УДК 517.95

В. О. Пелих, Б. Й. Пташник

ДОСЛІДЖЕННЯ В. Я. СКОРОБОГАТЬКА В ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І БАГАТОТОЧКОВІЙ ГЕОМЕТРІЇ ТА ЇХ ПОДАЛЬШИЙ РОЗВИТОК

Подано огляд результатів В. Я. Скоробогатька, які стосуються теорії звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь із частинними похідними, а також побудованої ним n-точкової геометрії. Висвітлено подальший розвиток ідей В. Я. Скоробогатька у цих напрямках та застосування отриманих результатів.

18 липня 2007 року виповнилось би 80 років відомому українському математикові, Заслуженому діячеві науки України, доктору фізико-математичних наук, професорові Віталію Яковичу Скоробогатьку. Він був ученим із широким діапазоном математичної творчості, який охоплював звичайні диференціальні рівняння і рівняння з частинними похідними, теорію гіллястих ланцюгових дробів та її застосування, багатоточкову геометрію і теорію відносності, методологію та філософію математики. Одне з центральних місць у його творчості посідають дослідження з якісної теорії диференціальних рівнянь, зокрема, дослідження n-точкової задачі та побудованої на цій основі n-точкової геометрії. Цей напрямок наукової діяльності В. Я. Скоробогатька визначився ще в студентські роки під впливом Я. Б. Лопатинського, який став його вчителем.

1. Однозначна розв'язність крайових задач для еліптичних рівнянь і теореми типу Штурма та їх застосування. Відомо, що перша крайова задача для еліптичного рівняння

$$\sum_{k,\ell=1}^{n} a_{k\ell}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_\ell} + 2\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell(x)\frac{\partial u}{\partial x_\ell} + c(x)u = f(x) \tag{1}$$

має єдиний класичний розв'язок у довільній області Ω з кусково-гладкою межею Γ, якщо $c(x) \le 0$ в цій області. Коли ж коефіцієнт $c(x)$ − додатний або знакозмінний, то розв'язок першої крайової задачі для цього рівняння є єдиним лише у малих за мірою областях Ω.

На початку 50-х років XX століття питання однозначної розв'язності крайових задач для еліптичних рівнянь і систем, а також пов'язані з ними властивості їх розв'язків, стали предметом дослідження багатьох математиків (М. І. Вішик, Е. М. Ландіс, О. А. Олейник, В. О. Кондратьєв, P. Hartman, A. Winter, N. Boboe, M. Protter та ін.). У цей же період даний напрямок досліджень був започаткований у Львові В. Я. Скоробогатьком і набув широкого розвитку в очолюваній ним науковій школі.

У роботах [36−39, 42] основні результати у цьому напрямі В. Я. Скоробогатько одержав, запровадивши так звану захисну нерівність для рівняння (1), виконання якої забезпечує однозначну розв'язність першої крайової задачі для цього рівняння. Суть методу захисних нерівностей полягає в тому, що для єдиності розв'язку першої крайової задачі для рівняння (1) в області Ω у класі функцій $C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$ достатньо існування неперервних функцій $B_j(x)$, $j = 1,\dots,n$, з кусково-неперервними похідними, для яких в області Ω виконується нерівність

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & A_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & A_n \\ A_1 & \dots & A_n & R \end{vmatrix} > 0\,, \tag{2}$$

де

$$A_\ell(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{k\ell}(x)}{\partial x_k} + B_\ell(x) - b_\ell(x), \qquad R(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial B_j(x)}{\partial x_j} - c(x).$$

Наведений результат має назву *теореми про захисну нерівність*. Якщо рівняння (1) самоспряжене, то виконання нерівності (2) є також необхідною умовою єдиності розв'язку розглядуваної задачі.

Теорема про захисну нерівність справджується і в тому випадку, коли функції $B_j(x)$ мають скінченні розриви на $(n-1)$-вимірних поверхнях S_k, $k = 1, 2, \dots, p$, $p < \infty$, але тоді на цих поверхнях вони повинні задовольняти умову $\sum_{j=1}^{n} B_j(x)\cos(n_k, x_j) = 0$, де n_k − нормаль до поверхні S_k.

Надалі основна мета полягає в тому, щоб відшукати ефективні умови розв'язності нерівності (2) у відповідному класі функцій $B_j(x)$. Для цього нерівність (2) мажорується нерівністю

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial B_j(x)}{\partial x_j} > a^*(x) + N\sum_{j=1}^{n} B_j^2(x), \tag{3}$$

де

$$a^*(x) = \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{k\ell}(x)}{\partial x_k \partial x_\ell} - \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial b_\ell(x)}{\partial x_\ell} + c(x),$$

$$N = \max_{x\in\Omega}\left\{\max_{\|\varphi\|=1}\varphi^* A^{-1}\varphi\right\},$$

A^{-1} − матриця, обернена до $A = (a_{k\ell})_{k,\ell=1}^{n}$; $\varphi = \mathrm{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$; $\varphi^* = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

За допомогою поняття бісектриси довільної області, введеного В. Я. Скоробогатьком, і методу захисних нерівностей в роботах [37, 52] одержано важливу ефективну *ознаку єдиності розв'язку* першої крайової задачі для рівняння (1) в опуклих областях, яка виражається через внутрішній діаметр d_Ω області та коефіцієнти рівняння: якщо $\pi^2 d_\Omega^{-2} > \left|\max a^*(x)\right|$, то перша крайова задача для рівняння (1) має не більше одного розв'язку в класі функцій $C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$.

Наведена ознака, яка має назву теореми про внутрішній діаметр області, пізніше була узагальнена В. Я. Скоробогатьком на випадок неопуклої області [4].

Названі вище дослідження були продовжені учнями В. Я. Скоробогатька. Зокрема, в [16] метод захисних нерівностей дослідження єдиності розв'язку першої крайової задачі поширено на сильно еліптичні системи рівнянь другого та вищого порядків.

Шляхом поєднання методу захисних нерівностей та апарату дискретної геометрії в [5, 15] одержано ефективні ознаки єдиності розв'язку першої крайової задачі для рівняння (1) і систем еліптичних рівнянь другого порядку, які виражаються через оцінку відношення поверхневої міри межі області до міри самої області: якщо область Ω опукла, Γ − межа області та

$$\left(\frac{\pi\,\mathrm{mes}\,\Gamma}{\mathrm{mes}\,\Omega}\right)^2 > 4n^2 N \max_{x\in\overline{\Omega}}\left|a^*(x)\right|,$$

то перша крайова задача для рівняння (1) має не більше одного розв'язку в класі функцій $C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$. Ці результати були узагальнені на випадок задачі Неймана для рівняння (1), а також на випадок задачі Діріхле для еліптичних рівнянь вищого порядку.

Для випадку неопуклої області мале значення внутрішнього діаметру області або відношення міри області до міри її межі не забезпечують єдиності розв'язку першої крайової задачі для еліптичного рівняння (1) чи системи еліптичних рівнянь. У цьому випадку, як виявилося, необхідно ще накладати обмеження на радіуси кривини неопуклої частини межі області.

Дослідження В. Я. Скоробогатьком однозначної розв'язності першої крайової задачі для еліптичних рівнянь і систем тісно перепліталися з вивченням властивостей їх розв'язків. У роботі [50] він показав, що з теореми про захисну нерівність для рівняння (1) в області Ω випливає теорема про диференціальні нерівності (теорема типу Чаплигіна). На основі введеного ним поняття коливного розв'язку і теореми про диференціальні нерівності в роботах [41, 51] одержано теореми типу Штурма для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + c(x)u = 0 .$$

Із застосуванням топологічних методів у роботі [54] досліджено структуру вузлових ліній розв'язків рівняння (1).

Дослідження властивостей розв'язків еліптичних рівнянь і систем були також продовжені в роботах його учнів. Зокрема, в роботі [19] теореми порівняння і розподілу нулів розв'язків типу Штурма були узагальнені на випадок самоспряженого еліптичного рівняння, а в [16] досліджено неколивальність розв'язків сильно еліптичних систем рівнянь і її взаємозв'язок з однозначною розв'язністю першої крайової задачі для цих систем.

У роботах В. О. Пелиха [67–70] теорема В. Я. Скоробогатька про властивості вузлових ліній самоспряженого еліптичного рівняння другого порядку, отримана у роботі [54], була використана при розв'язанні відомої проблеми про співвідношення спінорного методу Віттена та тензорного методу Нестера у доведенні теореми про додатну визначеність повної гравітаційної енергії асимптотично плоского ріманового простору у загальній теорії відносності. Її використання дозволило розв'язати проблему у випадку максимальної гіперповерхні. При розв'язанні проблеми у загальному випадку В. О. Пелихом виділено клас подвійно-коваріантних систем рівнянь еліптичного типу та отримано необхідні й достатні умови відсутності вузлових точок розв'язків таких систем. У вигляді наслідку отримано більш загальні, ніж у монографії [4], умови однозначної розв'язності першої граничної задачі в області з довільним внутрішнім діаметром. Основний результат цього циклу досліджень полягає у розширенні меж застосовності тензорного методу доведення теореми про додатну визначеність гравітаційної енергії, встановленні співвідношення між спінорним і тензорним методами її доведення та у встановленні геометричної природи спінорного поля Сена – Віттена.

2. Принцип екстремуму та апріорні оцінки для систем рівнянь із частинними похідними. У роботах [39, 44] В. Я. Скоробогатько узагальнив відомий принцип екстремуму для рівняння Лапласа на випадок деяких систем рівнянь із частинними похідними. Узагальнення ґрунтується на геометричній інтерпретації принципу екстремуму для рівняння Лапласа, яка переноситься на системи диференціальних рівнянь другого порядку

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0 \qquad (4)$$

в n-вимірній області Ω з межею Γ. Показано, що опукле замикання значень розв'язку u рівняння (4) на границі Γ охоплює всю множину значень цього розв'язку. Звідси випливає, що, коли $u\big|_{\Gamma} = 0$, то $u = 0$ в усій області Ω.

Описано ряд важливих систем диференціальних рівнянь, для яких виконується наведений вище принцип екстремуму. Зокрема, встановлено, що модуль розв'язку нелінійної системи рівнянь типу Монжа – Ампера досягає свого максимального значення на межі області (що узагальнює відповідний результат А. В. Біцадзе для випадку лінійних систем), а також показано, що принцип екстремуму справджується «в малому» для систем рівнянь теорії пружності.

Відомо, що питання про принцип екстремуму для функції $u(x_1,\dots,x_n)$ тісно пов'язане з поведінкою ліній рівня цієї функції. У роботі [37] досліджено поведінку ліній рівня функції $\Phi = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$, де $(u_1,\dots,u_n)$ – розв'язок еліптичної системи рівнянь із частинними похідними другого порядку, $a_i = \mathrm{const}$, $i = 1,\dots,n$. У цій же роботі розглянуто принцип екстремуму для нелінійних нестаціонарних систем вигляду

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n^2}\right), \qquad i = 1,\dots,n, \quad t \geq 0.$$

Цей напрямок досліджень В. Я. Скоробогатька продовжили його учні. У дисертації [18] одержано точні апріорні оцінки максимуму модуля розв'язків еліптичної і сильно параболічної квазілінійних систем, а також узагальнено принцип максимуму модуля розв'язку нелінійної системи рівнянь типу Монжа – Ампера. Одержані апріорні оцінки застосовано для обґрунтування й оцінки похибки методу Роте, а також для доведення теорем існування і регулярності розв'язків для систем рівнянь типу Монжа – Ампера.

3. Узагальнення методу відокремлення змінних. Метод Фур'є відокремлення змінних, який відіграв важливу роль у розвитку математичної фізики та загальної теорії диференціальних операторів із частинними похідними, і на сьогоднішній день залишається одним із найпотужніших і в той же час найбільш простих методів розв'язування задач для лінійних рівнянь із частинними похідними. Однак багато важливих задач практики (наприклад, задача про знаходження розв'язку рівняння коливань закріпленого на кінцях шланга, по якому протікає рідина, з відповідними початковими умовами) неможливо було розв'язати класичним методом Фур'є. Тому актуальною була задача про його узагальнення.

У 1970 р. професор В. Я. Скоробогатько поставив задачу про розробку узагальненого методу відокремлення змінних, схема якого ґрунтується на виборі більш загальної, аніж у класичному випадку, структури часткових розв'язків рівняння із частинними похідними вигляду $u(x,y) = \sum_{i=1}^{k} X_i(x)\Upsilon_i(y)$, де $x \in \mathbb{R}^\sigma$, $y \in \mathbb{R}^\tau$, $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Протягом 1970–1990 рр. П. І. Каленюк під керівництвом В. Я. Скоробогатька розробив основи такого методу, а також методику дослідження в області $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < \infty,\ x \in \mathbb{R}^p\}$ для рівнянь і систем рівнянь вигляду

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = f(t,x)$$

задач з умовами

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n-1} B_{ik}^j \left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=t_j} + B_j u = \Phi_j(x), \qquad j = 1,\dots,n,$$

частковими випадками яких є умови Коші, локальні й нелокальні багатоточкові та крайові умови [11, 14]. При цьому розроблено досить загальне означення відокремлення змінних і критерії відокремленості у фіксованій системі координат, а також побудовано ефективний алгоритм фактичного відокремлення змінних, який дозволяє знаходити часткові розв'язки узагальненого відокремленого вигляду і потім будувати за їх допомогою розв'язки вихідних задач. Цей алгоритм було взято за основу нового операційного методу розв'язування крайових задач для рівнянь із частинними похідними [10]. Це операційне числення у певному сенсі є дуальним до відомого класичного операційного числення М. Є. Ващенка-Захарченка та О. Гевісайда.

Подальший розвиток згаданий операційний метод отримав у працях [12, 13] та ін., де цей метод названо диференціально-символьним, оскільки він дозволяє зображати розв'язки задач за допомогою виразів

$$f_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)g_j(\nu,x)\Big|_{\nu=0},$$

де f_j – праві частини рівняння чи крайових умов, а g_j – деякі аналітичні функції векторного параметра ν та змінної x, які конструктивно будуються за заданою задачею.

У розвитку та застосуванні узагальненого методу відокремлення змінних разом із П. І. Каленюком брали участь, крім співавторів праць [10, 12, 13], також такі його учні: В. М. Бушмакін, П. Л. Сохан, М. Б. Воробець, Я. М. Плешівський.

4. Багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь і систем. У найпростішій постановці багатоточкова задача для звичайного диференціального рівняння з неперервними на відрізку $[a,b]$ коефіцієнтами

$$L_n(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{5}$$

полягає в знаходженні його розв'язку, що задовольняє умови

$$y(x_i) = A_i, \quad i = 1,\ldots,n, \quad a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b. \tag{6}$$

Якщо в умовах (6) k точок $x_{i+1},\ldots,x_{i+k}$ є безмежно близькі до точки x_0, то в цій точці задають значення шуканої функції $y(x)$ та її похідних $y^{(s)}(x),\ s = 1,\ldots,k-1$. При цьому приходимо до багатоточкової задачі з умовами

$$y(x_i) = A_{i1}, \quad y'(x_i) = A_{i2},\ldots, y^{(r_i-1)}(x_i) = A_{ir_i},$$
$$i = 1,\ldots,q, \qquad r_1 + \ldots + r_q = n. \tag{7}$$

Задачі з умовами (6) і (7) та їх узагальнення вивчали з різних точок зору Я. Д. Тамаркін, А. Ю. Левін, Н. В. Азбелєв, Е. С. Чичкін, Г. С. Зайцева, М. Г. Гамідов, G. Sansone, M. Picone, R. A. Bellman, M. Greguš, Ю. В. Покорний, G. Mammana та інші.

В. Я. Скоробогатько вивчав багатоточкові задачі у зв'язку з розкладом відповідного диференціального оператора на множники першого порядку. Поштовхом до цього стала відома теорема Маммана, яка стверджує, що «*для того щоб оператор* L_n *із* (5) *розкладався у добуток лінійних дійсних множників першого порядку з неперервними коефіцієнтами, необхідно та достатньо, щоб кожен розв'язок* $y(x) \not\equiv 0$ *рівняння* $L_n(y) = 0$ *мав на* відрізку $[a,b]$ *не більше ніж* $n-1$ *нулів, враховуючи їх кратність*». У роботі [47] В. Я. Скоробогатько показав, що розклад оператора L_n у добуток лінійних дійсних множників із неперервними на $[a,b]$ коефіцієнтами

$$L_n \equiv \left[\frac{d}{dx} + \alpha_1(x)\right]\ldots\left[\frac{d}{dx} + \alpha_n(x)\right] \tag{8}$$

є необхідною і достатньою умовою однозначної розв'язності задачі (5), (7) при довільному виборі точок $x_i,\ i = 1,\ldots,q$, з відрізка $[a,b]$, а також достатньою умовою для справдження теореми про диференціальні нерівності С. А. Чаплигіна стосовно до задачі Коші для рівняння $L_n(y) = 0$. У роботі [46] він запропонував простіше доведення теореми Маммана, а також встановив необхідні та достатні умови розкладу оператора L_n на дійсні множники першого порядку в іншій формі, безпосередньо за коефіцієнтами оператора L_n, у припущенні, що ці коефіцієнти є n разів неперервно диференційовні на відрізку $[a,b]$. Останній результат був узагальнений В. Я. Скоробогатьком [39] на випадок системи лінійних диференціальних рівнянь

$$L_n(y) \equiv \left[E\frac{d^n}{dx^n} + A_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n(x)\right]y = 0\,, \tag{9}$$

де E – одинична матриця, $A_j(x)$ – квадратні матриці, n раз неперервно диференційовні на відрізку $[a,b]$. Пізніше в роботах М. К. Бугіра [6] було досліджено зв'язки між неосциляцією розв'язків системи (9), однозначною розв'язністю задачі (6), (9) і розкладом матричного оператора L_n на лінійні множники першого порядку. Виявилося, що, на відміну від скалярного випадку, ці властивості у випадку системи рівнянь не завжди є рівносильними.

У роботах В. Я. Скоробогатька та О. І. Бобика [55, 56] узагальнено результати роботи [47] на випадок нелінійного диференціального рівняння

$$N_n(y) \equiv y^{(n)} - f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0\,, \tag{10}$$

де під розкладом оператора $N_n(y)$ на множники першого порядку розуміється зображення його у вигляді вкладених один у другий нелінійних диференціальних операторів першого порядку:

$$N_n(y) = \frac{dz_{n-1}}{dx} - f_{n-1}(x, z_{n-1}), \qquad z_{n-1} = \frac{dz_{n-2}}{dx} - f_{n-2}(x, z_{n-2}), \qquad \ldots,$$

$$z_1 = \frac{dy}{dx} - f_0(x, y), \qquad z_0 = y\,. \tag{11}$$

При цьому встановлено, що, якщо існує зображення (11), де $f_j(x, z_j)$ – функція, $(n-j)$ раз неперервно диференційовна за x, z_j, $x \in [a,b]$, $z_j \in \mathbb{R}$, для якої, крім того, виконується нерівність $\left|\dfrac{\partial f_j}{\partial z_j}\right| \le k_1 = \text{const}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, то існує єдиний розв'язок задачі (6), (10). Обернене твердження, на відміну від лінійного випадку, не справджується.

Виходячи із фізичної інтерпретації n-точкової задачі для звичайних диференціальних рівнянь, В. Я. Скоробогатько в 1963 р. поставив проблему: дослідити аналоги багатоточкової задачі для рівнянь із частинними похідними. Така задача, наприклад, для нестаціонарного рівняння із частинними похідними (n-го порядку відносно $\partial/\partial t$)

$$L[u(t, x_1, \ldots, x_m)] = f(t, x_1, \ldots, x_m) \tag{12}$$

полягає в знаходженні процесу, що описується цим рівнянням, якщо відомі стани (фотографії) процесу для n фіксованих моментів часу. Математично задача формулюється так: в області $\Omega = \{(t,x) : 0 < t < T < +\infty,\ x \in \mathbb{R}^n\}$ знайти розв'язок рівняння (12), що задовольняє умови

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T\,. \tag{13}$$

Задачі з умовами (13) і з більш загальними умовами

$$\sum_{r=0}^{n-1} a_r \frac{\partial^r u(t_j, x)}{\partial t^r} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad 0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T, \qquad a_r \in \mathbb{C}\,,$$

а також багатоточкові задачі з кратними вузлами для лінійних гіперболічних, параболічних, безтипних (у тому числі не розв'язаних відносно старшої похідної за часом) рівнянь і систем рівнянь, а також для слабко нелінійних та псевдодиференціальних рівнянь вивчались під керівництвом В. Я. Скоробогатька і при постійній його увазі в роботах Б. Й. Пташника [24, 25] і його учнів: П. І. Штабалюка, Б. О. Салиги, Л. І. Комарницької, Л. П. Силюги, П. Б. Василишина, І. С. Клюс, М. М. Симотюка (див. роботи [1, 4, 26, 30–34] і бібліографію у них).

При дослідженні коректності багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними в безмежному шарі на шуканий розв'язок накладались умови періодичності або майже періодичності за змінними $x_1,\dots,x_m$, а в обмежених областях − умови типу умов Діріхле. Виявилось, що при цьому коректність задачі не є стійкою відносно малих змін її параметрів, а існування розв'язку, взагалі кажучи, пов'язане з проблемою малих знаменників. Встановлено умови розв'язності задач у різних функціональних просторах, які, як правило, формулюються у теоретико-числових термінах. Для аналізу оцінок знизу малих знаменників, які у багатьох випадках мали складну нелінійну структуру, використовували метричний підхід. При цьому були доведені нові теореми метричного характеру.

Наведемо деякі результати для одного з найпростіших випадків [4]. Для єдиності розв'язку задачі

$$L[u] \equiv \sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^n u}{\partial t^{n-s} \partial x^s} = 0, \qquad u(t_j, x) = \varphi_j(x), \qquad j = 1,\dots,n, \tag{14}$$

де L − оператор, строго гіперболічний за Петровським, a_s − дійсні числа, $t_j = (j-1)t_0$, $t_0 > 0$, у класі 2π-періодичних за x функцій необхідно та достатньо, щоб усі числа

$$\beta_{pr} = \frac{1}{2\pi}(\lambda_p - \lambda_r)t_0, \qquad p, r = 1,\dots,n, \tag{15}$$

були ірраціональними (тут λ_q, $q = 1,\dots,n$, − корені рівняння $\sum_{s=0}^{n} a_s \lambda^{n-s} = 0$). Якщо числа (15) погано апроксимуються раціональними числами, а функції φ_j є періодичними та достатньо гладкими, то існує класичний розв'язок задачі (14), 2π-періодичний за x, який неперервно залежить від $\varphi_j(x)$, $j = 1,\dots,n$.

Методи, розроблені при дослідженні багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними, були розвинені та застосовані також при вивченні задач типу задачі Діріхле, задач про періодичні та майже періодичні розв'язки, а також нелокальних крайових задач для лінійних та слабко нелінійних гіперболічних, параболічних і безтипних (в тому числі не розв'язаних відносно старшої похідної за часом) рівнянь і систем рівнянь у роботах Б. Й. Пташника [25], а також В. М. Поліщук, В. С. Ільківа, П. І. Штабалюка, В. В. Фіголя, І. О. Бобика, Н. М. Задорожної, Л. І. Комарницької, Н. І. Білусяк, М. М. Симотюка, І. Я. Кміть, О. Д. Власія, О. М. Медвідь (див. роботи [2, 3, 7, 9, 27–29, 35] та бібліографію у них).

Треба відзначити, що дослідження багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними започаткувало розвиток нового напрямку в сучасній теорії диференціальних рівнянь − умовно коректні задачі для рівнянь із частинними похідними, розв'язність яких пов'язана із проблемою малих знаменників. В. Я. Скоробогатько проявляв постійний інтерес до цього напрямку та активно сприяв його розвиткові.

Вказані дослідження стали джерелом нових проблем метричної теорії чисел, багато з яких розв'язані спільно з білоруським математиком − професором В. І. Берніком, який очолює тепер у Мінську школу з теорії чисел, засновану академіком В. Г. Спринджуком.

5. n-точкова геометрія і загальна теорія відносності. В опублікованій у 1970 році роботі «n-точкова планіметрія» [53] В. Я. Скоробогатько звернув увагу на те, що достатні умови однозначної розв'язності n-точкової задачі для звичайного диференціального рівняння однакові за формою як для рівняння порядку 2, так і для $n > 2$. Це навело його на думку про можливість існування планіметрій, де «прямі» визначаються n точками. Для випадку $n = 2$ у спільній з Ю. Т. Богачевським роботі ще 1968 року

[57] показано, що розв'язки диференціального рівняння генерують не тільки звичайні прямі геометрії Евкліда, але й «прямі» (в розумінні найкоротші) планіметрії Лобачевського

$$y = \frac{1}{k}\ln\frac{1 + c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}}{1 - c_1 e^{kx} - c_2 e^{-kx}},$$

які є розв'язками нелінійного рівняння $\left(\frac{d}{dx} - k\right)\left(\frac{d}{dx} + k\right)\frac{1 - e^{ky}}{1 + e^{ky}} = 0$. Тут же запропоновано узагальнення планіметрії Лобачевського, в якій «прямими» будуть лінії

$$y = \lambda \ln\frac{1 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\alpha_k x}}{1 - \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\alpha_k x}}, \tag{16}$$

де λ, c_k − довільні дійсні сталі, α_k − дійсні різні сталі. Функція

$$z = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\alpha_k x}$$

є розв'язком диференціального рівняння

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dx} - \alpha_i\right)z = 0$$

подібно до функції $z_1 = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$, яка є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{d}{dx} - k\right)\left(\frac{d}{dx} + k\right)z_1 = z_1'' - k^2 z_1 = 0.$$

Отже, через n довільно розташованих точок, що не співпадають, проходить єдина «пряма» (16).

Тут також зроблено наступний важливий крок: рівняння «прямих» багатоточкових геометрій записуються у натуральній формі. Тоді рівнянням прямих планіметрії Евкліда є $\frac{d\alpha}{ds} = 0$, де α − кут нахилу деякої фіксованої прямої до кривої. Триточкові прямі − це звичайні кола, а їх рівняння − $\frac{d^2\alpha}{ds^2} = 0$. У загальному випадку «прямими» n-точкового аналога планіметрії Евкліда є розв'язки диференціального рівняння

$$\frac{d^{n-1}\alpha}{ds^{n-1}} = 0, \tag{17}$$

і через кожні n довільно розташованих точок, що не співпадають, проходить єдина крива, що є розв'язком рівняння (17).

У роботі [49] В. Я. Скоробогатько пропонує отримувати рівняння теорії тяжіння на основі ідей n-точкової геометрії − шляхом вкладення диференціальних операторів.

При цьому відповідно до способу побудови системи рівнянь поля тяжіння − шляхом вкладення рівнянь − будується і система рівнянь для геодезичних, а для самих геодезичних будується функціонал, який мінімізується цими геодезичними. У роботі [48] В. Я. Скоробогатько отримує n-точкові рівняння геодезичних шляхом мінімізації квадратичної форми відносно похідних k-го порядку функції Лаґранжа. Продовженням цієї роботи стала стаття «Одна система рівнянь космогонії четвертого порядку» [43], де шляхом вкладення будується система рівнянь четвертого порядку, розв'язками якої є одночасно світ Айнштайна і світ де Сіттера. Геодезичні, що відповідають цим розв'язкам, є 4-точковими, серед них містяться геодезичні світів Айнштайна і де Сіттера. Виходячи з ідей n-точкової геометрії, В. Я. Скоробогатько сформулював гіпотезу про те, що єдина теорія поля повинна описуватись системою диференціальних рівнянь із частинними похідними вищого порядку, яка будується шляхом вкладення операторів подібно до того, як це робиться в роботах [43, 49].

Наступним етапом у розвитку ідей n-точкової геометрії стала побудова та використання n-точкової метрики або міри n точок. У першій роботі цього циклу [59] n-точковій прямій, тобто розв'язкові рівняння $y^{(n)} = 0$, який проходить через n заданих точок $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, ставиться у відповідність число

$$\rho(M_1, \ldots, M_n) = \frac{1}{n!}\left(\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix}^2 + \right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} y_1 & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1 \\ y_2 & x_2^{n-2} & \ldots & x_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n & x_n^{n-2} & \ldots & x_n & 1 \end{vmatrix}^2 + \ldots + \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & y_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \ldots & y_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & y_n & 1 \end{vmatrix}^2 \right)^{1/2},$$

назване *мірою* n точок на площині. Запроваджена міра задовольняє таку систему аксіом:

1°) $\rho\left[M_{(1}, M_2, \ldots, M_{n)}\right] = \rho(M_1, M_2, \ldots, M_n)$;

2°) $\rho(M_1, \ldots, M_n) \geq 0$ (знак рівності є лише при $M_1 = M_2 = \ldots = M_n$);

3°) $\rho(M_2, M_3, \ldots, M_{n+1}) + \rho(M_1, M_3, \ldots, M_{n+1}) + \ldots + \rho(M_1, \ldots, M_{n-1}, M_{n+1}) \geq$
$\geq \rho(M_1, M_2, \ldots, M_n)$.

У роботі [61], виконаній учнем В. Я. Скоробогатька Г. М. Фешиним, запроваджено поняття n-точкової похідної, побудовано диференціальну геометрію кривих і поверхонь.

Міру системи n точок в n-точковій геометрії вже псевдоевклідового типу природним чином запроваджено в роботі [70]. Тут встановлено, що групою інваріантності цієї метрики є група $SO(n-1, 1)$. Враховуючи, що багатоточкова пряма у просторі-часі відповідає рухові за поліноміальним законом, можна сказати, що цим побудовано модель теорії відносності для прискорених (за поліноміальним законом) рухів. З міркувань розмірності у теорії з'являються сталі прискорення різних порядків, а умова дійсності перетворень забороняє рухи з необмеженими прискореннями різних порядків подібно до того, як забороненими є рухи з необмеженою швидкістю у спеціальній теорії відносності.

З осені 1971 року у Львівському університеті розпочав роботу семінар, керований спільно В. Я. Скоробогатьком і М. Т. Сеньківим. З його перших засідань розглядалися рівняння кривих ліній в термінах кривини k, досліджувались існування та побудова лаґранжіанів і перетворень, що їх не змінюють. Метод вкладення лаґранжіанів, запропонований В. Я. Скоробогатьком, ще раз привів до припущення, що в релятивістській кінематиці часток діє принцип обмеженого прискорення. Узгоджений з таким принципом лаґранжіан, виражений через кривину лінії руху, силові (динамічні) характеристики цього руху − чотири-вектор сили та енергію

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \sigma^2/c^2}\sqrt{1 - k^2/k_0^2}},$$

а також відповідні нелокальні перетворення координат між системами відліку, що рухаються рівноприскорено, отримано в 1971 році Р. Я. Мацюком. Подібні дослідження проведено пізніше італійськими вченими школи Caianiello. Оцінка сталої k_0 – універсального максимального прискорення, зроблена Я. І. Комарницьким.

Продовжуючи дослідження локально варіаційних властивостей n-точкової геометрії третього порядку в квазіевклідових просторах малого виміру, Р. Я. Мацюк у роботах [17, 62–66] збудував узагальнене перетворення Лежандра та пуассонівську структуру, яким відповідає динаміка третього порядку вздовж ґвинтових ліній. Виявилося, що ці структури мають безпосередню інтерпретацію в термінах динаміки із в'язями для руху рівноприскорених або спінових часток. Встановлено, що у тривимірному просторі-часі маса частки викликає перетворення її траєкторії у ґвинтову лінію, а при відсутності маси геометрія повністю вкладається у межі конциркулярної геометрії тривимірного псевдоевклідового простору-часу. На відміну від цього, у двовимірних моделях доданок, що містить масу, не порушує меж конциркулярної геометрії.

В. Я. Скоробогатько неодноразово зауважував, що опис у термінах n-точкової геометрії можливий для багатьох процесів і явищ, а метрику, що задовольняє аксіоми метричної геометрії, можна запроваджувати неєдиним чином, виходячи з різних принципів, наприклад, з вимоги інваріантності метрики відносно певних перетворень. Це яскраво проявилося, зокрема, в роботі В. Я. Скоробогатька, Ю. С. Владімірова і В. О. Пелиха [58], де багатоточкова метрика будується як інваріант дробово-лінійних відображень. В основу покладено дробово-лінійні відображення вигляду

$$w_k = \frac{a_{1k}z_1 + \ldots + a_{nk}z_n + b_k}{c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n + d}. \tag{18}$$

Відображення (18) продовжуються у проективне замикання $\mathbb{C}P^n$ і вичерпують групу $Aut\,\mathbb{C}P^n$ усіх біголоморфних автоморфізмів $\mathbb{C}P^n$. Довільним $n+3$ точкам $z^{(1)},\ldots,z^{(n+3)}$, що не співпадають, поставлено у відповідність два інваріанти Γ_1 і Γ_2 відображень (18), які у випадку $n=1$ співпадають з ангармонічним відношенням. Таким чином, інваріанти Γ_1 і Γ_2 групи $Aut\,\mathbb{C}P^n$ є природним узагальненням класичного інваріанта, що відповідає чотирьом точкам простору $\mathbb{C}P^1$ і на основі якого визначаються відстані в інтерпретаціях геометрії Лобачевського, запропонованих Бельтрамі, Келі – Кляйном, Пуанкаре. У роботі [58], яка стала результатом довготривалої творчої співдружності з Ю. С. Владіміровим, котрий спільно з Ю. І. Кулаковим створив фундаментального характеру бінарну геометрофізику, доведено, що проективний варіант багатоточкової геометрії відповідає бінарним структурам рангу $(r+1, r)$ у цій теорії.

Узагальнене ангармонічне відношення використано у роботі [40] для побудови узагальненої метрики Лобачевського $\rho = |\ln|\Gamma_1||$ і для доведення зв'язку n-точкової геометрії з кристалографією.

Наукова школа В. Я. Скоробогатька впродовж багатьох років тісно співпрацювала з білоруською школою фізиків-теоретиків і її засновником академіком Ф. І. Федоровим. Науковий інтерес В. Я. Скоробогатька викликала, зокрема, система рівнянь Федорова, яка описує універсальним чином практично всі сучасні теорії поля. Для цієї системи рівнянь В. Я. Скоробогатько та О. О. Мякіннік на основі альтерніонного підходу запропонували метод зображення загального розв'язку у вигляді степеневих рядів [73].

До досліджень у напрямі n-точкової геометрії, теорії відносності та астрофізики В. Я. Скоробогатько залучив Р. Я. Мацюка, Р. М. Пляцка, В. О. Пелиха, Б. І. Гнатика, Я. І. Комарницького, О. О. Мякіннік, О. Л. Петрука.

В. О. Пелих, зокрема, дослідив коректність задачі Коші для рівнянь Гільберта – Айнштайна, дав коректне обґрунтування координатних умов у загальній теорії відносності [20], поставив та дослідив $SO(3)$-коваріантну задачу Коші для цих рівнянь [21], розв'язав остаточно питання про потік гравітаційної енергії в підході Інфельда [22].

Систематичні дослідження розв'язків Матіссона, які описують поведінку часток зі спіном у загальній теорії відносності без обмежень на величину швидкості частки відносно джерела, з початковими умовами для швидкості поблизу світлового конуса проведені Р. М. Пляцком [23, 71, 72]. Виявлено суттєві відхилення світових ліній і траєкторій швидких часток зі спіном від відповідних геодезичних ліній у полях Шварцшильда та Керра. У цьому контексті досліджено високоенергетичні квазікласичні розв'язки загально-коваріантного рівняння Дірака, асоційовані з коловими орбітами класичної (неквантової) частки зі спіном.

Б. І. Гнатик дослідив закономірності руху ударних хвиль довільного ступеня релятивізму в неоднорідних космічних середовищах, запропонував новий наближений метод опису точкового вибуху в довільно неоднорідному середовищі, побудував ряд ударно-хвильових моделей астрофізичних явищ [8].

Без сумніву, ідеї В. Я. Скоробогатька матимуть подальший розвиток, а результати знайдуть нові застосування, зокрема, при встановленні умов відсутності вузлових точок розв'язків еліптичних систем рівнянь у необмежених областях, при дослідженні багатоточкових задач і задач з інтегральними умовами для широких класів нелінійних та навантажених рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними в обмежених і необмежених областях, нелокальних крайових задач для рівнянь із частинними похідними з відхиленнями аргументів.

1. *Бернік В. І., Василишин П. Б., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 211. – С. 11–17.
2. *Білусяк Н. І., Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1592–1602.
3. *Бобик І. О., Пташник Б. Й.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 795–802.
4. *Бобик О. І., Боднарчук П. І., Пташник Б. Й., Скоробогатько В. Я.* Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 1972. – 176 с.
5. *Бобык Е. И.* Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1967. – 11 с.
6. *Бугір М. К.* Узагальнення теорем типу Маммана на випадок систем диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер А. – 1972. – № 3. – С. 198–202.
7. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для систем рівнянь з частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. вісник. – 2004. – **1**, № 4. – С. 501–517.
8. *Гнатик Б. І.* Нестаціонарні високотемпературні процеси та ударні хвилі в космічній плазмі: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 1997. – 26 с. (під сумісним керівництвом проф. В. Скоробогатька і проф. І. Климишина).
9. *Задорожна Н. М., Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Задача з нелокальними умовами для квазілінійних гіперболічних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – Вып. 11. – С. 161–167.
10. *Каленюк П. И.* Обобщенный метод разделения переменных и его приложения: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Минск, 1992. – 34 с.
11. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщённый метод разделения переменных. – Киев: Наук, думка, 1993. – 230 с.
12. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Нелокальна крайова задача для неоднорідної системи рівнянь із частинними похідними першого порядку за часом // Мат. студії. – 2005. – **24**, № 2. – С. 159–166.

13. *Каленюк П., Нитребич З.* Загальна схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту «Львів. політехніка», 2002. – 292 с.
14. *Каленюк П. І., Скоробогатько В. Я.* Якісні методи теорії диференціальних рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – 124 с.
15. *Коробчук И. В.* Эффективные критерии разрешимости некоторых граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1972. – 13 с.
16. *Кукс Л. М.* Колеблемость решений и разрешимость первой краевой задачи для некоторых эллиптических уравнений и систем: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1962. – 15 с.
17. *Мацюк Р. Я.* Варіяційне узагальнення вільної релятивіської дзиґи // Фіз. зб. НТШ. – 2006. – **6**. – С. 206–214.
18. *Мойсак П. П.* Априорные оценки и линеризация систем уравнений типа Монжа – Ампера: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1973. – 12 с.
19. *Омельченко О. К.* О задачах разделения нулей собственных функций самосопряженного оператора второго порядка эллиптического типа // Изв. вузов. Математика. – 1958. – № 4. – С. 184–189.
20. *Пелых В. А.* Дополнительные условия в теории гравитации Эйнштейна: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1980. – 22 с.
21. *Пелых В. А.* Ковариантная, SO(3)-ковариантная задача Коши для уравнений Гильберта – Эйнштейна // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 2. – С. 35–40.
22. *Пелых В. А.* Поток гравитационной энергии в подходе Инфельда // Гравитационная энергия и гравитационные волны. – Дубна, 1989. – С. 55–60.
23. *Пляцко Р. М.* Прояви гравітаційної ультрарелятивістської спін-орбітальної взаємодії. – Київ: Наук. думка, 1988. – 148 с.
24. *Пташник Б. И.* Задача типа Валле Пуссена и некоторые краевые задачи для линейных гиперболических уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1967. – 11 с.
25. *Пташник Б. И.* Неклассические граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1988. – 34 с.
26. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
27. *Пташник Б. И., Фиголь В. В.* Краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – Вып. 22. – С. 7–10.
28. *Пташник Б. И., Штабалюк П. И.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. –1986. – **22**, № 4. – С. 669–678.
29. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
30. *Пташник Б. Й., Клюс І. С.* Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 1. – С. 22–29.
31. *Пташник Б. Й., Комарницька Л. І.* Багатоточкова задача для диференціальних рівнянь з частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Доп. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 20–23.
32. *Пташник Б. Й., Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для безтипних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1236–1249.
33. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 3. – С. 400–413.
34. *Пташник Б. Й., Штабалюк П. І.* Багатоточкова задача для гіперболічних рівнянь у класі функцій, майже періодичних по просторових змінних // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 35. – С. 210–215.
35. *Симотюк М. М., Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 4. – С. 92–101.
36. *Скоробогатько В. Я.* Бисекториальная поверхность и ее свойства // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1956. – № 5. – С. 419–422.
37. *Скоробогатько В. Я.* Геометрический признак разрешимости краевой задачи для уравнений эллиптического типа // Доп. та повідомл. Львів. ун-ту. – 1955. – Вип. 6, ч. II. – С. 108–112.

38. *Скоробогатько В. Я.* Единственность и существование решений некоторых краевых задач для дифференциального уравнения эллиптического типа 2-го порядка: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1954. – 11 с.
39. *Скоробогатько В. Я.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. – Львов: Изд-во Львов. ун-та. – 1961. – 126 с.
40. *Скоробогатько В. Я.* Многоточечная геометрия в кристаллографии // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 5. – С. 64–73.
41. *Скоробогатько В. Я.* Некоторые теоремы качественной теории уравнений с частными производными 2-го порядка // Тр. III Всесоюз. мат. съезда. – Москва: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 1. – С. 68–69.
42. *Скоробогатько В. Я.* Об областях разрешимости задачи Дирихле для самосопряженных уравнений эллиптического типа // Укр. мат. журн. – 1955. – **7**, № 4. – С. 91–95.
43. *Скоробогатько В. Я.* Одна система рівнянь космогонії четвертого порядку // Доп. АН УРСР. – 1971. – № 9. – С. 787–790.
44. *Скоробогатько В. Я.* Принцип экстремума для системы дифференциальных уравнений 2-го порядка // Сиб. мат. журн. – 1961. – № 5. – С. 746–757.
45. *Скоробогатько В. Я.* Про кулю максимального радіуса, яка вписана у дану область // Доп. АН УРСР. – 1963. – № 12. – С. 1567–1572.
46. *Скоробогатько В. Я.* Разложение дифференциального оператора на множители и теорема о дифференциальных неравенствах // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, № 2. – С. 215–219.
47. *Скоробогатько В. Я.* Разложение линейных и нелинейных дифференциальных операторов на действительные сомножители. I // Укр. мат. журн. – 1963. – **15**, № 2. – С. 217–223.
48. *Скоробогатько В. Я.* Рівняння геодезійних механіки з вищими похідними // Доп. АН УРСР. – 1970. – № 10. – С. 897–900.
49. *Скоробогатько В. Я.* Рівняння теорії тяжіння з вищими похідними // Доп. АН УРСР. – 1970. – № 9. – С. 797–800.
50. *Скоробогатько В. Я.* Теорема о дифференциальных неравенствах для эллиптического уравнения // Укр. мат. журн. – 1956. – **8**, № 3. – С. 335–338.
51. *Скоробогатько В. Я.* Теоремы качественной теории уравнений с частными производными 2-го порядка // Укр. мат. журн. – 1956. – **8**, № 4. – С. 436–440.
52. *Скоробогатько В. Я.* Теоремы о внутреннем диаметре и их применение к некоторым системам дифференциальных уравнений ядерной физики // Укр. мат. журн. – 1960. – **12**, № 4. – С. 425–429.
53. *Скоробогатько В. Я.* n-точкова планіметрія // Доп. АН УРСР. – 1970. – № 5. – С. 419–423.
54. *Скоробогатько В. Я., Бобик О. І.* Про структуру вузлових ліній власних функцій диференціального рівняння 2-го порядку еліптичного типу // Доп. АН УРСР. – 1966. – № 6. – С. 719–722.
55. *Скоробогатько В. Я., Бобык Е. И.* По поводу статьи «Разложение линейных и нелинейных дифференциальных операторов на действительные сомножители» // Укр. мат. журн. – 1966. – **18**, № 4. – С. 138.
56. *Скоробогатько В. Я., Бобык Е. И.* Разложение линейных и нелинейных дифференциальных операторов на действительные сомножители. II // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 6. – С. 783–798.
57. *Скоробогатько В. Я., Богачевський Ю. Т.* Ще одна інтерпретація планіметрії Лобачевського // Доп. АН УРСР. – 1968. – № 4. – С. 312–313.
58. *Скоробогатько В. Я., Владимиров Ю. С., Пелых В. А.* Многоточечная геометрия и теория физических структур // Памяти Лобачевского посвящается. – Казань, 1992. – Вып. 1. – С. 18–30.
59. *Скоробогатько В. Я., Фешин Г. Н., Пелых В. А.* n-точечная планиметрия типа Евклида // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 5–10.
60. *Скоробогатько В. Я., Фешин Г. М., Пелых В. А.* Математическая модель теории относительности на основе n-точечной планиметрии // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 71–81.
61. *Фешин Г. М.* Похідні в n-точковій планіметрії // Зб. наук. праць аспірантів Львів. політех. ін-ту. – 1971. – № 5. – С. 6–9.
62. *Matsyuk R.* A first order prolongation of the conventional space // Different. Geometry and Appl. – Brno: Masaryk Univ., 1996. – P. 403–415.

63. *Matsyuk R.* Autoparallel variational description of the free relativistic top third order dynamics // Different. Geometry and its Appl. – Opava: Silesian Univ., 2001. P. 447–459.
64. *Matsyuk R.* Hamilton – Ostrohrads'kyj approach to relativistic free spherical top dynamics // Differential Geometry and Appl. – Brno: Masaryk Univ., 1999. – P. 547–551.
65. *Matsyuk R.* Third-order relativistic dynamics: classical spinning particle travelling in a plain // Condenced Matter Physics. – 1998. – **1**, No. 3(15). – P. 453–462.
66. *Matsyuk R.* Variation by parts and vector differential forms in higher order variational calculus on fibred manifolds // Мат. студії. – 1999. – **11**, № 1. – P. 85–107.
67. *Pelykh V.* Comment on «Self-dual teleparallel formulation of general relativity and the positive energy theorem» // Phys. Rev. D. – 2005. – **72**. – 108502.
68. *Pelykh V. O.* Equivalence of the spinor and tensor methods in the positive energy problem // J. Math. Phys. – 2000. – **41**, No. 8. – P. 5550–5556.
69. *Pelykh V. O.* Knot points of double-covariant system of elliptic equations and preferred frames in general relativity // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – **35**. – P. 8135–8144.
70. *Pelykh V. O.* Sen–Witten orthonormal three-frame and gravitational energy quasilocalization // Class. Quantum Grav. – 2003. – **20**. – P. 1115–1123.
71. *Plyatsko R.* Gravitational ultrarelativistic spin-orbit interaction and the weak equivalence principle // Phys. Rev. D. – 1998. – **58**. – 084031.
72. *Plyatsko R.* Ultrarelativistic circular orbits of spinning particles in a Schwarzschild field // Class. Quantum Grav. – 2005. – **22**. – P. 1545–1553.
73. *Skorobohat'ko V. Ja., Mjakinnik O. O.* On a power series representation of the general solution of Fedorov's set of equations // Gravitation and Cosmology. – 1995. – **1**, No. 4. – P. 315–318.

ИССЛЕДОВАНИЯ В. Я. СКОРОБОГАТЬКО В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И МНОГОТОЧЕЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИХ ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ

Приведен обзор результатов В. Я. Скоробогатько, касающихся теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, а также построенной им n*-точечной геометрии. Освещено дальнейшее развитие идей В. Я. Скоробогатько в этих направлениях, а также применение полученных результатов.*

V. YA. SKOROBOGAT'KO'S INVESTIGATIONS IN THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MULTIPOINT GEOMETRY AND THEIR FURTHER DEVELOPMENT

The results of V. Ya. Skorobogat'ko in the theory of ordinary differential equations and partial differential equations and his n*-point geometry have been reviewed. Further development of V. Ya. Skorobogatko's ideas in these directions, as well as application of the obtained results, are examined.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.08.07