УДК 517.524

Д. І. Боднар

АНАЛІТИЧНА ТЕОРІЯ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ: ІСТОРІЯ, ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ, НЕРОЗВ'ЯЗАНІ ПРОБЛЕМИ

Розглянуто історію становлення гіллястих ланцюгових дробів, виділено основні результати їх аналітичної теорії, сформульовано гіпотези та нерозв'язані проблеми

Поняття гіллястого ланцюгового дробу було одним із наукових відкриттів Віталія Яковича Скоробогатька, яке він активно пропагував все своє життя, починаючи з 1966 року, коли було вперше опубліковано дві праці з цієї тематики у матеріалах Другої конференції молодих математиків України [6, 11, 12].

Аналітична теорія гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) розвивалась у роботах його учнів: П. І. Боднарчука, Р. В. Слоньовського, Д. І. Боднара, М. О. Недашковського, М. С. Сявавка, Х. Й. Кучмінської та їх учнів. Було організовано та проведено три конференції, присвячені теорії та застосуванням ланцюгових і гіллястих ланцюгових дробів: у 1975 році у Львові, у 1994 – у Верхньо-Синєвидному, у 2002 – в Ужгороді.

Відмітимо деякі найважливіші, з нашої точки зору, результати в аналітичній теорії ГЛД.

1. Розроблено методику дослідження ГЛД з дійсними додатними компонентами, на основі якої встановлено необхідну, достатні, необхідні та достатні умови їх збіжності.

Розглянемо ГЛД вигляду

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{1}{b_{i(\kappa)}}, \tag{1}$$

де $i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k$ – скорочений запис мультиіндексу; $b_0, b_{i(k)}$ – дійсні додатні числа. Нехай

$$\alpha_k = \min(b_{i(k)} : 1 \le i_p \le N,\ p = 1,\ldots,k),$$
$$\beta_k = \max(b_{i(k)} : 1 \le i_p \le N,\ p = 1,\ldots,k).$$

Теорема 1 [**2**]. *ГЛД* (1) *розбігається, якщо ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ *збігається.*

Теорема 2 [**2**]. *ГЛД* (1) *збігається, якщо*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{2m+1} \alpha_{k-1}\left(\alpha_k + N^{-1}\alpha_{k-2} + N^{-2}\alpha_{k-4} + \ldots + N^{-[(k-1)/2]}\alpha_{k-2[(k-1)/2]}\right) = \infty .$$

2. З використанням методів мажорант, фундаментальних нерівностей, теореми Стілтьєса – Віталі та її багатовимірного узагальнення встановлено ряд ознак збіжності ГЛД з комплексними елементами.

Теорема 3 [**2**]. *Якщо для ГЛД*

$$\left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1}, \tag{2}$$

де $a_{i(k)}$ *– комплексні числа, при всіх можливих наборах індексів виконуються умови*

$$\sum_{i_k=1}^{N} |a_{i(k)}| \le \alpha \le \frac{1}{4}, \tag{3}$$

то

(***i***) *ГЛД* (2) *збігається;*

(***ii***) *справджується оцінка швидкості збіжності*

$$|f - f_m| \le \frac{(1-q^2)q^m}{1-q^{m+1}}, \qquad m \ge 1, \quad \text{якщо} \quad 0 \le \alpha < \frac{1}{4},$$

$$|f - f_m| \le \frac{2}{m+2}, \qquad m \ge 1, \quad \text{якщо} \quad \alpha = \frac{1}{4},$$

де f *– значення ГЛД* (2), f_m *– його* m*-й підхідний дріб,* $q = \dfrac{1-\sqrt{1-4\alpha}}{1+\sqrt{1-4\alpha}}$;

(***iii***) *значення дробу* (2) *і всіх його підхідних дробів лежать в області*

$$\left|\left(\alpha + \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4\alpha})\right)z - 1\right| \le \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\alpha}); \tag{4}$$

(***iiii***) *гранична стала* $\alpha = \dfrac{1}{4}$ *є найкращою, її не можна збільшити, а відповідну область значень* (4) *не можна зменшити.*

Теорема 4 [**10**]. *ГЛД*

$$b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(\kappa)}} \tag{5}$$

з комплексними елементами абсолютно збігається, якщо при всіх можливих наборах індексів

$$|b_{i(k)}| \ge 1 + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} |a_{i(k+1)}|.$$

Область значень ГЛД (5) *належить кругу*

$$|z - b_0| \le \sum_{i_1=1}^{N} |a_{i_1}|.$$

Теорема 5 [**1**]. *Нехай існують такі додатні сталі* ε, $\varepsilon < 1$, *і* ψ, $\psi < \dfrac{\pi}{2(1+\varepsilon)}$, *що для усіх можливих мультиіндексів елементів ГЛД*

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1} \tag{6}$$

задовольняються умови

$$\sum_{i_k=1}^{N} \frac{|a_{i(k)}| - \mathrm{Re}\left(a_{i(k)} \exp(-i(\psi_{i(k-1)} + \psi_{i(k)})\right)}{\cos\psi_{i(k)} - p_{i(k)}} \le 2(1-\varepsilon)p_{i(k-1)},$$

де $\psi_{i(k)}$, $p_{i(k)}$ *– деякі дійсні числа такі, що*

$$|\psi_{i(n)}| \le \psi, \; n = 0,1,\ldots, \quad 0 \le p_{i(k)} < (1-\varepsilon)\cos\psi_{i(k)}, \quad k = 1,2,\ldots, \; p_0 \ge 0.$$

Тоді

(***i***) *значення всіх підхідних дробів ГЛД* (6) *скінченні і лежать у півплощині*

$$V_0 = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w\exp(-i\psi_0)) \ge -p_0\};$$

(***ii***) *існують скінченні границі підпослідовностей* $\{f_{2n}\}$, $\{f_{2n-1}\}$ *ГЛД* (6);

(***iii***) *ГЛД* (6) *збігається, якщо розбігається ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\max|a_{i(k)}|\right)^{-1}$.

3. Досліджено різні типи функціональних ГЛД. Найбільш вивченими є багатовимірні g- і J-дроби.

Багатовимірним g-дробом називають ГЛД вигляду

$$\frac{1|}{|1} + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{g_{i(1)} z_{i_1}|}{|1} + \ldots + \sum_{i_k=1}^{N} \frac{g_{i(k)}(1-g_{i(k-1)}) z_{i_k}|}{|1} + \ldots \ , \tag{7}$$

де $0 < g_{i(k)} < 1$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Теорема 6 [**13**]. *Дріб* (7) *збігається у кожній точці* z, $z \in P$,

$$P = \bigcup_{\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} P_\alpha, \quad P_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C}^N : \sum_{k=1}^{N} |z_k| - \mathrm{Re}\,(z_k \exp(-2i\alpha) \right\} < 2\cos^2\alpha \,,$$

до голоморфної у цій області функції. Збіжність рівномірна на компактах цієї області.

Багатовимірним J-дробом називають ГЛД вигляду

$$\left(b_0 + z_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{-a_{i(k)}^2}{b_{i(\kappa)} + z_{i_k}} \right)^{-1}, \tag{8}$$

де b_0, $b_{i(k)}$, $a_{i(k)}$ – комплексні сталі, z_0, z_{i_k} – комплексні змінні.

Теорема 7 [**2**]. *Дріб* (8) *рівномірно збігається на кожному компакті* $\mathbb{C}^{N+1}$, *для якого є додатною віддаль до множини* K_0, *де*

$$K_0 = \{ z \in \mathbb{C}^{N+1} : z_k = x_k + iy_k, \ x_k \sin\theta + y_k \cos\theta \le \Upsilon_0(\theta),$$
$$0 \le \theta \le 2\pi, \ k = 0, 1, \ldots, N \},$$

та

$$\Upsilon_0(\theta) = -\inf_{\|\xi\|=1, n\ge 1} \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots i_k = 1}^{N} \mathrm{Im}\,(b_{i(k)} e^{i\theta})\, \xi_{i(k)}^2 - \right.$$
$$\left. - 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots i_k = 1}^{N} \mathrm{Im}\,(a_{i(k)} e^{i\theta})\, \xi_{i(k)} \xi_{i(k-1)} \right|,$$

$$\xi = \left(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N, \ldots, \xi_{i(k)}, \ldots, \xi_{\underbrace{NN\ldots N}_{n}} \right) \in \mathbb{R}^s,$$

$$\|\xi\| = \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, i_2, \ldots i_k = 1}^{N} \xi_{i(k)}^2 \right)^{1/2},$$

$$s = 1 + n + \ldots + N^n.$$

Спеціальні конструкції функціональних гіллястих ланцюгових дробів виникають при побудові розвинень відношень гіпергеометричних функцій у ГЛД. Зокрема, для гіпергеометричної функції Лаурічелли:

$$F_D^N(a, \mathbf{b}, c, \mathbf{z}) =$$
$$= \sum_{k_1, k_2, \ldots k_N = 1}^{\infty} \frac{(a)_{k_1+k_2+\ldots k_N} (b_1)_{k_1} \cdot \ldots \cdot (b_N)_{k_N}}{(c)_{k_1+k_2+\cdots k_N}} \cdot \frac{z_1^{k_1} \ldots z_N^{k_N}}{k_1! \ldots k_N!}, \tag{9}$$

де $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$, параметри a, b_1, b_2, …, b_N, c – комплексні сталі, причому $c \ne 0, -1, -2, \ldots$, z_1, z_2, …, z_N – комплексні змінні, $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha + k - 1)$ – символ Похгаммера.

Теорема 8 [**3**]. *Нехай параметри функції Лаурічелли дійсні та задовольняють умови*: $a > 0,\ b_k > 0,\ k = 1,\dots,N,\ 2c > a + \sum_{k=1}^{N} b_k + 1$. *Тоді ГЛД типу Ньорлунда*

$$b_0(\mathbf{z}) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(\kappa)}(\mathbf{z})}, \tag{10}$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$b_0(\mathbf{z}) = 1 - \frac{a+1}{c} z_1 - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{c} z_j,$$

$$a_{i(k)}(\mathbf{z}) = \frac{(a+k)\cdot b_{i_k} + p_{i(k)}}{(c+k-1)(c+k)},$$

$$b_{i(k)}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{a+k}{c+k} z_{i_k} - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j + p_{i(k)j}}{c+k} z_j, \qquad p_{i(k)} = \sum_{m=1}^{k-1} \delta_{i_k}^{i_m} + \delta_{i_k}^{1},$$

збігається рівномірно на компактах області

$$G = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \operatorname{Re} z_i < \frac{1}{2},\quad i = 1,\dots,N\right\}$$

до голоморфної функції, яка є аналітичним продовженням функції

$$F(\mathbf{z}) = \frac{F_D^N(a, b_1, b_2, \dots, b_N, c, \mathbf{z})}{F_D^N(a, b_1 + 1, b_2, \dots, b_N, c+1, \mathbf{z})},$$

голоморфної в деякому околі початку координат, на область G.

4. Найзагальніші алгоритми розвинення функцій у неперервні дроби використовують принцип відповідності. Двовимірні неперервні дроби виникли в результаті побудови відповідних ГЛД до подвійних степеневих рядів.

Теорема 9 [**9**]. ***1°.*** *Подвійний степеневий ряд*

$$\sum_{i,j\ge 0} c_{ij} x^i y^j \tag{11}$$

розвивається у ГЛД

$$\Phi_0(x,y) + \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_{11}^{(i)} xy}{\Phi_{i+1}(x,y)}, \tag{12}$$

де

$$\Phi_0(x,y) = c_{00} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\omega_{k0}^{(1)} x}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\omega_{0k}^{(1)} y}{1},$$

$$\Phi_i(x,y) = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i}\omega_{k0}^{(i+1)} x}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i}\omega_{0k}^{(i+1)} y}{1}, \qquad i = 1, 2, \dots,$$

або у ГЛД

$$\Psi_0(x,y) + \mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma_{11}^{(i)} xy}{\Psi_{i+1}(x,y)}, \tag{13}$$

де

$$\Psi_0(x,y) = c_{00} + \cfrac{K_{10}^{(1)} x}{1 + \ell_{10}^{(1)} x + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{p=2}^{\infty} \cfrac{K_{p0}^{(1)} x^2}{1 + \ell_{p0}^{(1)} x}} + \cfrac{K_{01}^{(1)} y}{1 + \ell_{10}^{(1)} y + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{p=2}^{\infty} \cfrac{K_{0p}^{(1)} y^2}{1 + \ell_{0p}^{(1)} y}},$$

$$\Psi_i(x,y) = 1 + \cfrac{(-1)^i K_{10}^{(i+1)} x}{1 + (-1)^i \ell_{10}^{(i+1)} x + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{p=2}^{\infty} \dfrac{K_{p0}^{(i+1)} x^2}{1 + (-1)^i \ell_{p0}^{(i+1)} x}} +$$

$$+ \cfrac{(-1)^i K_{01}^{(i+1)} y}{1 + (-1)^i \ell_{10}^{(i+1)} y + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{p=2}^{\infty} \dfrac{K_{0p}^{(i+1)} y^2}{1 + (-1)^i \ell_{0p}^{(i+1)} y}},$$

$$\omega_{(2i+1)j,(2i+1)(1-j)}^{(k)} = -\frac{\varphi_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k-1)} \psi_{ij,i(1-j)}^{(k-1)}}{\varphi_{ij,i(1-j)}^{(k-1)} \psi_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k-1)}},$$

$$\omega_{2ij,2i(1-j)}^{(k)} = \frac{\varphi_{(i-1)j,(i-1)(1-j)}^{(k-1)} \psi_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k-1)}}{\varphi_{ij,i(1-j)}^{(k-1)} \psi_{ij,i(1-j)}^{(k-1)}},$$

$$K_{ij,i(1-j)}^{(k)} = \frac{\varphi_{ij,i(1-j)}^{(k-1)} \varphi_{(i-2)j,(i-2)(1-j)}^{(k-1)}}{[\varphi_{(i-1)j,(i-1)(1-j)}^{(k-1)}]^2}, \qquad \ell_{ij,i(1-j)}^{(k)} = \frac{\chi_{(i-1)j,(i-1)(1-j)}^{(k-1)}}{\varphi_{(i-1)j,(i-1)(1-j)}^{(k-1)}} - \frac{\chi_{ij,i(1-j)}^{(k-1)}}{\varphi_{ij,i(1-j)}^{(k-1)}},$$

$$K_{1j,1(1-j)}^{(k)} = \varphi_{1i,1(1-j)}^{(k-1)}, \qquad \omega_{1j,1(1-j)}^{(k)} = \varphi_{1j,1(1-j)}^{(k-1)}, \qquad \ell_{1j,1(1-j)}^{(k)} = -\frac{\chi_{1j,1(1-j)}^{(k-1)}}{\varphi_{1j,1(1-j)}^{(k-1)}},$$

$$k, i = 1, 2, \ldots, \qquad j = 0, 1,$$

$$\varphi_{ij,i(1-j)}^{(k)} = \begin{vmatrix} \gamma_{1j,1(1-j)}^{(k)} & \gamma_{2j,2(1-j)}^{(k)} & \cdots & \gamma_{ij,i(1-j)}^{(k)} \\ \gamma_{2j,2(1-j)}^{(k)} & \gamma_{3j,3(1-j)}^{(k)} & \cdots & \gamma_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{ij,i(1-j)}^{(k)} & \gamma_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k)} & \cdots & \gamma_{(2i-1)j,(2i-1)(1-j)}^{(k)} \end{vmatrix},$$

$$\psi_{ij,i(1-j)}^{(k)} = \begin{vmatrix} \gamma_{2j,2(1-j)}^{(k)} & \gamma_{2j,2(1-j)}^{(k)} & \cdots & \gamma_{ij,i(1-j)}^{(k)} \\ \gamma_{3j,3(1-j)}^{(k)} & \gamma_{4j,4(1-j)}^{(k)} & \cdots & \gamma_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{ij,i(1-j)}^{(k)} & \gamma_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k)} & \cdots & \gamma_{(2i-2)j,(2i-2)(1-j)}^{(k)} \end{vmatrix},$$

$$\chi_{ij,i(1-j)}^{(k)} = \begin{vmatrix} \gamma_{1j,1(1-j)}^{(k)} & \gamma_{2j,2(1-j)}^{(k)} & \cdots & \gamma_{(i-1)j,(i-1)(1-j)}^{(k)} & \gamma_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k)} \\ \gamma_{2j,2(1-j)}^{(k)} & \gamma_{3j,3(1-j)}^{(k)} & \cdots & \gamma_{ij,i(1-j)}^{(k)} & \gamma_{(i+2)j,(i+2)(1-j)}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{ij,i(1-j)}^{(k)} & \gamma_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k)} & \cdots & \gamma_{(2i-2)j,(2i-2)(1-j)}^{(k)} & \gamma_{2ij,2i(1-j)}^{(k)} \end{vmatrix},$$

$$\varphi_{00}^{(k)} = \psi_{10}^{(k)} = \psi_{01}^{(k)} = 1, \qquad \chi_{1j,1(1-j)}^{(k)} = \psi_{2j,2(1-j)}^{(k)},$$

$$\gamma_{ij}^{(k)} = \sum_{p+m=1}^{i+j} (-1)^{p+m-1} \gamma_{i-h,j-m}^{(k)} \frac{\gamma_{p+1,m+1}^{(k-1)}}{\gamma_{11}^{(k-1)}}, \qquad \gamma_{00}^{(k)} = 1, \qquad \gamma_{ij}^{(0)} = c_{ij},$$

тоді й тільки тоді, коли всі визначники $\varphi_{ij,i(1-j)}^{(k)}$, $\psi_{ij,i(1-j)}^{(k)}$, $k = 0,1,\ldots$, $i = 1,2,\ldots$, $j = 0,1$, *або всі визначники* $\varphi_{ij,i(1-j)}^{(k)}$, $k = 0,1,\ldots$, $i = 1,2,\ldots$, $j = 0,1$, *відмінні від нуля.*

2°*. Зображення подвійного степеневого ряду* (11) *у вигляді дробів* (12) *або* (13) *єдине.*

3°*. Дріб* (12) *є відповідним, а дріб* (13) *– приєднаним ГЛД для подвійного степеневого ряду* (11).

Розглянемо двовимірний неперервний дріб

$$\mathop{\mathrm{D}}_{i=0}^{\infty} \frac{a_{ii}}{\Phi_i}, \qquad \Phi_i = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}}{1}, \tag{14}$$

з комплексними частинними чисельниками a_{ij}. Його підхідний дріб f_n розуміємо як частину (14), що містить лише ті елементи a_{pq}, для яких $p + q \le n$.

Теорема 10 [**5**]. *Нехай елементи* a_{nm} *дробу* (14) *належать області*

$$P_\varepsilon = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w| - \operatorname{Re} w \le \frac{1-\varepsilon}{4} \right\},$$

де ε *– як завгодно мале дійсне число,* $0 < \varepsilon < 1$, $a_{00} = 1$.

Тоді

(***i***) *дріб* (11) *збіжний, якщо є розбіжними ряди*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| a_{p+i,i} \right|^{-1/2}, \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \left| a_{i,r+i} \right|^{-1/2}, \qquad i = 0,1,2,\dots,$$

для всіх індексів p *і* r *таких, що* $a_{p+i,i} \ne 0$, $i = 0,1,\dots$, $a_{i,r+i} \ne 0$, $i = 0,1,\dots$, *і є розбіжним ряд*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| a_{pp} \right|^{-1/2},$$

якщо всі $a_{pp} \ne 0$;

(***ii***) *область значень дробу* (11) *належить кругу*

$$\left| z - \sqrt{2} \right| < \sqrt{2}.$$

Теорема 11 [**8**]. *Якщо елементи двовимірного неперервного дробу*

$$\frac{1}{\Phi_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{c_{ii}}{\Phi_i}}, \qquad \Phi_i = 1 + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{c_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{c_{i,i+j}}{1}, \tag{15}$$

задовольняють умови

$$\left| c_{ij} \right| \le \frac{t(1-t)}{2}, \qquad 0 < t \le \frac{1}{2}, \tag{16}$$

то всі підхідні дроби дробу (15) *належать кругу*

$$\left| z - \frac{1}{1-g^2} \right| \le \frac{g}{1-g^2} \tag{17}$$

(*тут* $g = \dfrac{1 + 2t - \sqrt{1 - 2t(1-t)}}{2}$, *причому* $g = \dfrac{4-\sqrt{2}}{4}$, *коли* $t = \dfrac{1}{2}$).

Існує принаймні один двовимірний неперервний дріб з елементами з (16), *значення якого є довільним наперед заданим числом з круга* (17). *Якщо* w *– довільне число на колі* (17), *тоді існує двовимірний неперервний дріб з елементами з* (16), *значення якого дорівнює* w, *а саме, двовимірний неперервний дріб*

$$\cfrac{1}{\Phi_0 + \cfrac{c_{11}}{\Phi_1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=2}^{\infty} \cfrac{\frac{1}{2} t(t-1)}{\Phi_k}}},$$

$$\Phi_0 = 1 + \cfrac{c_{10} + c_{01}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{1 + \ddots}}}, \qquad \Phi_k = 1 + \cfrac{t(t-1)}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{1 + \ddots}}}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

де, якщо $w = \dfrac{1 + ge^{i\theta}}{1 - g^2}$, $0 \le \theta < 2\pi$, *тоді*

$$c_{10} + c_{01} + \frac{t + \sqrt{1 - 2t(1-t)}}{1-t} c_{11} =$$

$$= -g(1 - g + t)\frac{2g + (1 + g^2)\cos\theta + i(1 - g^2)\sin\theta}{1 + g^2 + 2g\cos\theta} \tag{18}$$

або

$$(c_{10} + c_{01})\frac{\sqrt{1 - 2t(1-t)} - t}{1-t} + c_{11} =$$

$$= -g(1 - g)\frac{2g + (1 + g^2)\cos\theta + i(1 - g^2)\sin\theta}{1 + g^2 + 2g\cos\theta}. \tag{18′}$$

5. Одним із важливих напрямків в аналітичній теорії ГЛД є дослідження їх стійкості до збурень. Досліджено стійкість до збурень ГЛД з додатними, дійсними, зокрема, від'ємними, знакозмінними елементами, стійкість деяких підпослідовностей їх підхідних дробів. Побудовано та досліджено багатовимірні множини стійкості ГЛД з комплексними компонентами.

Розглянемо ГЛД

$$a_0\left(b_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1} \tag{19}$$

і збурений до нього ГЛД

$$\hat{a}_0\left(\hat{b}_0 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\hat{a}_{i(k)}}{\hat{b}_{i(k)}}\right)^{-1} \tag{20}$$

з комплексними елементами. Нехай існують дійсні сталі α, β, $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 1$, такі, що для відносних похибок $\alpha_{i(k)}$, $\beta_{i(k)}$ елементів $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ відповідно справджуються оцінки

$$|\alpha_{i(k)}| \le \alpha, \qquad |\beta_{i(k)}| \le \beta. \tag{21}$$

Теорема 12 [7]. *Нехай для відносних похибок елементів ГЛД* (19) *виконуються умови* (21). *Множини* $\Omega_{i(k)}$, $\Omega_{i(k)} \subset \mathbb{C}^{N+1}$, *є послідовністю множин відносної стійкості до збурень ГЛД* (19), *якщо існує стала* η, $0 < \eta < 1$, *така, що для всіх* $(a_{i(k)1}, a_{i(k)2}, \ldots, a_{i(k)N}, b_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}$, $k \ge 0$,

$$\sum_{i_p=1}^{N}\left|\frac{a_{i(p)}}{Q_{i(p-1)}^{(s)} Q_{i(p)}^{(s)}}\right| \le \eta, \qquad p \le s, \qquad s = 1, 2, \ldots,$$

де

$$Q_{i(p)}^{(s)} = b_{i(p)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=p+1}^{s} \sum_{i_n=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{b_{i(\kappa)}},$$

причому

$$\eta(1 + \alpha)(1 + \eta)^{-2}(1 - \beta)^{-2} \le \frac{1}{4}.$$

Для відносної похибки s *-го підхідного дробу ГЛД* (19) *справджується оцінка*

$$\left|\varepsilon^{(s)}\right| \le \frac{1}{2\eta}\left(1-\beta-\eta(1+\beta)-\sqrt{(1-\beta)^2(1+\eta)^2-4\eta(1+\alpha)}\right), \qquad s \ge 0 .$$

6. В аналітичній теорії ГЛД існує цілий ряд нерозв'язаних проблем, недоведених гіпотез. Сформулюємо деякі з них.

Гіпотеза 1. *ГЛД* (1) *з додатними елементами збігається, якщо ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ *розбігається.*

Гіпотеза 2. *ГЛД* (1) *з додатними елементами збігається тоді й тільки тоді, коли при всеможливих наборах мультиіндексів розбігаються ряди* $\sum_{k=1}^{\infty} b_{i(k)}$.

Гіпотеза 3. *Параболічні теореми для ГЛД* (*див., наприклад, теореми* 5 *і* 10) *залишаються вірними, якщо у їх формулюваннях покласти* $\varepsilon = 0$.

Гіпотеза 4. *ГЛД* (1) *з комплексними частинними знаменниками розбігається, якщо збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\max\left\{\left|\sum_{i_{k+1}=1}^{N}\frac{1}{b_{i(k+1)}}\right|^{-1}, \quad 1 \le i_p \le N, \quad p=1,\ldots,k\right\}.$$

Проблема 1. *Встановити ознаки порівняння при дослідженні збіжності ГЛД з додатними елементами.*

Проблема 2. *Побудувати аналітичну теорію ГЛД з нерівнозначними змінними.*

Проблема 3. *Конструктивно побудувати різні типи фігурних підхідних дробів ГЛД. Дослідити взаємозв'язок звичайної та фігурної збіжностей.*

Проблема 4. *Встановити зв'язок ГЛД з існуючими багатовимірними узагальненнями неперервних дробів з метою застосування ГЛД в теорії чисел для зображення алгебраїчних ірраціональностей, розв'язання діофантових рівнянь, нерівностей тощо.*

Проблема 5. *Побудувати та дослідити розвинення відношень гіпергеометричних функцій Лаурічелли* F_2, F_4 *у ГЛД типу Ґаусса і Ньорлунда.*

Проблема 6. *Встановити оцінки знизу для відносних та абсолютних похибок при дослідженні стійкості до збурень ГЛД.*

Проблема 7. *Застосувати ГЛД для опису і дослідження процесів, що мають розгалужену природу.*

Проблема 8. *Встановити аналог кардіоїдної теореми для багатовимірних* C *-дробів.*

Проблема 9. *Застосувати ГЛД, зокрема, багатовимірні* g *-дроби при розв'язанні проблеми моментів.*

Проблема 10. *Виділити клас функціональних ГЛД, підхідні дроби яких можна інтерпретувати як багатовимірні Паде-апроксимації.*

Наведений у статті огляд як результатів, так і проблем не претендує на повноту і виражає лише суб'єктивну думку автора. Детальному огляду досліджень з теорії і застосувань ГЛД до середини 90-х рр. минулого століття присвячені роботи [4, 14].

1. *Антонова Т. М.* Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42,** № 4. – С. 7–12.
2. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – Киев: Наук. думка, 1986. – 176 с.
3. *Боднар Д. І., Гоєнко Н. П.* Наближення відношення функцій Лаурічелли гіллястим ланцюговим дробом // Мат. студії. – 2003. – **20**, № 2. – С. 210–214.
4. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Гіллясті ланцюгові дроби (до 30-річчя виходу першої публікації) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39,** № 2. – С. 9–19.
5. *Боднар Д. І., Кучмінська Х. Й.* Параболічна область збіжності для двовимірних неперервних дробів // Мат. студії. – 1995. – Вип. 4. – С. 29–36.
6. *Боднарчук П. І, Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – Київ: Наук. думка, 1974. – 272 с.
7. *Гладун В. Р.* Аналіз стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Львів, 2007. – 150 с.
8. *Кучмінська Х. Й.* Аналог теореми Пейдона – Уолла для багатовимірних неперервних дробів спеціальних типів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 3. – С. 30–37.
9. *Кучмінська Х. Й.* Відповідний і приєднаний гіллясті ланцюгові дроби для подвійного степеневого ряду // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 7. – С. 614–618.
10. *Недашковский Н. А.* О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 20. – С. 27–31.
11. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применения в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
12. *Скоробогатько В. Я., Дронюк Н. С., Бобик О. І., Пташник Б. Й.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування // ІІ-а наук. конф. молодих математиків України. – Київ: Наук. думка, 1966. – С. 561–565.
13. *Bodnar D. I., Dmytryshyn R. I.* On the convergence of multidimensional g-fraction // Мат. студії. – 2001. – **15**, № 2. – С. 115–126.
14. *Bodnar D., Kuchmins'ka Kh., Sus' O.* A survey of analytic theory of branched continued fractions // Commun. Analytic Theory of Continued Fractions. – 1993. – **2**. – P. 4–23.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ: ИСТОРИЯ, ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Рассматривается история становления ветвящихся цепных дробей, выделены основные результаты их аналитической теории, сформулированы гипотезы и нерешенные проблемы

ANALYTIC THEORY OF BRANCHED CONTINUED FRACTIONS: HISTORY, MAIN RESULTS, UNSOLVED PROBLEMS

The history of branched continued fractions formation is considered, the main results of its analytic theory are marked, hypothesis and unsolved problems are formulated.

Тернопільськ. нац. економ. ун-т, Тернопіль

Одержано
01.08.07