquad \det\Delta(k) = \Psi_1(k)\Psi_4(k) - \Psi_2(k)\Psi_3(k), \tag{39}$$

і нехай

$$\begin{pmatrix}\Phi_{1m}(k) & \Phi_{2m}(k)\\ \Phi_{3m}(k) & \Phi_{4m}(k)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho(T_m) & -\rho(T_m)\end{pmatrix} Y_k(T_m)\begin{pmatrix}1 & 1\\ \rho(0) & -\rho(0)\end{pmatrix}^{-1},$$

тоді виконуються рівності

$$\Delta(k) = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{M}\begin{pmatrix}a_m & b_m\\ c_m & d_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_{1m}(k) & \Phi_{2m}(k)\\ \Phi_{3m}(k) & \Phi_{4m}(k)\end{pmatrix},$$

тобто

$$\Psi_1(k) = a + \sum_{m=1}^{M}a_m\Phi_{1m}(k) + \sum_{m=1}^{M}b_m\Phi_{3m}(k),$$

$$\Psi_2(k) = b + \sum_{m=1}^{M}a_m\Phi_{2m}(k) + \sum_{m=1}^{M}b_m\Phi_{4m}(k),$$

$$\Psi_3(k) = c + \sum_{m=1}^{M}c_m\Phi_{1m}(k) + \sum_{m=1}^{M}d_m\Phi_{3m}(k),$$

$$\Psi_4(k) = d + \sum_{m=1}^{M}c_m\Phi_{2m}(k) + \sum_{m=1}^{M}d_m\Phi_{4m}(k).$$

Якщо виконується умова

$$\Phi(k) = \max_{m=1,\ldots,M}\left\{1,\ \left|\Phi_{1m}(k)\right|,\ \left|\Phi_{2m}(k)\right|,\ \left|\Phi_{3m}(k)\right|,\ \left|\Phi_{4m}(k)\right|\right\}, \tag{40}$$

то для кожного $j=1,2,3,4$ справджуються нерівності $\left|\Psi_j(k)\right| \le (2M+1)\,\Phi(k)$. На підставі цих нерівностей встановлюємо, що модуль кожного елемента вектора

$$\Delta^{-1}(k)\hat{\varphi}(k) = \mathrm{col}\left(\frac{\Psi_4(k)\hat{\varphi}_1(k) - \Psi_2(k)\hat{\varphi}_2(k)}{\det\Delta(k)},\ \frac{\Psi_1(k)\hat{\varphi}_2(k) - \Psi_3(k)\hat{\varphi}_1(k)}{\det\Delta(k)}\right),$$

оцінюється зверху числом

$$\frac{(2M+1)\Phi(k)\left(|\hat{\varphi}_1(k)| + |\hat{\varphi}_2(k)|\right)}{|\det\Delta(k)|} \le \frac{(2M+1)\sqrt{2}\,\Phi(k)\|\hat{\varphi}(k)\|}{|\det\Delta(k)|}.$$

Звідси випливає така оцінка для лівої частини нерівності (33) через норму правої частини $\hat{\varphi}(k)$ умов (7):

$$\left\|\begin{pmatrix}\rho_k(0) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Delta^{-1}(k)\hat{\varphi}(k)\right\| \le (2M+1)\sqrt{2}\,\frac{\max\{A_0,1\}\tilde{k}}{\frac{1}{\Phi(k)}|\det\Delta(k)|}\|\hat{\varphi}(k)\|. \qquad (41)$$

5. Дослідження малих знаменників. Наступним кроком є встановлення оцінок знизу дробів $\frac{1}{\Phi(k)}|\det\Delta(k)|$, $k \in \mathbb{Z}^p$, які є функціями параметрів a, b, c, d, a_m, b_m, c_m, d_m, де $m = 1,\ldots,M$. Для довільного вектора

$$\boldsymbol{\alpha} = (a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots, a_M, b_M, c_M, d_M) \in O^{4(M+1)}$$

параметрів вихідної задачі, де O − одиничний круг з центром у початку координат комплексної площини, такої оцінки, взагалі, не існує. Якою б малою не була (наперед задана) функція $\chi(k)$, знайдеться такий вектор $\boldsymbol{\alpha} \in O^{4(M+1)}$, що безліч разів виконується нерівність $\frac{1}{\Phi(k)}|\det\Delta(k)| < \chi(k)$. Такі знаменники мають назву малих знаменників. Вирішення проблеми малих знаменників, тобто встановлення для них оцінки знизу, є задачею метричної теорії діофантових наближень, в основі якої закладено метричний підхід до розглядуваних задач.

Малі знаменники виникають при дослідженні різних задач для диференціальних і диференціально-операторних рівнянь, а також задач в інших галузях математики [3]. Такі задачі, як правило, є некоректними (умовно коректними).

Для встановлення оцінок знизу знаменників у формулі (41) також використаємо метричний підхід. При цьому на підмножині Λ із $O^{4(M+1)}$ задаємо міру $\mathrm{mes}\,\Lambda$, яка індукується мірою Лебеґа у просторі $\mathbb{R}^{8(M+1)}$.

Теорема 2. *Нехай* $\det\Delta(k)$ *і* $\Phi(k)$ *визначаються відповідно формулами* (39) *і* (40). *Тоді для довільних чисел* $r > p$ *і* $0 < \varepsilon < 1$ *для всіх векторів* $\boldsymbol{\alpha} \in O^{4(M+1)} \setminus B_\varepsilon$ *виконується нерівність*

$$|\det\Delta(0)| \ge \varepsilon\,\frac{\max\left\{\sqrt{2},\,(2+T)\,A_{\min}\right\}}{6\pi\tilde{A}^J C_1 \max\left\{A_0,\,1\right\}},$$

і для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ *− нерівність*

$$\frac{1}{\Phi(k)}|\det\Delta(k)| \ge \frac{\varepsilon}{\tilde{k}^r C_1}. \qquad (42)$$

Тут B_ε *− деяка множина з мірою Лебеґа* $\mathrm{mes}\,B_\varepsilon \le \varepsilon$, *стала* C_1, *що залежить від* r, *визначається формулою*

$$C_1 = 2\pi^8\left(\frac{\max\left\{\sqrt{2},(2+T)\,A_{\min}\right\}}{6\pi\tilde{A}^J \max\left\{A_0,1\right\}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\tilde{k}^{-r}\right).$$

Доведення. Позначимо через $B(k)$ множину тих векторів $\boldsymbol{\alpha} \in O^{4(M+1)}$, які при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ задовольняють оцінку, протилежну до оцінки (42):

$$\frac{1}{\Phi(k)}\left|\det \Delta(k)\right| < \zeta^2(k)\,, \tag{43}$$

де $\zeta(k) = \sqrt{\varepsilon/(C_1\tilde{k}^r)}$.

Розглянемо спочатку такі вектори $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, для яких виконується рівність $\Phi(k) = 1$. Тоді згідно з формулою (39) отримаємо таку факторизацію:

$$\frac{1}{\Phi(k)}\left|\det \Delta(k)\right| = \left|\Psi_4(k)\right| \left|\Psi_1(k) - \Psi_2(k)\Psi_3(k)\frac{1}{\Psi_4(k)}\right|. \tag{44}$$

Розглянемо множину чисел $d \in O$, для яких виконується нерівність

$$\left|d + \sum_{m=1}^{M} c_m \Phi_{2m}(k) + \sum_{m=1}^{M} d_m \Phi_{4m}(k)\right| < \zeta(k) \tag{45}$$

при інших фіксованих елементах вектора $\boldsymbol{\alpha} \in O^{4(M+1)}$. Ця множина є частиною круга радіуса $\zeta(k)$, тому її міра менша, ніж площа $\pi\zeta^2(k)$ цього круга. Інтегруючи за всіма іншими змінними $\boldsymbol{\alpha}'$ на множині O^{4M+3}, отримуємо оцінку $\operatorname{mes} B_0'(k) < \pi^{4(M+1)}\zeta^2(k)$, де $B_0'(k)$ – множина векторів $\boldsymbol{\alpha} \in O^{4(M+1)}$, для яких виконується нерівність (45).

Розглянемо множину тих чисел a, для яких при інших фіксованих елементах вектора $\boldsymbol{\alpha} \in O^{4(M+1)} \setminus B_0'(k)$ виконується нерівність

$$\left|a + a_1\Phi_1(k) + b_1\Phi_3(k) - \Psi_2(k)\Psi_3(k)\frac{1}{\Psi_4(k)}\right| < \zeta(k)\,. \tag{46}$$

Ця множина також має міру меншу, ніж число $\pi\zeta^2(k)$, тому множина $B_0''(k)$ тих $\boldsymbol{\alpha} \in O^{4(M+1)} \setminus B_0'(k)$, для яких виконується нерівність (46), має міру $\operatorname{mes} B_0''(k) < \pi^{4(M+1)}\zeta^2(k)$.

Якщо $\boldsymbol{\alpha} \notin B_0'(k) \cup B_0''(k)$, то виконуються протилежні до нерівностей (45) і (46) нерівності, а, отже, згідно з формулою (44) не виконується оцінка (43), тому $B_0(k) \subset B_0'(k) \cup B_0''(k)$ і справджується нерівність

$$\operatorname{mes} B(k) < 2\pi^{4(M+1)}\zeta^2(k) = \frac{1}{C_1}2\pi^{4(M+1)}\varepsilon\tilde{k}^{-r}\,. \tag{47}$$

Якщо $\Phi(k) = \left|\Phi_{jm}(k)\right|$, $m = 1,\ldots,M$, то замість (44) використовуємо такі факторизації матриці $\left|\dfrac{1}{\Phi_{jm}(k)}\det\Delta(k)\right|$ при $j = 1,2,3,4$ відповідно:

$$\left|d + \det\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\Phi_{2m}(k)}{\Phi_{1m}(k)} \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) - d \end{pmatrix}\right| \cdot \left|a_m + \frac{\Omega_{1m}(k)}{\det\begin{pmatrix}\Phi_{1m}(k) & \Phi_{2m}(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k)\end{pmatrix}}\right|,$$

$$\left|a + \det\begin{pmatrix} \Psi_1(k) - a & \Psi_2(k) \\ \dfrac{\Phi_{1m}(k)}{\Phi_{2m}(k)} & 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|c_m + \frac{\Omega_{2m}(k)}{\det\begin{pmatrix}\Psi_1(k) & \Psi_2(k) \\ \Phi_{1m}(k) & \Phi_{2m}(k)\end{pmatrix}}\right|,$$

$$\left| d + \det\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\Phi_{4m}(k)}{\Phi_{3m}(k)} \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) - d \end{pmatrix} \right| \cdot \left| b_m + \frac{\Omega_{3m}(k)}{\det\begin{pmatrix} \Phi_{3m}(k) & \Phi_{4m}(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) \end{pmatrix}} \right|,$$

$$\left| a + \det\begin{pmatrix} \Psi_1(k) - a & \Psi_2(k) \\ \dfrac{\Phi_{3m}(k)}{\Phi_{4m}(k)} & 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| d_m + \frac{\Omega_{4m}(k)}{\det\begin{pmatrix} \Psi_1(k) & \Psi_2(k) \\ \Phi_{3m}(k) & \Phi_{4m}(k) \end{pmatrix}} \right|, \qquad (48)$$

де

$$\Omega_{1m}(k) = \det\begin{pmatrix} \Psi_1(k) - a_m\Phi_{1m}(k) & \Psi_2(k) - a_m\Phi_{2m}(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{2m}(k) = \det\begin{pmatrix} \Psi_1(k) & \Psi_2(k) \\ \Psi_3(k) - c_m\Phi_{1m}(k) & \Psi_4(k) - c_m\Phi_{2m}(k) \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{3m}(k) = \det\begin{pmatrix} \Psi_1(k) - b_m\Phi_{3m}(k) & \Psi_2(k) - b_m\Phi_{4m}(k) \\ \Psi_3(k) & \Psi_4(k) \end{pmatrix},$$

$$\Omega_{4m}(k) = \det\begin{pmatrix} \Psi_1(k) & \Psi_2(k) \\ \Psi_3(k) - d_m\Phi_{3m}(k) & \Psi_4(k) - d_m\Phi_{4m}(k) \end{pmatrix}. \qquad (49)$$

Вирази під знаком модуля у формулах (48) є лінійними функціями своїх перших доданків; визначники у формулах (49) є лінійними функціями коефіцієнтів умов (2).

Множини, для елементів яких вказані лінійні функції у формулах (48) і (49) менші, ніж $\zeta(k)$, мають таку ж міру, як і у випадку $\Phi(k) = 1$, тобто для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ виконується нерівність (47).

Якщо $k = 0$, то

$$\det\Delta(0) = \left(d + \sum_{j=1}^{M}(c_jT_j + d_j)\right)\left(a + \sum_{j=1}^{M}a_j - \frac{\left(c + \sum_{j=1}^{M}c_j\right)\left(b + \sum_{j=1}^{M}(a_jT_j + b_j)\right)}{d + \sum_{j=1}^{M}(c_jT_j + d_j)}\right).$$

Нерівність

$$\left| d + \sum_{j=1}^{M}(c_jT_j + d_j) \right| < \zeta(0), \qquad \text{де} \qquad \zeta(0) = \left(\varepsilon\,\frac{\max\{\sqrt{2}, (2+T)\,A_{\min}\}}{6\pi\tilde{A}^J C_1 \max\{A_0, 1\}}\right)^{1/2},$$

виконується на підмножині $B'(0)$ множини $O^{4(M+1)}$, міра якої $\operatorname{mes} B'(0) < \pi^{4(M+1)}\zeta^2(0)$, а нерівність

$$\left| a + \sum_{j=1}^{M}a_j - \frac{\left(c + \sum_{j=1}^{M}c_j\right)\left(b + \sum_{j=1}^{M}(a_jT_j + b_j)\right)}{d + \sum_{j=1}^{M}(c_jT_j + d_j)} \right| < \zeta(0)$$

виконується на множині $B''(0) \subset O^{4(M+1)}$, міра якої $\operatorname{mes} B''(0) < \pi^{4(M+1)}\zeta^2(0)$. Тобто на множині $O^{4(M+1)} \setminus B(0) = O^{4(M+1)} \setminus (B'(0) \cup B''(0))$, де $\operatorname{mes} B(0) < 2\pi^{4(M+1)}\zeta^2(0)$, виконується нерівність

$$|\det\Delta(0)| \geq \zeta^2(0).$$

На множині $O^{4(M+1)} \setminus B(k)$ функція $\frac{1}{\Phi(k)}|\Delta(k)|$ вектора $\boldsymbol{\alpha}$ задовольняє умову (42) для фіксованого ненульового цілочислового вектора k, а на множині $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} (O^{4(M+1)} \setminus B(k)) = O^{4(M+1)} \setminus B_\varepsilon$, $B_\varepsilon = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} B(k)$, де

$$\operatorname{mes} B_\varepsilon \le \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{mes} B(k) <$$

$$< 2\pi^8 \frac{\varepsilon}{C_1} \left(\frac{\max\{\sqrt{2}, (2+T)A_{\min}\}}{6\pi \tilde{A}^J \max\{A_0, 1\}} + \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \tilde{k}^{-r} \right) = \varepsilon,$$

оцінка (42) виконується для всіх ненульових цілочислових векторів k. ◊

Тепер із отриманої нерівності (42) і формули (41) маємо нерівність

$$\left\| \begin{pmatrix} \rho_k(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}(k) \hat{\varphi}(k) \right\| \le \frac{1}{\varepsilon} 6\pi\sqrt{2}\, C_1 \max\{A_0, 1\} \tilde{k}^{1+r} \| \hat{\varphi}(k) \|, \tag{50}$$

яку застосуємо при доведенні наступної теореми.

Теорема 3. *Для довільної пари чисел* $r > p$ *і* $0 < \varepsilon < 1$ *існує множина* $B_\varepsilon \subset O^{4(M+1)}$, *міра якої* $\operatorname{mes} B_\varepsilon$ *менша, ніж* ε, *така, що для всіх функцій* $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)$, $\varphi_2 \in \mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)$ *існує єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$ *задачі* (1), (2), *причому* $u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_1(\Omega_p)$, $\frac{\partial}{\partial t} u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_0(\Omega_p)$ *для всіх векторів* $\boldsymbol{\alpha}$ *із множини* $O^{4(M+1)} \setminus B_\varepsilon$ *і виконуються нерівності*

$$\| u(t,\cdot) \|_{\mathbf{H}_1(\Omega_p)} \le \frac{1}{\varepsilon} C_2 \| \varphi \|_{\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)}, \tag{51}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} u(t,\cdot) \right\|_{\mathbf{H}_0(\Omega_p)} \le \frac{1}{\varepsilon} C_3 \| \varphi \|_{\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)}, \tag{52}$$

де $C_2 = \sqrt{2}\, C_3 / A_{\min}$, $C_3 = 12\pi \tilde{A}^J C_1 \max\{A_0, 1\}$, J – *ціла частина числа* $(\ell+1)/2$, $\ell - 1$ – *число змін знаку функції* $a'(t)$ *на проміжку* $[0,T]$, $\tilde{A} = A_{\max}/A_{\min}$, $A_{\max} = \max\limits_{t\in[0,T]} a(t)$, $A_{\min} = \min\limits_{t\in[0,T]} a(t)$.

Д о в е д е н н я. Із нерівності (35) і нерівності (50), яка виконується для всіх векторів множини $O^{4(M+1)} \setminus B_\varepsilon$, для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ випливає нерівність

$$(a^2(t) \| k \|^2 |U_{k1}(t)|^2 + |U_{k2}(t)|^2)^{1/2} \le \frac{1}{\varepsilon} 12\pi \tilde{A}^J C_1 \max\{A_0, 1\} \tilde{k}^{1+r} \| \hat{\varphi}(k) \|.$$

Таку нерівність разом із нерівностями (37) і (38) використовуємо для отримання наступних нерівностей:

$$\tilde{k}^2 |u_k(t)|^2 \le \frac{1}{\varepsilon^2 A_{\min}^2} 288\pi^2 \tilde{A}^{2J} C_1^2 (\max\{A_0, 1\})^2 \tilde{k}^{2+2r} \| \hat{\varphi}(k) \|^2,$$

$$\left| \frac{d}{dt} u_k(t) \right|^2 \le \frac{1}{\varepsilon^2} 144\pi^2 \tilde{A}^{2J} C_1^2 (\max\{A_0, 1\})^2 \tilde{k}^{2+2r} \| \hat{\varphi}(k) \|^2.$$

Ці нерівності виконуються також при $k = 0$. Дійсно, із системи рівнянь (8) отримуємо вектор

$$\Delta^{-1}(0) \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\det \Delta(0)} \begin{pmatrix} (d + d_1 + c_1 T) \hat{\varphi}_1(0) - (b + b_1 + a_1 T) \hat{\varphi}_2(0) \\ (a + a_1) \hat{\varphi}_2(0) - (c + c_1) \hat{\varphi}_1(0) \end{pmatrix},$$

компоненти якого оцінюються зверху числом $\sqrt{2}(2+T)\frac{1}{|\det\Delta(0)|}\|\hat{\varphi}(0)\|$, тобто $\left\|\Delta^{-1}(0)\hat{\varphi}(0)\right\| \le 2(2+T)\frac{1}{|\det\Delta(0)|}\|\hat{\varphi}(0)\| = 2(2+T)\frac{1}{|\zeta(0)|}\|\hat{\varphi}(0)\|$, а також для всіх $t\in[0,T]$ виконується оцінка

$$\max\left\{|u_0(t)|^2,\ \left|\frac{d}{dt}u_0(t)\right|^2\right\} \le (2(2+T)\zeta(0))^2(2+T^2)\|\hat{\varphi}(0)\|^2.$$

З цієї оцінки маємо шукані нерівності.

За умовами теореми функції $\varphi_1\in\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)$, $\varphi_2\in\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)$, тому відповідні ряди для розв'язку $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\tilde{k}^2|u_k(t)|^2$ і його похідної $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\left|\frac{d}{dt}u_k(t)\right|^2$ є збіжними для всіх чисел $t\in[0,T]$ разом із рядом $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\tilde{k}^{2r+2}\|\hat{\varphi}(k)\|^2$.

Це означає, що розв'язок задачі (1), (2) для всіх $t\in[0,T]$ приймає значення у просторі $\mathbf{H}_1(\Omega_p)$, а його похідна за t – у просторі $\mathbf{H}_0(\Omega_p)$, і виконуються оцінки

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{\mathbf{H}_1(\Omega_p)} \le \frac{1}{\varepsilon^2A^2_{\min}}288\pi^2\tilde{A}^{2J}C_1^2(\max\{A_0,1\})^2\|\varphi\|^2_{\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)},$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}u(t,\cdot)\right\|^2_{\mathbf{H}_0(\Omega_p)} \le \frac{1}{\varepsilon^2}144\pi^2\tilde{A}^{2J}C_1^2(\max\{A_0,1\})^2\|\varphi\|^2_{\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)},$$

які еквівалентні шуканим оцінкам (51), (52). ◊

Наслідок 5. *Нехай функції* $\varphi_1\in\mathbf{H}_{r+q}(\Omega_p)$, $\varphi_2\in\mathbf{H}_{r+q}(\Omega_p)$, $q\in\mathbb{R}$, *і виконуються всі інші умови теореми* 3. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u=u(t,x)$ *задачі* (1), (2), *причому* $u(t,\cdot)\in\mathbf{H}_q(\Omega_p)$, $\frac{\partial}{\partial t}u(t,\cdot)\in\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_p)$ *для всіх векторів множини* $O^{4(M+1)}\setminus B_\varepsilon$ *і виконуються нерівності*

$$\|u(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}_q(\Omega_p)} \le \frac{1}{\varepsilon}C_2\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{r+q}(\Omega_p)},$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}u(t,\cdot)\right\|_{\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_p)} \le \frac{1}{\varepsilon}C_3\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{r+q}(\Omega_p)}.$$

Наслідок 6. *Для розв'язку* $u=u(t,x)$ *задачі* (1), (2) *справджується також оцінка*

$$a^2(t)\left\|\sqrt{\Delta}u(t,\cdot)\right\|_{\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_p)} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}u(t,\cdot)\right\|_{\mathbf{H}_{q-1}(\Omega_p)} \le \frac{1}{\varepsilon}C_3\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{r+q}(\Omega_p)},$$

де оператор $\sqrt{\Delta}$ *на функції* $\eta=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\hat{\eta}(k)e^{ikx}$ *визначається формулою*

$$\sqrt{\Delta}\,\eta = i\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\|k\|\hat{\eta}(k)e^{ikx}.$$

Зауваження 2. За умов теореми 3 розв'язок задачі (1), (2) існує не лише в області $O^{4(M+1)}\setminus B_\varepsilon$, але й у ширшій області $O^{4(M+1)}\setminus B$, де $\operatorname{mes}B=0$, проте для вектора $\boldsymbol{\alpha}\in B_\varepsilon\setminus B$ взагалі не виконуються оцінки (51), (52), а виконуються слабші (залежні від $\boldsymbol{\alpha}$) оцінки $\|u(t,\cdot)\|_{\mathbf{H}_1(\Omega_p)}\le C_4\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)}$, $\left\|\frac{\partial}{\partial t}u(t,\cdot)\right\|_{\mathbf{H}_0(\Omega_p)} \le C_5\|\varphi\|_{\mathbf{H}_{r+1}(\Omega_p)}$, де сталі C_4 і C_5 не залежать від вектора k, але залежать від вектора $\boldsymbol{\alpha}$ і є необмеженими на множині $B_\varepsilon\setminus B$.

6. Висновки. Багатоточкова нелокальна задача (1), (2) для рівняння коливання струни зі змінним коефіцієнтом розв'язна у просторах Соболєва скінченного порядку, як і у випадку сталого коефіцієнта. Це пояснюється строгою гіперболічністю рівняння (власні значення ρ_k і $-\rho_k$, де $\rho_k = i\|k\|a(t) \neq 0$ при $k \neq 0$), а, отже, існуванням заміни з використанням матриць із власних векторів, які є невиродженими та неперервно диференційовними за змінною t матрицями. За допомогою такої заміни система диференціальних рівнянь (6) зводиться до системи диференціальних рівнянь (9). Ця заміна незастосовна у випадку нестрого гіперболічних рівнянь у зв'язку з виродженням відповідних матриць. У випадку негіперболічного рівняння оцінки відповідних фундаментальних матриць можуть бути експоненціального типу, тому розв'язки багатоточкових нелокальних задач для таких рівнянь взагалі не належать до шкали просторів Соболєва.

Робота виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (Проект № 14.1/017).

1. *Борок В. М., Фардигола Л. В.* Нелокальные корректные краевые задачи в слое // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 1. – С. 20–25.
2. *Гой Т. П., Пташник Б. Й.* Нелокальні крайові задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1478–1487.
3. *Гребенников Е. А., Рябов Ю. А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. – Москва: Наука, 1978. – 128 с.
4. *Задорожна Н. М.* Задача для систем параболічних рівнянь довільного порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 47. – С. 48–55.
5. *Илькив В. С.* Многоточечная нелокальная задача для уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 487–492.
6. *Илькив В. С., Пташник Б. И.* Задача с нелокальными краевыми условиями для системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1012–1023.
7. *Ільків В. С.* Двоточкова нелокальна крайова задача для системи неоднорідних рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45,** № 4. – С. 87–94.
8. *Ільків В. С.* Крайова задача з нелокальними двоточковими умовами для гіперболічного рівняння другого порядку // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 566. – С. 41–51.
9. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 84–95.
10. *Ільків В. С.* Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – Вып. 11. – С. 57–64.
11. *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Зображення та дослідження розв'язків нелокальної задачі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 184–194.
12. *Кмить И. Я., Лавренюк С. П.* О нелокальных задачах для двумерных гиперболических систем // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, № 6. – С. 149. : Тез. докл. Междунар. конф. «Дифференц. уравнения и смежные вопросы». – С. 131–204.
13. *Макаров А. А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 1. – С. 144–150.
14. *Поліщук В. М.* Задача з нелокальними крайовими умовами для гіперболічних систем диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. – 1979. – № 3. – С. 171–175.
15. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
16. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
17. *Савченко Г. Б.* О корректности одной краевой задачи для систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 11. – С. 2082–2085.

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ МНОГОТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В области, являющейся декартовым произведением отрезка $[0, T]$ *и* p*-мерного тора* Ω_p, *исследована нелокальная задача с общими линейными многоточечными условиями для строго гиперболического (волнового) уравнения* $u_{tt} = a^2(t)\Delta u$. *Задача является некорректной в смысле Адамара и связана с проблемой малых знаменателей. С помощью метрического подхода доказана теорема об оценках снизу малых знаменателей. На основании таких оценок получены условия существования и единственности решения задачи в пространствах Соболева периодических по переменным* $x_1, \ldots, x_p$ *функций.*

BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH NON-LOCAL MULTIPOINT CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATION

A nonlocal problem with general linear multipoint conditions for a strongly hyperbolic (wave) equation $u_{tt} = a^2(t)\Delta u$, *in Cartesian product of time interval* $[0, T]$ *and spatial* p*-dimensional torus* Ω_p *is investigated. This problem is Hadamard ill-posed and connected with the small denominators problem. On the base of metric approach the theorem of estimations from below of small denominators is proved. By these estimations the existence and uniqueness conditions for solution of the problem in Sobolev spaces of periodical functions with respect to variables* $x_1, \ldots, x_p$ *have been obtained.*

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[3] Львів. держ. ун-т внутр. справ, Львів

Одержано
15.05.07