УДК 530.12: 531.51

Р. М. Пляцко, О. Б. Стефанишин

ПРО НЕОСЦИЛЯЦІЙНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ МАТІССОНА

При дослідженні можливих впливів спіну пробної частки на її рух у гравітаційному полі важливою проблемою є виділення серед множини розв'язків рівнянь Матіссона таких, що мають неосциляційний характер, на відміну від розв'язків так званого вайсенгофівського типу. Запропоновано метод розв'язання цієї проблеми, який реалізовано у випадку екваторіальних рухів частки у полі Шварцшильда. Для цього точні рівняння Матіссона з його ж доповняльною умовою записано у вигляді системи рівнянь, що містить інтеграли енергії і кутового моменту як параметри. Показано, що розгляд цих рівнянь у наближенні, лінійному за початковими зміщеннями, дає змогу відшукати ті значення параметрів, які при фіксованих початкових значеннях координат і швидкості частки властиві саме неосциляційним розв'язкам.

Вступ і формулювання задачі. Рівняння для опису поведінки пробного тіла (частки) з внутрішнім обертанням (спіном) у гравітаційному полі в рамках загальної теорії відносності вивів М. Матіссон [3]:

$$\frac{D}{ds}\left(mu^{\lambda} + u_{\mu} \frac{DS^{\lambda\mu}}{ds} \right) = -\frac{1}{2} u^{\pi} S^{\rho\sigma} R^{\lambda}_{\pi\rho\sigma} , \tag{1}$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{ds} + u^{\mu} u_{\sigma} \frac{DS^{\nu\sigma}}{ds} - u^{\nu} u_{\sigma} \frac{DS^{\mu\sigma}}{ds} = 0 . \tag{2}$$

Тут u^{λ} – 4-швидкість частки; $S^{\mu\nu}$ – тензор спіну; m, D/ds – відповідно маса й коваріантна похідна за власним часом s частки; $R^{\lambda}_{\pi\rho\sigma}$ – тензор Рімана кривини простору-часу. (У статті використовуємо систему одиниць, у якій швидкість світла у вакуумі та гравітаційна стала чисельно дорівнюють одиниці. Грецькі індекси набувають значень від 1 до 4; латинські – від 1 до 3; сигнатура -, -, -, +.) Рівняння (1), (2) супроводжувались у [3] доповняльною умовою

$$S^{\mu\nu} u_{v} = 0 . \tag{3}$$

Відомо, що в просторі Мінковського рівняння Матіссона (1)–(3) мають (додатково до звичайних розв'язків, що описують світові лінії у вигляді прямих) сім'ю розв'язків, які описують осциляційні світові лінії. У літературі ці розв'язки відомі як орбіти Вайсенгофа [4]. Х. Меллер наявність таких орбіт пов'язував з тим, що в спеціальній теорії відносності розташування центра маси тіла, яке обертається, залежить від системи відліку, а умова (3) є спільною для так званих власного і невласних центрів маси [6]. Звичайні розв'язки описують рух власного центра маси, тоді як осциляційні розв'язки – рухи сім'ї невласних центрів маси.

Повторно рівняння (1), (2) вивів А. Папапетру [7], застосувавши їх для конкретних оцінок впливу спіну на траєкторію частки в полі Шварцшильда за неколваріантної умови

$$S^{i4} = 0 . \tag{4}$$

Щоб уникнути зайвих розв'язків у рівняннях (1), (2), В. Тульчиєв і В. Діксон ввели коваріантну умову [1, 11]

$$S^{\mu\nu} P_{v} = 0 , \tag{5}$$

де

$$P^{\nu} = mu^{\nu} + u_{\mu} \frac{DS^{\nu\mu}}{ds} \tag{6}$$

є 4-імпульсом частки. На відміну від співвідношення (3) (яке часто називають умовою Пірані [8]), умова Тульчиєва – Діксона (5) виділяє єдину світову лінію пробної частки зі спіном у гравітаційному полі. Тобто рівняння (1),

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007. – 50, № 3. – С. 48-55.

(2) за умови (5) не мають осциляційних розв'язків вайсенгофівського типу. Однак постає запитання: чи ця світова лінія близька до звичайної (неосциляційної) лінії рівнянь (1), (2) за умови (3), наприклад, у полі Шварцшильда? Відповідь на це запитання проста, якщо справджується співвідношення

$$m\left|u^{\nu}\right| \geq \left|u_{\mu}\frac{DS^{\nu\mu}}{ds}\right|, \tag{7}$$

оскільки в цьому випадку умова (5) практично збігається з (3). Наприклад, ці умови еквівалентні у пост-ньютонівському наближенні [2]. Однак не виключена інша ситуація для швидких рухів частки зі спіном із значенням фактора Лоренца, що значно перевищує 1. Тоді u^{ν} пропорційне до γ і член $DS^{\nu\mu}/ds$ в (7) залежить від u^{ν} та γ. Природно, що цей випадок вимагає детального дослідження.

Зазначимо, що саме умова (3) була виведена у низці праць різними методами й можна погодитись із висновком, що вона «... *природно виникає у процесі доведення*» [10]. Тобто умова (3) є необхідною, хоча часто з високою точністю її можна замінити умовою (5).

У центрі уваги наших досліджень є рівняння Матіссона (1)–(3) й основна мета полягає у вивченні саме неосциляційних розв'язків у випадку швидких рухів частки зі спіном у полі Шварцшильда.

Підкреслимо, що інформація про всі можливі типи рухів часток зі спіном у гравітаційному полі є важливою в астрофізиці для поглибленого вивчення процесів гравітаційного колапсу та інших астрофізичних явищ.

Рівняння Матіссона для екваторіальних рухів у полі Шварцшильда. Розглянемо рівняння (1)–(3) для метрики Шварцшильда в стандартних координатах $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = t$ для екваторіальних рухів частки зі спіном, ортогональним до площини руху $\theta = \pi/2$. Тоді ненульовими є такі компоненти метричного тензора:

$$g_{11} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \qquad g_{22} = g_{33} = -r^2, \qquad g_{44} = 1 - \frac{2M}{r}, \tag{8}$$

де M – маса джерела поля. З огляду на симетрію метрики Шварцшильда рівняння (1), (2) мають інтеграли енергії E і кутового моменту L, які для екваторіальних рухів мають вигляд [5]

$$E = mu_4 + g_{44}u_{\mu}\frac{DS^{4\mu}}{ds} + \frac{1}{2}g_{44,1}S^{14},$$

$$L = -mu_3 + g_{33}u_{\mu}\frac{DS^{3\mu}}{ds} - \frac{1}{2}g_{33,1}S^{13}. \tag{9}$$

У загальному випадку рівняння (1) і (2) пов'язані між собою. Однак для екваторіальних рухів рівняння (2) можна розв'язати окремо від (1). Справді, враховуючи співвідношення (3) і (8), з рівнянь (2) отримуємо всі ненульові компоненти $S^{\mu\nu}$:

$$S^{13} = -S^{31} = -\frac{u_4 S_0}{r}, \qquad S^{14} = -S^{41} = \frac{u_3 S_0}{r},$$

$$S^{34} = -S^{43} = -\frac{u_1 S_0}{r}, \tag{10}$$

де S_0 є сталою спіну, що визначається співвідношенням

$$S_0^2 = \frac{1}{2}S_{\mu\nu}S\mu\nu. \tag{11}$$

Розглянемо тепер рівняння (1). Відомо, що, взагалі кажучи, рівняння (1) за умови (3) містять другі похідні від u^{μ} за власним часом s. Однак у випадку метрики Шварцшильда завдяки наявності інтегралів E і L є можливість знизити порядок диференціювання згідно зі стандартною процедурою теорії диференціальних рівнянь. Використовуючи (8)–(10) і співвідношення $u_\mu u^\mu$, отримуємо з рівнянь (1) два нетривіальні рівняння для $r(s)$ і $\varphi(s)$:

$$\ddot{r} = \frac{\dot{r}^2}{r} + 2r\left(1 - \frac{3M}{r}\right)\dot{\varphi}^2 - \frac{rE}{S_0}\dot{\varphi} + \\ + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{3M}{r}\right) + \frac{L}{rS_0}\left[\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)(1 + r^2\dot{\varphi}^2)\right]^{1/2}, \tag{12}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\dot{r}\dot{\varphi}}{r} + r\left(1 - \frac{3M}{r}\right)\frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} + \frac{m + L\dot{\varphi}}{rS_0\dot{r}}\left[\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)(1 + r^2\dot{\varphi}^2)\right]^{1/2}, \tag{13}$$

де крапка над буквою позначає звичайне диференціювання за часом s.

Отже, рівняння (12), (13) не містять третіх похідних від координат. Однак у них наявні величини E і L як параметри, що не визначаються початковими значеннями лише r, φ, $\dot{r} \equiv u^1$, $\dot{\varphi} \equiv u^3$. (Згідно з (9) для визначення E і L необхідно задати другу похідну від координат). Тобто рівняння (12), (13), як і початкові рівняння Матіссона (1), описують рухи як власного, так і невласних центрів маси. Іншими словами, рівняння (12), (13) містять неосциляційні та осциляційні розв'язки. У цьому зв'язку важливим є питання: які значення E і L відповідають саме власному центру маси при довільних початкових значеннях r, φ, $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$ для частки зі спіном? Відповісти на це питання легко, якщо рух такої частки близький до геодезичного: тоді наближено $E = mu_4$ і $L = -mu_3$, тобто справджуються співвідношення для геодезичних рухів. Однак відсутні обґрунтування, що світова лінія частки зі спіном близька до відповідної геодезичної лінії для всіх фізично допустимих початкових значень r, φ, $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$. Навпаки, наші дослідження гравітаційної спін-орбітальної взаємодії в полі Шварцшильда [9] вказують на те, що в цьому контексті особливо уважно слід розглянути швидкі рухи.

Для подальших обчислень зручно записати рівняння (12), (13) у термінах безрозмірних величин

$$\tau \equiv \frac{s}{M}, \qquad Y \equiv \frac{dr}{ds}, \qquad Z \equiv M\frac{d\varphi}{ds}, \qquad \rho \equiv \frac{r}{M}, \qquad \varepsilon \equiv \frac{S_0}{mM}. \tag{14}$$

(У подальшому покладаємо $\varepsilon > 0$ без втрати загальності.) Тоді згідно з (12), (13) маємо систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dY}{d\tau} = \frac{Y^2}{\rho} + \rho\left(1 - \frac{3}{\rho}\right)\left(2Z^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) - \mu Z\rho + \frac{\nu}{\rho}\left[Y^2 + \left(1 - \frac{2}{\rho}\right)(1 + Z^2\rho^2)\right]^{1/2}, \tag{15}$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = \frac{YZ}{\rho} + \frac{\rho}{Y}\left(Z^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\left(Z - \frac{3Z}{\rho} - \mu\right) + \\ + \frac{1}{\rho Y}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \nu Z\right)\left[Y^2 + \left(1 - \frac{2}{\rho}\right)(1 + Z^2\rho^2)\right]^{1/2}, \tag{16}$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = Y, \tag{17}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = Z, \tag{18}$$

де

$$\mu \equiv \frac{ME}{S_0}, \qquad \nu \equiv \frac{L}{S_0}. \tag{19}$$

Для коректного аналізу фізичних наслідків рівнянь (15)–(18) необхідно враховувати умову Волда для пробної частки зі спіном [12]

$$\varepsilon \equiv \frac{S_0}{mM} \ll 1. \tag{20}$$

Оскільки у подальшому будемо порівнювати розв'язки рівнянь (15)–(18) із розв'язками рівнянь геодезичних ліній для метрики Шварцшильда, запишемо їх у випадку екваторіальних рухів у координатах r, φ:

$$\ddot{r} = \dot{\varphi}^2 r\left(1 - \frac{3M}{r}\right) - \frac{M}{r^2}, \tag{21}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi}. \tag{22}$$

Використовуючи позначення (14), перепишемо рівняння (21), (22) у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\frac{dY}{d\tau} = Z^2\rho\left(1 - \frac{3}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}, \tag{23}$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = -2\frac{YZ}{\rho}, \tag{24}$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = Y, \tag{25}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = Z. \tag{26}$$

Тривіальні рівняння (17), (18) збігаються з (25), (26), тоді як рівняння (15), (16) і (23), (24) суттєво відрізняються. Як і рівняння (12), (13), перші два рівняння системи (15)–(18) містять сталі енергії та кутового моменту. Згідно із зазначеним вище, різні значення параметрів μ і ν в (15), (16) при фіксованих значеннях Y, Z, ρ відповідають різним центрам маси, а саме, єдиному власному центру та множині невласних центрів маси.

Знаходження параметрів μ і ν для власного центра маси. Праві частини рівнянь (15), (16) надто складні для їх досліджень у загальному випадку. Однак *a priori* не можна виключати можливість виявлення суттєвої різниці між рухами власного та невласних центрів маси уже на малому часовому інтервалі від початку руху частки, а саме, коли відхилення величин Y, Z, ρ, φ від їх початкових значень Y_0, Z_0, ρ_0, φ_0 розглядаються у лінійному наближенні за величинами

$$\xi_1 \equiv \frac{Y - Y_0}{Y_0}, \qquad \xi_2 \equiv \frac{Z - Z_0}{Z_0}, \qquad \xi_3 \equiv \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}. \tag{27}$$

Тому дослідимо таку можливість, тобто розглянемо рівняння (15)–(17) в лінійному за ξ_i наближенні. Після відповідних обчислень отримуємо

$$\frac{d\xi_1}{d\tau} = (a_{10} + a_{11}\nu + a_{12}\mu)\xi_1 + (a_{20} + a_{21}\nu + a_{22}\mu)\xi_2 + \\ + (a_{30} + a_{31}\nu + a_{32}\mu)\xi_3 + a_{00} + a_{01}\nu + a_{02}\mu, \tag{28}$$

$$\frac{d\xi_2}{d\tau} = \left(b_{10} + b_{11}\nu + b_{12}\mu + b_{13}\frac{1}{\varepsilon}\right)\xi_1 + \left(b_{20} + b_{21}\nu + b_{22}\mu + b_{23}\frac{1}{\varepsilon}\right)\xi_2 + \\ + \left(b_{30} + b_{31}\nu + b_{32}\mu + b_{33}\frac{1}{\varepsilon}\right)\xi_1 + b_{00} + b_{01}\nu + b_{02}\mu + b_{03}\frac{1}{\varepsilon}, \tag{29}$$

$$\frac{d\xi_3}{d\tau} = c_{10}\xi_1 + c_{00}, \tag{30}$$

де коефіцієнти a, b, c із відповідними індексами виражаються через Y_0, Z_0, ρ_0. Запишемо вирази для цих коефіцієнтів не в загальному випадку, а лише в наближенні:

$$Z_0^2\rho_0^2 \gg 1, \qquad Y_0^2 \ll Z_0^2\rho_0^2. \tag{31}$$

Згідно з позначеннями (14) співвідношення (31) означають, що танґенціальна компонента початкової швидкості частки є близькою до швидкості світла (ультрарелятивістською) і, крім того, значно більшою від радіальної компоненти. По-перше, це відповідає нашій меті досліджувати саме швидкі рухи. По-друге, оскільки відхилення частки зі спіном від геодезичної траєкторії зумовлене гравітаційною спін-орбітальною взаємодією, найбільш виразно це відхилення може виявитись якраз у випадку домінування танґенціальної компоненти (наприклад, для колових чи близьких до колових рухів [9]).

Отже, за умови (31) вирази для коефіцієнтів a, b, c у рівняннях (28)–(30) мають такий вигляд:

$$a_{10} = \frac{2Y_0}{\rho_0}, \qquad a_{11} = \frac{Y_0}{\rho_0^2 |Z_0|}\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{-1/2}, \qquad a_{12} = 0,$$

$$a_{20} = \frac{4Z_0^2(\rho_0 - 3)}{Y_0}, \qquad a_{21} = \frac{|Z_0|}{Y_0}\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{1/2}, \qquad a_{22} = -\frac{Z_0\rho_0}{Y_0},$$

$$a_{30} = \frac{2Z_0^2\rho_0}{Y_0}, \qquad a_{31} = \frac{|Z_0|}{\rho_0 Y_0}\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{-1/2}, \qquad a_{32} = -\frac{Z_0\rho_0}{Y_0},$$

$$a_{00} = \frac{2Z_0^2(\rho_0 - 3)}{Y_0}, \qquad a_{01} = \frac{|Z_0|}{Y_0}\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{1/2}, \qquad a_{02} = -\frac{Z_0\rho_0}{Y_0},$$

$$b_{10} = -\frac{Z_0^2(\rho_0 - 3)}{Y_0} - \frac{Y_0}{\rho_0}, \qquad b_{11} = -\frac{|Z_0|}{Y_0}\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{1/2}, \qquad b_{12} = \frac{Z_0\rho_0}{Y_0},$$

$$b_{13} = -\frac{\operatorname{sgn} Z_0}{Y_0}\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{1/2}, \qquad b_{20} = \frac{3Z_0^2(\rho_0 - 3)}{Y_0} - \frac{Y_0}{\rho_0},$$

$$b_{21} = \frac{2|Z_0|}{Y_0}\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{1/2}, \qquad b_{22} = -\frac{2Z_0\rho_0}{Y_0}, \qquad b_{23} = \frac{\operatorname{sgn} Z_0}{Y_0}\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{1/2},$$

$$b_{30} = \frac{Z_0^2\rho_0}{Y_0}, \qquad b_{31} = \frac{|Z_0|}{Y_0}\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{-1/2}, \qquad b_{32} = -\frac{Z_0\rho_0}{Y_0},$$

$$b_{33} = \frac{\operatorname{sgn} Z_0}{Y_0\rho_0}\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{-1/2}, \qquad b_{00} = \frac{Z_0^2(\rho_0 - 3)}{Y_0} - \frac{Y_0}{\rho_0},$$

$$b_{01} = \frac{|Z_0|}{Y_0}\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{-1/2}, \qquad b_{02} = -\frac{Z_0\rho_0}{Y_0}, \qquad b_{03} = \frac{\operatorname{sgn} Z_0}{Y_0}\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{1/2},$$

$$c_{00} = c_{11} = \frac{Y_0}{\rho_0}. \tag{32}$$

Згідно з теорією диференціальних рівнянь загальний розв'язок системи лінійних рівнянь (28)–(30) визначається комбінацією $e^{\lambda_i \tau}$, $i = 1, 2, 3$, де λ_i є розв'язками кубічного алгебраїчного рівняння

$$\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0 = 0. \tag{33}$$

Тут згідно з правими частинами рівнянь (28)–(30) маємо

$$C_2 = -\left[a_{10} + b_{20} + \nu(a_{11} + b_{21}) + \mu(a_{12} + b_{22}) + \frac{1}{\varepsilon} b_{23}\right], \tag{34}$$

$$C_1 = (a_{10} + a_{11}\nu + a_{12}\mu)\left(b_{20} + b_{21}\nu + b_{22}\mu + \frac{1}{\varepsilon} b_{23}\right) + c_{10}(a_{30} + a_{31}\nu + a_{32}\mu) + (a_{20} + a_{21}\nu + a_{22}\mu)\left(b_{10} + b_{11}\nu + b_{12}\mu + \frac{1}{\varepsilon} b_{13}\right), \tag{35}$$

$$C_0 = c_{10}\left[(a_{20} + a_{21}\nu + a_{22}\mu)\left(b_{30} + b_{31}\nu + b_{32}\mu + \frac{1}{\varepsilon} b_{33}\right) + (a_{30} + a_{31}\nu + a_{32}\mu)\left(b_{20} + b_{21}\nu + b_{22}\mu + \frac{1}{\varepsilon} b_{23}\right)\right]. \tag{36}$$

Корені рівняння (33) є такими:

$$\lambda_1 = A - B - \frac{1}{3}C_2,$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-A+B) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i(A+B) - \frac{1}{3}C_2, \tag{37}$$

де

$$A = \frac{1}{6}\left(-108q + 12\sqrt{12p^3 + 81q^2}\right)^{1/3}, \qquad B = \frac{P}{3A}, \tag{38}$$

$$p = C_1 - \frac{1}{3}C_2^2, \qquad q = C_0 - \frac{1}{3}C_1C_2. \tag{39}$$

Вирази C_j для квазігеодезичних рухів. Як випливає з виразів (34)–(36), коефіцієнти $C_j, j = 0,1,2$, залежать як від ρ_0, Y_0, Z_0, так і від параметрів μ, ν. Нашим завданням є знайти такі конкретні значення μ, ν, які при фіксованих ρ_0, Y_0, Z_0 в (34)–(36) визначають рух саме власного центра маси. Розпочнемо з аналізу виразів (34)–(36) для простого випадку, коли світова лінія частки зі спіном близька до відповідної геодезичної лінії.

Якщо параметр ε в (14) достатньо малий, то для довільних фіксованих значень ρ_0, Y_0, Z_0 рух власного центра маси близький до геодезичного. У цьому випадку можемо наближено записати

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon}|Z_0|\rho_0\left(1 - \frac{2}{\rho_0}\right)^{1/2}, \qquad \nu = \frac{1}{\varepsilon}\rho_0^2 Z_0. \tag{40}$$

Розглянемо вирази (34)–(36) для значень μ, ν з (40). Підставляючи ці значення в (34)–(36) і беручи до уваги (32), переконуємось, що праві частини виразів (34)–(36) мають спільну властивість: усі їх члени, найбільші за параметром $1/\varepsilon$, скорочуються. Згідно з (37)–(39) це означає, що відповідні найбільші члени відсутні також у виразах для λ_i. Тобто саме значення μ, ν для власного центра маси мінімізують вирази λ_i. У цьому контексті підкреслимо, що аналогічна ситуація має місце для рухів власного центра маси в просторі Мінковського: там для власного центра маси $\lambda_i = 0$ (що відповідає прямолінійним рухам), тоді як для невласних центрів $\lambda_i \sim M/S_0$ (осциляційні рухи).

Вирази C_j для ультрарелятивістських колових рухів з $r = 3M$. У [9] розглянуто випадок колових рухів власного центра маси частки зі спіном у полі Шварцшильда, коли $r = 3M$. Тоді для позначень (14) запишемо

$$\rho = 3, \qquad Y = 0, \qquad Z = -\frac{3^{-3/4}}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{41}$$

Для значень (41) із (9) отримуємо

$$\mu = 3^{-1/4}\varepsilon^{-3/2}, \qquad \nu = -3^{5/4}\varepsilon^{-3/2}. \tag{42}$$

Оцінимо величини C_j з (34)–(36). Враховуючи (32), (42), легко перевірити, що, як і в попередньому випадку, в усіх виразах (34)–(36) найбільші за $1/\varepsilon$ члени скорочуються.

Природно припустити, що подібна властивість має місце не лише у двох часткових випадках, розглянутих вище, але й у більш загальних випадках. Тому нижче перевіримо, чи критерій виключення найбільших за $1/\varepsilon$ членів у виразах для C_j (34)–(36) може бути використаний для знаходження тих значень μ і ν, які виділяють рух саме власного центра маси.

Значення μ і ν для рухів власного центра маси з $2 < \rho_0 < 3$ за умови (31). Як зазначено в [9], рівняння (1)–(3) допускають у полі Шварцшильда розв'язки, що описують екваторіальні колові орбіти в області $2m < r < 3M$. Згідно з позначеннями (14) для цих орбіт маємо

$$2 < \rho < 3, \qquad Y = 0, \qquad Z = -\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{2}{\rho}\right)^{1/4}\left|1-\frac{3}{\rho}\right|^{-1/2}\varepsilon^{-1/2}. \tag{43}$$

Вираз для Z із (43) справджується поза малим околом значення $\rho = 3$. На відміну від співвідношень (42), згідно з (9) маємо

$$\mu \sim \varepsilon^{-1/2}, \qquad \nu \sim \varepsilon^{-1/2}. \tag{44}$$

У контексті дослідження орбіт, які визначаються виразами (43), важливо: ***1***) показати, що ці орбіти є орбітами саме власного центра маси і ***2***) розглянути неколові орбіти, які відрізняються від колових завдяки $Y_0 \neq 0$ за умови (31). Тому розглянемо вирази (34)–(36) для випадку

$$2 < \rho_0 < 3, \qquad 1 \ll Y_0^2 \ll Z_0^2\rho_0^2, \qquad Z_0 = k\varepsilon^{-1/2}, \tag{45}$$

де згідно з (43)

$$\mu = k_1\varepsilon^{-1/2}, \qquad \nu = k_2\varepsilon^{-1/2}, \tag{46}$$

$$k = -\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{2}{\rho_0}\right)^{1/4}\left|1-\frac{3}{\rho_0}\right|^{-1/2}, \tag{47}$$

а k_1 і k_2 є деякими коефіцієнтами, не залежними від ε. Нашим завданням є знайти такі значення k_1, k_2, які забезпечують виключення найбільших за $1/\varepsilon$ членів у виразах C_j з (34)–(36), якщо це можливо.

Підставляючи μ і ν із (46) у вирази (34) і враховуючи (32), отримуємо умови, за яких там скорочуються члени з $1/\varepsilon$:

$$3k^2(\rho_0-3) - 2\rho_0 kk_1 - 2k\left(1-\frac{2}{\rho_0}\right)^{1/2}k_2 - \left(1-\frac{2}{\rho_0}\right)^{1/2} = 0\,. \tag{48}$$

Аналогічні умови для виразів (35), (36) є такими:

$$-k^2(\rho_0-3) + \rho_0 kk_1 + kk_2\left(1-\frac{2}{\rho_0}\right)^{1/2} + \left(1-\frac{2}{\rho_0}\right)^{1/2} = 0\,, \tag{49}$$

$$k^2\rho_0 - \rho_0 kk_1 - kk_2\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{2}{\rho_0}\right)^{-1/2} - \frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{2}{\rho_0}\right)^{-1/2} = 0\,. \tag{50}$$

Використовуючи вираз для k з (47), знаходимо спільний розв'язок трьох лінійних за k_1, k_2 алгебраїчних рівнянь (48)–(50):

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\left(1-\frac{2}{\rho_0}\right)^{1/4}\left|1-\frac{3}{\rho_0}\right|^{-3/2}\left(1-\frac{3}{\rho_0}+\frac{3}{\rho_0^2}\right), \tag{51}$$

$$k_2 = \sqrt{\rho_0}\left(1-\frac{2}{\rho_0}\right)^{-1/4}\left|1-\frac{3}{\rho_0}\right|^{-3/2}\left(1-\frac{9}{\rho_0}+\frac{15}{\rho_0^2}\right). \tag{52}$$

Висновки. Отже, саме вирази (51), (52) згідно з (46), (47) забезпечують мінімізацію усіх виразів C_j за членами, що містять $1/\varepsilon$, і в подальшому їх будемо використовувати в комп'ютерних обчисленнях можливих світових ліній і траєкторій власного центра маси частки зі спіном у гравітаційному полі Шварцшильда. Неважко переконатись, що вирази (51), (52) збігаються з відповідними значеннями, які випливають з аналізу інтегралів енергії та кутового моменту на колових орбітах (43). Цей факт є додатковим свідченням того, що ці орбіти є орбітами власного центра маси.

1. *Dixon W.* Dynamics of extended bodies in general relativity // Proc. Roy. Soc. A. – 1970. – **314.** – P. 499–527.
2. *Hartl M. D.* Dynamics of spinning test particles in a Kerr space-time // Phys. Rev. D. – 2003. – **67.** – 024005.
3. *Mathisson M.* Neue Mechanik materialler Systeme // Acta Phys. Pol. – 1937. – **6**. – P. 163–200.
4. *Mathisson M.* Das zitternde Electron und seine Dynamic // Acta Phys. Pol. – 1937. – **6**. – 218–227.
5. *Micoulaut R.* Uber die Bewegungs – gleichungen eines makroskopishen rotierenden Teilchens gemab der allgemeinen Relativitatstheorie // Z. Phys. – 1967. – **206**. – S. 394–403.
6. *Moller C.* On the definition of the centre of gravity of an arbitrary closed system in the theory of relativity // Commun. Dublin Inst. Advan. Studies. Ser. A. – 1949. – No. 5. – P. 3–19.
7. *Papapetrou A.* Spinning test-particles in general relativity // Proc. Roy. Soc. A. – 1951. – **209**. – P. 248–258.
8. *Pirani F.* On the physical significance of the Riemann tensor // Acta Phys. Pol. – 1956. – **15**, No. 6. – P. 389–405.
9. *Plyatsko R.* Ultrarelativistic circular orbits of spinning particles in a Schwarzschild field // Class. Quantum Grav. – 2005. – **22.** – 1545.
10. *Taub A.* Motion of test bodies in general relativity // J. Math. Phys. – 1964. – **5**, No. 1. – P. 112–119.
11. *Tulczyjew W.* Motion of multipole particles in general relativity theory // Acta Phys. Pol. – 1959. – **18**, No. 5. – P. 393–409.
12. *Wald R.* Gravitational spin interaction // Phys. Rev. D. – 1972. – **6**, No. 2. – P. 406–413.

О НЕОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ МАТИССОНА

При исследовании возможных влияний спина пробной частицы на ее движение в гравитационном поле важной проблемой является выделение среди множества решений уравнений Матиссона таких, которые имеют неосцилляционный характер, в отличие от решений так называемого вайссенгофовского типа. Предложен метод решения этой проблемы, который реализован в случае экваториальных движений в поле Шварцшильда. Для этого точные уравнения Матиссона с его же дополнительным условием записаны в виде системы уравнений, содержащих интегралы энергии и углового момента как параметры. Показано, что рассмотрение этих уравнений в линейном приближении по начальным смещениям дает возможность отыскать те значения параметров, которые при фиксированных начальных значениях координат и скорости свойственны именно неосцилляционным решениям.

ON NON-OSCILLATION SOLUTIONS OF MATHISSON EQUATIONS

In the investigations of the possible effects of spin of the test particle on its motion in a gravitational field the problem of importance is to pick out the non-oscillation solutions among all solutions of the Mathisson equations. The method for solution of this problem is proposed and realized for the equatorial motions in Schwarzschild field. For this purpose the strict Mathisson equations under his supplemented condition are written as a set of equations with the integrals of energy and angular momentum as the parameters. It is shown that the linear approximation of these equations in the initial displacements lets to find just the values of the parameters which at the fixed initial values of the particle coordinates and velocity correspond to the non-oscillation solutions.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
25.07.07