

ВПЛИВ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ НА ПЕРЕНОС ДОМІШОК У ТВЕРДОМУ РОЗЧИНІ

Сформульовано взаємозв'язані рівняння механодифузії для бінарного твердого розчину, які враховують деформаційну залежність коефіцієнта дифузії домішки. З використанням часового осереднення, теорії розмірностей і методу асимптотичного розв'язання за малим параметром побудовано розрахункову схему наближеного розв'язання сформульованої задачі вібродифузії для шару, яка реалізується у першому наближенні за малим параметром, що характеризує деформаційну залежність енергії активації. Проведено кількісне дослідження розв'язку та порівняння нульового і першого наближень.

Вступ. Прискорення дифузії домішок під дією механічних коливань спостерігається для різних середовищ [1, 5–7, 9, 11, 12, 14]. Механізми такого впливу теж можуть бути різними – зміна стану рідини в пористих середовищах [14], стоншення дифузного шару на межі рідини – тверда фаза [1, 7], акустичні потоки [1, 11]. У роботі [9] наведено результати вивчення впливу механічних (ультразвукових) хвиль на дифузю домішок у металах. Встановлено, що вібрації приводять до збільшення коефіцієнта дифузії, що може бути використане в практиці дифузійного насичення матеріалів чи інтенсифікації перерозподілу домішок.

При описі явища вібродифузії необхідно виходити з системи рівнянь механодифузії, яка повинна враховувати нелінійність ефектів взаємодії механічних і дифузійних процесів. Ця нелінійність може мати геометричну природу (геометрична нелінійність) – бути пов'язаною з нелінійністю рівнянь стану, та кінетичних співвідношень (фізична нелінійність) – нелінійністю балансових рівнянь. У роботі [9] фактично пропонується врахувати нелінійність, пов'язану лише з кінетичним співвідношенням для потоку маси, а, власне, – з деформаційною залежністю коефіцієнта дифузії. При цьому можна враховувати лише деформаційну залежність енергії активації дифузійного процесу.

У цій роботі будуть сформульовані взаємозв'язані рівняння механодифузії для бінарного твердого розчину, які враховують деформаційну залежність коефіцієнтів дифузії. З використанням часового осереднення, теорії розмірностей і методу асимптотичного розв'язання за малим параметром буде побудовано розрахункову схему наближеного розв'язання сформульованої задачі вібродифузії для шару, яка реалізується в першому наближенні за малим параметром, що характеризує деформаційну залежність енергії активації. На основі цього буде проведено кількісне дослідження розв'язку та порівняння нульового й першого наближень.

1. Вихідні рівняння. Розглянемо тверде тіло – бінарний ізотропний пружний твердий розчин, який займає область (V) евклідового простору, обмежену гладкою поверхнею (S) . У тілі протікають процеси переносу домішкових компонент і механічні процеси, спричинені періодичним за часом силовим навантаженням і джерелами домішок на поверхні (S) .

Повна система рівнянь для опису взаємозв'язаних механічних і дифузійних процесів у тілі включає рівняння балансу маси, імпульсу, визначальні співвідношення – рівняння стану та кінетичні рівняння, а також геометричні співвідношення [1–4]. Надалі деформації будемо вважати малими, так що тензор деформації визначається через вектор переміщення \mathbf{U} співвідношенням

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{U} + (\nabla \otimes \mathbf{U})^T). \quad (1)$$

Якщо у системі немає джерел маси компонент, то рівняння балансу маси має вигляд [3]

$$\rho \frac{dC}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (2)$$

де $C \equiv C_2 = \rho_2/\rho$ – концентрація домішкової компоненти ($C_1 = 1 - C_2$), $\rho = \rho_1 + \rho_2$ – сумарна густина, ρ_k – густина k -ї компоненти, $k = 1, 2$; $\mathbf{J} \equiv \mathbf{J}_2 = \rho_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v})$ – потік домішкової компоненти ($\mathbf{J}_1 = -\mathbf{J}_2$), $\mathbf{v} = (\rho_1\mathbf{v}_1 + \rho_2\mathbf{v}_2)/\rho$ – швидкість центру мас; $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ – субстанціональна похідна, ∇ – оператор Гамільтона.

Рівняння балансу імпульсу для системи в цілому без урахування масових сил буде

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (3)$$

де $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – тензор напружень Коші.

Потік маси \mathbf{J} є функцією термодинамічної сили $\mathbf{X} = -\nabla\mu$, де μ – хімічний потенціал домішкової компоненти, тобто $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{X})$. У лінійному наближенні маємо $\mathbf{J} = L\mathbf{X}$, де L – кінетичний коефіцієнт, який є функцією параметрів стану – тензора деформації $\hat{\mathbf{e}}$ та концентрації C . Коли матеріал ізотропний, для L маємо $L = L(I_1, I_2, I_3, C)$, де $I_1 = e_{kk} \equiv e$, $I_2 = e_{kl}e_{kl}$, $I_3 = e_{jk}e_{kl}e_{lj}$ – інваріанти тензора деформації.

Визначальні співвідношення для тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ та хімічного потенціалу μ будуть [1, 2]

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\left(K - \frac{2}{3}G \right) e - K\beta C \right] \hat{\mathbf{1}} + 2G\hat{\mathbf{e}}, \quad \mu = dC - \frac{\beta}{\rho} Ke, \quad (4)$$

де K – модуль стиску; G – модуль зсуву; β – коефіцієнт концентраційного розширення; d – коефіцієнт концентраційної залежності хімічного потенціалу.

Лінійне кінетичне рівняння з урахуванням співвідношень (4) набуває вигляду

$$\mathbf{J} = -Ld\nabla C + L\frac{\beta}{\rho} K\nabla e, \quad (5)$$

а рівняння балансу маси (2) буде

$$\rho \frac{dC}{dt} = \nabla \cdot \left[Ld\nabla C - L\frac{\beta}{\rho} K(\nabla \cdot \mathbf{U}) \right]. \quad (6)$$

Прийнявши, що $\rho = \text{const}$, і ввівши коефіцієнт дифузії $D = Ld/\rho$, рівняння (5), (6) перепишемо так:

$$\mathbf{J} = -\rho D\nabla C + \frac{\beta D}{d} K\nabla e, \quad \frac{dC}{dt} = \nabla \cdot (D\nabla C) - \nabla \cdot \left[\frac{\beta D}{\rho d} K(\nabla \cdot \mathbf{U}) \right]. \quad (7)$$

Аналогічно, підставляючи рівняння стану для напружень (4) у рівняння руху (3), отримаємо

$$\rho \frac{d^2\mathbf{U}}{dt^2} = G\Delta\mathbf{U} + \left(K + \frac{1}{3}G \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) - K\beta\nabla C. \quad (8)$$

Хоча геометричне співвідношення (1) і визначальні співвідношення (4) прийнято лінійними, рівняння (7), (8) є нелінійними за рахунок залежності кінетичних коефіцієнтів від деформації та концентрації, а також конвективної складової похідної за часом.

Деформаційна залежність коефіцієнта дифузії вважається ключовою при описі явища вібродифузії [9]. Надалі обмежимося врахуванням залежності коефіцієнта дифузії лише від тензора деформації. Конвективною складовою похідної за часом будемо нехтувати.

2.1. Постановка задачі для шару. Нехай шар, віднесений до декартової системи координат, займає область $0 \leq x \leq \ell$. На поверхні $x = 0$ задана концентрація C_0 та нормальне до поверхні гармонічне за часом переміщення $U_a \cos \omega t$, а при $x = \ell$ підтримується нульова концентрація домішок і ця поверхня вільна від силового навантаження:

$$C \Big|_{x=0} = C_0, \quad (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_1) \Big|_{x=0} = -U_a \cos \omega t, \quad C \Big|_{x=\ell} = 0, \quad (\hat{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{n}_2) \Big|_{x=\ell} = 0. \quad (9)$$

Тут $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ – вектори зовнішніх нормалей до поверхонь.

У початковий момент часу $t = 0$ переміщення, швидкість і концентрація домішки в області шару дорівнюють нулеві:

$$\mathbf{U} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad C \Big|_{t=0} = 0. \quad (10)$$

При вибраних зовнішніх діях вектори переміщення \mathbf{U} і потоку \mathbf{J} та концентрація C залежать лише від координати x і часу t : $\mathbf{U} = (U, 0, 0)$, $U = U(x, t)$, $\mathbf{J} = (J, 0, 0)$, $J = J(x, t)$, $C = C(x, t)$.

Тоді вихідна система рівнянь механодифузії для бінарного розчину набуває вигляду

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - K\beta \frac{\partial C}{\partial x}, & \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta D}{\rho d} K \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right), \\ J &= -\rho D \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\beta D}{d} K \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

2.2. Подання коефіцієнта дифузії. Коефіцієнт дифузії D можна записати у вигляді [9]

$$D = D_0 e^{-\frac{\mathcal{U}}{kT}},$$

де \mathcal{U} – енергія активації; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура; D_0 – сталий коефіцієнт.

Вважаємо [9], що енергія активації \mathcal{U} є функцією першого інваріанта тензора деформації, тобто $\mathcal{U} = \mathcal{U}(e)$. Прийmemo цю залежність лінійною

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \alpha e, \quad (12)$$

де \mathcal{U}_0 і $\alpha = \partial \mathcal{U} / \partial e$ – сталі величини.

Використавши рівність (12), коефіцієнт дифузії подамо у вигляді

$$D = D' e^{-\frac{\alpha e}{kT}}, \quad D' = D_0 e^{-\frac{\mathcal{U}_0}{kT}}, \quad (13)$$

де D' – коефіцієнт дифузії в недеформованому тілі.

При малій зміні енергії активації $|\alpha e / kT| \ll 1$ співвідношення (13) наблизимо двочленом

$$D = D' - D' \frac{\alpha}{kT} \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Тоді система рівнянь механодифузії (11) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - K\beta \frac{\partial C}{\partial x}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= D' \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \alpha D' \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} - D' \frac{\alpha}{kT} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \alpha D' \frac{\alpha}{kT} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right), \\ J &= -\rho D' \frac{\partial C}{\partial x} + \alpha \rho D' \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \rho D' \frac{\alpha}{kT} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} - \alpha \rho D' \frac{\alpha}{kT} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\alpha = \beta K / \rho d$ – параметр взаємозв'язку.

Зазначимо, що при нехтуванні взаємозв'язком процесів ($\beta = 0$, $\alpha = 0$) система рівнянь (14) стає незв'язаною.

3.1. Розділення рухів. З метою розділення коливних (швидких) рухів, спричинених механічним гармонічним навантаженням, та еволюційних (повільних, осереднених), спричинених дифузійними та нелінійними процесами, використаємо операцію осереднення за періодом коливань [13]. Будемо використовувати зображення шуканого розв'язку $F = \{U, C\}$ у вигляді суми двох складових:

$$F = \tilde{F} + \bar{F},$$

де $\tilde{F} = \{\tilde{U}, \tilde{C}\}$ характеризують коливні, а $\bar{F} = \{\bar{U}, \bar{C}\}$ – еволюційні процеси. У зв'язку з цим функції \tilde{F} і \bar{F} будемо називати відповідно коливною і осередненою складовою розв'язку F .

Проведемо операцію осереднення шуканого розв'язку за період T_t [13]. Тоді

$$\bar{F}(x, t) = \frac{1}{T_t} \int_t^{t+T_t} F(x, \tau) d\tau, \quad \tilde{F}(x, t) = F(x, t) - \bar{F}(x, t).$$

Прийmemo, що [13]

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \approx \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial t^2} \approx \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial t^2}, \quad \bar{\bar{F}} \approx \bar{F}, \quad \bar{\bar{F}\bar{F}} \approx \bar{F}\bar{F}, \quad \bar{\bar{\tilde{F}\tilde{F}}} \approx 0.$$

Тоді з рівнянь (14) і початково-крайових умов (9), (10) отримуємо для визначення осереднених і хвильових складових переміщення, концентрації та потоку маси систему рівнянь

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} &= E \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} - K\beta \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} - D' \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial x^3} &= -D' \frac{\alpha}{kT} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial x^3} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \right) \right], \\ \bar{J} &= -\rho D' \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \alpha \rho D' \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \\ &\quad + \rho D' \frac{\alpha}{kT} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \right) \right], \\ \rho \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2} &= E \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} - K\beta \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t} - D' \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} + \alpha D' \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial x^3} &= -D' \frac{\alpha}{kT} \left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} + \right. \\ &\quad + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial x^3} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial x^3} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{J} = & -\rho D' \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \alpha \rho D' \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \rho D' \frac{\alpha}{kT} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} - \right. \\ & \left. - \alpha \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

а також умови на поверхнях

$$x = 0 : \quad \bar{C} = C_0, \quad \bar{U} = 0, \quad \tilde{C} = 0, \quad \tilde{U} = U_a \cos \omega t, \quad (17)$$

$$x = \ell : \quad \bar{C} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = 0, \quad \tilde{C} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} = 0. \quad (18)$$

Початкові умови для коливних складових ставити не будемо, розглядаючи їх у наближенні усталених за часом, а для осереднених складових початкові умови мають вигляд

$$t = 0 : \quad \bar{U} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = 0, \quad \bar{C} = 0. \quad (19)$$

Зазначимо, що при нехтуванні осередненими силами інерції досить ставити лише умову $\bar{C} = 0$.

3.2. Перехід до безрозмірних величин. Перейдемо до безрозмірного часу та координати для осереднених і хвильових складових за такими формулами:

$$\bar{t} = \frac{t}{\tilde{t}_*}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tilde{t}_*}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\tilde{x}_*}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\tilde{x}_*}, \quad (20)$$

де \bar{t}_* , \bar{x}_* , \tilde{t}_* , \tilde{x}_* – характерні значення відповідних величин. Тут \bar{t} , \bar{x} – безрозмірні осереднені час і координата; \tilde{t} , \tilde{x} – безрозмірні хвильові час і координата. З рівностей (20) випливають формули зв'язку між осередненими й хвильовими безрозмірними часом і координатою:

$$\bar{t} \tilde{t}_* = \tilde{t} \tilde{t}_*, \quad \bar{x} \tilde{x}_* = \tilde{x} \tilde{x}_*. \quad (21)$$

Характерні час і віддаль для коливних складових процесів природно вибрати у вигляді $\tilde{t}_* = 1/\omega$ і $\tilde{x}_* = c_1/\omega$, тобто близькими до періоду механічних коливань і довжини хвилі. Характерною швидкістю тоді буде $\tilde{v}_* = \tilde{x}_*/\tilde{t}_* = c_1$ – швидкість поздовжньої хвилі.

Для осереднених функцій за характерну віддаль природно брати геометричний розмір тіла ℓ : $\bar{x}_* = \ell$. У випадку напівбезмежного тіла за ℓ можна взяти характерний розмір розподілу концентрацій чи переміщення. Оскільки час і координата пов'язані між собою, то характерний час зручно вибрати з умови $\bar{x}_*/\sqrt{D'\bar{t}_*} = 1$. Тоді маємо $\bar{t}_* = \bar{x}_*^2/D' = \ell^2/D'$.

Для осереднених і коливних складових \bar{C} , \tilde{C} , \bar{U} , \tilde{U} , \bar{J} , \tilde{J} шуканих функцій формули переходу до безрозмірних величин будуть такими:

$$\bar{U}' = \frac{\bar{U}}{\bar{U}_*}, \quad \bar{C}' = \frac{\bar{C}}{\bar{C}_*}, \quad \bar{J}' = \frac{\bar{J}}{\bar{J}_*}, \quad \tilde{U}' = \frac{\tilde{U}}{\tilde{U}_*}, \quad \tilde{C}' = \frac{\tilde{C}}{\tilde{C}_*}, \quad \tilde{J}' = \frac{\tilde{J}}{\tilde{J}_*}, \quad (22)$$

де \bar{U}_* , \bar{C}_* , \bar{J}_* , \tilde{U}_* , \tilde{C}_* , \tilde{J}_* – характерні значення шуканих функцій; \bar{U}' , \bar{C}' , \bar{J}' – безрозмірні осереднені, а \tilde{U}' , \tilde{C}' , \tilde{J}' – хвильові складові переміщення, концентрації та потоку відповідно.

Надалі штрихи при безрозмірних функціях опускаємо. При потребі перехід до розмірних величин буде спеціально відзначено.

Підставивши (20)–(22) у системи рівнянь (15), (16), отримуємо

$$\begin{aligned}\alpha_i \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{t}^2} &= \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{x}}, \\ \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \bar{x}^2} + \alpha \beta_{ec} \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial \bar{x}^3} &= -\bar{\varepsilon}_e \left\{ \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{x}} + \right. \\ &\quad + \frac{\alpha \varepsilon_{ec}^2}{\chi^2 \beta_{ec} \text{Rd}} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{x}} \right) - \alpha \beta_{ec} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial \bar{x}^3} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\varepsilon_{ec}^2}{\chi^2 \beta_{ec}^2} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial \bar{x}^3} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} \right) \right] \right\}, \\ \bar{J} &= -\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{x}} + \alpha \beta_{ec} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{\varepsilon}_e \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{x}} + \frac{\alpha \varepsilon_{ec}^2}{\chi^2 \beta_{ec} \text{Rd}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{x}} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \beta_{ec} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\varepsilon_{ec}^2}{\chi^2 \beta_{ec}^2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} \right) \right],\end{aligned}\quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} - \varepsilon_c \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}},$$

$$\begin{aligned}\text{Rd} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{t}} - \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} + \text{Rd} \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^3} &= -\tilde{\varepsilon}_e \left\{ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon_\delta \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \chi \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \right) - \text{Rd} \left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon_\delta \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^3} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\chi \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} + \chi^2 \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^3} \right) - \chi \left(\xi_c \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon_c \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \right) \right] \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{J} &= -\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} + \text{Rd} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{\varepsilon}_e \left\{ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon_\delta \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} - \text{Rd} \left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varepsilon_\delta \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} + \chi \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} \right) - \chi \varepsilon_c \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (24)$$

Крайові умови для безрозмірних величин перепишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned}x = 0 : \quad \bar{C} &= 1, \quad \bar{U} = 0, \quad \tilde{C} = 0, \quad \tilde{U} = U_a \cos t, \\ x = \ell : \quad \bar{C} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \tilde{C} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} = 0.\end{aligned}\quad (25)$$

При записі рівнянь (23)–(25) позначено $\tilde{U}_* = \frac{1}{\omega} \text{Ma} c_1$; $C_* = \alpha \frac{\text{Ma}}{\text{Rd}}$;

$\tilde{J}_* = \rho c_1 \alpha \frac{\text{Ma}}{\text{Rd}^2}$; $\bar{U}_* = \frac{1}{E} \beta K C_0 \ell$; $\bar{C}_* = C_0$; $\bar{J}_* = \frac{1}{\ell} \rho D' C_0$. Безрозмірні параметри

в цих рівняннях визначаються виразами $\alpha_i = \frac{D'^2}{\ell^2 c_1^2}$; $\text{Rd} = \frac{c_1^2}{\omega D'}$; $\beta_{ec} = \frac{\beta K}{E}$;

$\tilde{\varepsilon}_c = \frac{\alpha \beta (1 - c_2^2/c_1^2)}{\text{Rd}}$; $\xi_c = \frac{C_0}{\alpha \text{Rd}}$; $\bar{\varepsilon}_e = \frac{\alpha \beta K C_0}{E k T}$; $\chi = \frac{\tilde{x}_*}{\ell \omega} = \frac{c_1}{\ell \omega}$; $\varepsilon_\delta = \frac{\beta_1 K C_0}{E \text{Ma}}$;

$\tilde{\varepsilon}_e = \frac{\alpha \text{Ma}}{k T}$; $\varepsilon_{ec} = \frac{\text{Ma}}{C_0}$; c_2 – швидкість поперечної механічної хвилі; E – модуль Юнга; Ma – акустичне число Маха.

Наведемо також кількісні оцінки окремих безрозмірних параметрів. Для цього прийнемо такі характерні значення характеристик матеріалу і параметрів навантаження [2]:

$$\begin{aligned}\beta &= 10^{-2}, & \rho &\approx 10^4 \text{ кг/м}^3, & c_1 &= 5 \cdot 10^3 \text{ м/с}, & c_2 &= 2 \cdot 10^3 \text{ м/с}, \\ K &\approx E = 10^{11} \text{ Па}, & G &= 4 \cdot 10^{10} \text{ Па}, & D' &= 10^{-16} \text{ м}^2/\text{с}, \\ \omega &= 10^4 \div 10^6 \text{ с}^{-1}, & \ell &= 10^{-2} \text{ м}, & d &= 10^6 \text{ Дж/кг}.\end{aligned}\quad (26)$$

Тоді отримуємо

$$\begin{aligned}\alpha_i &= 4 \cdot 10^{-35}, & \beta_{ec} &= 10^{-2}, & \alpha &= 10^{-3}, \\ \text{Rd} &= 2.5 \cdot 10^{17} \div 2.5 \cdot 10^{19}, & \tilde{\epsilon}_c &= 3 \cdot 10^{-23} \div 3 \cdot 10^{-25}.\end{aligned}\quad (27)$$

Таким чином, осередненою силою інерції, вклад якої характеризується параметром $\alpha_i \ll 1$, у рівняннях руху можна знехтувати. Незначним є також вплив хвильової складової концентрації на механічні коливання ($\tilde{\epsilon}_c \ll 1$). Зміна коливної складової концентрації в часі в основному визначається коливною складовою деформації, як це видно з рівнянь для концентрації ($\text{Rd}^{-1} \ll 1$). Оскільки вибрано, що $\alpha/kT \ll 1$, мають місце оцінки (27), а також $\text{Ma} \ll 1$, то отримуємо, що $\bar{\epsilon}_e \ll 1$ і $\tilde{\epsilon}_e \ll 1$. Малість параметрів α_i , $\tilde{\epsilon}_c$, $\bar{\epsilon}_e$, $\tilde{\epsilon}_e$, Rd^{-1} буде використана при розв'язуванні задачі (23)–(25).

Зазначимо також, що для поставленої задачі за нехтування осередненими силами інерції рівняння механоїфузії (23) можна подати так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} - (1 - \alpha\beta_{ec}) \left[\frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{\epsilon}_e \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{C} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{x}} \right) \right] = \\ = \bar{\epsilon}_e \frac{\epsilon_{ec}^2}{\chi^2 \beta_{ec}} \left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^3 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\alpha}{\text{Rd}} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \right) \right],\end{aligned}$$

$$\bar{U} = \int_0^x \bar{C}(\xi) d\xi,$$

$$\bar{J} = -(1 - \alpha\beta_{ec}) \left(\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{x}} - \bar{\epsilon}_e \bar{C} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{x}} \right) - \bar{\epsilon}_e \frac{\alpha \epsilon_{ec}^2}{\chi^2 \beta_{ec}} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{1}{\text{Rd}} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} \right).$$

Отже, рівняння дифузії є нелінійним відносно осередненої концентрації.

3.3. Наближений розв'язок задачі. Система рівнянь для визначення осереднених і коливних складових шуканих функцій є зв'язаною. Для відокремлення цих систем рівнянь використаємо метод асимптотичного розвинення за малими параметрами задачі $\bar{\epsilon}_e$ і $\tilde{\epsilon}_e$. Шукані функції $\bar{F} = \{\bar{U}, \bar{C}\}$, $\tilde{F} = \{\tilde{U}, \tilde{C}\}$ подамо у вигляді

$$\bar{F} = \sum_{n=0}^N \bar{\epsilon}_e^n \bar{F}^{(n)} + o(\bar{\epsilon}_e^{N+1}), \quad \tilde{F} = \sum_{n=0}^N \tilde{\epsilon}_e^n \tilde{F}^{(n)} + o(\tilde{\epsilon}_e^{N+1}) \quad (28)$$

при $\bar{\epsilon}_e, \tilde{\epsilon}_e \rightarrow 0$.

Підставивши рівності (28) у рівняння (23), (24) і крайові умови (25), прирівнявши вирази при однакових степенях $\bar{\epsilon}_e, \tilde{\epsilon}_e$, отримуємо рівняння для знаходження нульового $\bar{F}^{(0)} = \{\bar{U}^{(0)}, \bar{C}^{(0)}\}$, $\tilde{F}^{(0)} = \{\tilde{U}^{(0)}, \tilde{C}^{(0)}\}$ і першого $\bar{F}^{(1)} = \{\bar{U}^{(0)} + \bar{\epsilon}_e \bar{U}^{(1)}, \bar{C}^{(0)} + \bar{\epsilon}_e \bar{C}^{(1)}\}$, $\tilde{F}^{(1)} = \{\tilde{U}^{(0)} + \tilde{\epsilon}_e \tilde{U}^{(1)}, \tilde{C}^{(0)} + \tilde{\epsilon}_e \tilde{C}^{(1)}\}$ наближень. Осереднену та коливну складові потоку маси природно визначати за формулами (23), (24) у тому ж наближенні, що й функції U, C .

3.3.1. Нульове наближення. Осереднена складова. Система рівнянь для визначення осереднених складових шуканих функцій в нульовому наближенні має вигляд

$$\alpha_i \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{t}^2} = \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}}, \quad \frac{\partial \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} + \alpha \beta_{ec} \frac{\partial^3 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^3} = 0, \\ \bar{J}^{(0)} = -\frac{\partial \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}} + \alpha \beta_{ec} \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2}. \quad (29)$$

Умовами на поверхнях шару та початковими умовами, як впливає з (25), (28), є

$$x = 0 : \quad \bar{C} = 1, \quad \bar{U} = 0; \quad x = \ell : \quad \bar{C} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} = 0, \\ t = 0 : \quad \bar{U} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} = 0, \quad \bar{C} = 0. \quad (30)$$

Оскільки коефіцієнт α_i згідно з (26), (27) є малим, то можемо знехтувати доданком, що його містить, тобто силами інерції. Тоді перші два рівняння з (29) перепишемо так:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} + \alpha \beta_{ec} \frac{\partial^3 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^3} = 0. \quad (31)$$

Крайові умови залишаються без змін, що ж до початкових, то достатньо умови $\bar{C} = 0$ при $t = 0$.

З рівнянь (29), (31) та умов (30) впливає, що

$$\frac{\partial \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{t}} - (1 - \alpha \beta_{ec}) \frac{\partial^2 \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} = 0, \quad \bar{U}^{(0)} = \int_0^x \bar{C}^{(0)}(\xi) d\xi, \\ \bar{J}^{(0)} = - (1 - \alpha \beta_{ec}) \frac{\partial \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}}. \quad (32)$$

У рівняннях (32) вираз $(1 - \alpha \beta_{ec})$ відіграє роль безрозмірного коефіцієнта дифузії і при нехтуванні механічними процесами дорівнює одиниці. Отже, в нульовому наближенні для розглядуваної задачі вплив процесу деформації призводить до зміни коефіцієнта дифузії. Переміщення (деформації, механічні напруження) визначаються концентрацією.

Розв'язок системи рівнянь (32) з крайовими умовами (30) буде [8]:

$$\bar{C}^{(0)}(x, t) = 1 - \frac{x}{\ell} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-(\frac{n\pi a}{\ell})^2 D t} \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \\ \bar{U}^{(0)}(x, t) = x - \frac{x^2}{2\ell} + \frac{2\ell}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-(\frac{n\pi a}{\ell})^2 D t} \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (33)$$

де $a = \sqrt{1 - \alpha \beta_{ec}}$.

Хвильова складова. Систему рівнянь для знаходження хвильової складової шуканих функцій у нульовому наближенні запишемо як

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} - \varepsilon_c \frac{\partial \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{x}}, \quad \text{Rd} \frac{\partial \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{t}} - \frac{\partial^2 \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} + \text{Rd} \frac{\partial^3 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \\ \tilde{J}^{(0)} = -\frac{\partial \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} + \text{Rd} \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2}. \quad (34)$$

Крайові умови мають вигляд умов (25), записаних відносно нульового наближення функцій.

Розв'язок цієї системи будемо шукати у вигляді

$$\tilde{C}^{(0)} = \text{Re} \left[(c_1 e^{-ik_1 \tilde{x}} + c_2 e^{-ik_2 \tilde{x}} + c_3 e^{ik_1 \tilde{x}} + c_4 e^{ik_2 \tilde{x}}) e^{i\tilde{t}} \right], \\ \tilde{U}^{(0)} = \text{Re} \left[(u_1 e^{-ik_1 \tilde{x}} + u_2 e^{-ik_2 \tilde{x}} + u_3 e^{ik_1 \tilde{x}} + u_4 e^{ik_2 \tilde{x}}) e^{i\tilde{t}} \right]. \quad (35)$$

Тут k_1, k_2 – хвильові числа, які як корені біквдратного рівняння

$$(1 - \tilde{\varepsilon}_c \text{Rd})k^4 + (i \text{Rd} - 1)k^2 - i \text{Rd} = 0,$$

що виникає при підстановці подання (35) у рівняння (34), визначаються за формулою

$$k_{1,2}^2 = \frac{(1 - i \text{Rd}) \pm \sqrt{(i \text{Rd} + 1)^2 - 4\tilde{\varepsilon}_c i \text{Rd}^2}}{2(1 - \tilde{\varepsilon}_c \text{Rd})}. \quad (36)$$

Використавши (35), (36), крайові умови (25) та оцінки (27), запишемо розв'язок системи рівнянь (34) у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{(0)}(x, t) &= U_a \operatorname{Re} \left[\frac{\cos k_1 \ell \omega (1 - x/\ell)/c_1}{\cos k_1 \ell \omega / c_1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{A_1}{A_2} \frac{\operatorname{tg} k_1 \ell \omega / c_1}{\sin k_2 \ell \omega / c_1} \cos k_2 \ell \omega (1 - x/\ell)/c_1 \right], \\ \tilde{C}^{(0)}(x, t) &= U_a \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 - k_1^2}{\varepsilon_c} \left[\frac{\sin k_1 \ell \omega (1 - x/\ell)/c_1}{\cos k_1 \ell \omega / c_1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^{ik_2 \ell \omega / c_1} \operatorname{tg} k_1 \ell \omega / c_1 \sin k_2 \ell \omega (1 - x/\ell)/c_1}{\sin k_2 \ell \omega / c_1} \right] \right\}, \end{aligned}$$

де $A_1 = \frac{i}{\varepsilon_c} (1 - k_1^2)$, $A_2 = \frac{i}{\varepsilon_c} (1 - k_2^2)$.

3.3.2. Перше наближення. Осереднена складова. Система рівнянь для визначення поправки осередненої складової розв'язку в першому наближенні має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}^{(1)}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial \bar{C}^{(1)}}{\partial \bar{x}} &= 0, & \frac{\partial \bar{C}^{(1)}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial^2 \bar{C}^{(1)}}{\partial \bar{x}^2} + \alpha \beta_{\text{ec}} \frac{\partial^3 \bar{U}^{(1)}}{\partial \bar{x}^3} &= -f_c^{(1)}, \\ \bar{J}^{(1)} &= -\frac{\partial \bar{C}^{(1)}}{\partial \bar{x}} + \alpha \beta_{\text{ec}} \frac{\partial^2 \bar{U}^{(1)}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{f}_j^{(1)} \end{aligned} \quad (37)$$

при таких крайових і початкових умовах:

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad \bar{C}^{(1)} &= 0, \quad \bar{U}^{(1)} = 0; & x = \ell : \quad \bar{C}^{(1)} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{U}^{(1)}}{\partial \bar{x}} = 0, \\ t = 0 : \quad \bar{C}^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Тут введено позначення

$$\begin{aligned} \bar{f}_c^{(1)} &= \frac{\partial \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}} + \frac{\alpha \varepsilon_{\text{ec}}^2}{\chi^2 \beta_{\text{ec}} \text{Rd}} \left(\frac{\partial \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \right) - \alpha \beta_{\text{ec}} \left[\frac{\partial \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^3} + \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon_{\text{ec}}^2}{\chi^2 \beta_{\text{ec}}^2} \left(\frac{\partial \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^3} + \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} \right) \right], \\ \bar{f}_j^{(1)} &= \frac{\partial \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}} + \frac{\alpha \varepsilon_{\text{ec}}^2}{\chi^2 \beta_{\text{ec}} \text{Rd}} \frac{\partial \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{C}^{(0)}}{\partial \bar{x}} - \\ &\quad - \alpha \beta_{\text{ec}} \left(\frac{\partial \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\varepsilon_{\text{ec}}^2}{\chi^2 \beta_{\text{ec}}^2} \frac{\partial \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}^2} \right). \end{aligned}$$

Система рівнянь (37) з умовами (38) має такий розв'язок [8]:

$$\bar{C}^{(1)}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 D'(t-\tau)} \left(\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f_c^{(1)}(\xi, \tau) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \right) d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

$$\bar{U}^{(1)}(x, t) = \int_0^x \bar{C}^{(1)}(\xi, t) d\xi. \quad (39)$$

Хвильова складова розв'язку визначається із системи рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}^{(1)}}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(1)}}{\partial \tilde{x}^2} - \varepsilon_c \frac{\partial \tilde{C}^{(1)}}{\partial \tilde{x}}, \quad \text{Rd} \frac{\partial \tilde{C}^{(1)}}{\partial \tilde{t}} - \frac{\partial^2 \tilde{C}^{(1)}}{\partial \tilde{x}^2} + \text{Rd} \frac{\partial^3 \tilde{U}^{(1)}}{\partial \tilde{x}^3} = -\tilde{f}_c^{(1)},$$

$$\tilde{J} = -\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{x}} + \text{Rd} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{f}_j^{(1)}$$

при крайових умовах

$$x = 0 : \quad \tilde{C}^{(1)} = 0, \quad \tilde{U}^{(1)} = 0;$$

$$x = \ell : \quad \tilde{C}^{(1)} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{U}^{(1)}}{\partial \tilde{x}} = 0.$$

Тут введено позначення

$$\tilde{f}_c^{(1)} = \frac{\partial \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon_\delta \left(\frac{\partial \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} + \chi \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} \right) -$$

$$- \text{Rd} \left[\frac{\partial \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^3 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon_\delta \left(\frac{\partial \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^3 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^3} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2\chi \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} + \chi^2 \frac{\partial \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^3 \bar{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^3} \right) - \right.$$

$$\left. - \chi \left(\xi_{\varepsilon_c} \frac{\partial \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon_c \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} \frac{\partial \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} \right) \right],$$

$$\tilde{f}_j^{(1)} = \frac{\partial \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon_\delta \frac{\partial \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} - \text{Rd} \left[\frac{\partial \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_\delta \left(\frac{\partial \bar{U}^{(0)}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} + \chi \frac{\partial \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial^2 \bar{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}^2} \right) - \chi \varepsilon_c \frac{\partial \tilde{U}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{C}^{(0)}}{\partial \tilde{x}} \right].$$

Дослідимо осереднені складові розв'язку.

Проведено кількісний аналіз отриманих виразів (33), (39) і (29), (37) для осередненої концентрації і густини потоку маси. У першому наближенні за малим параметром $\bar{\varepsilon}_e$ функції \bar{C} і \bar{J} осереднених концентрації та потоку визначаються через функції $\bar{C}^{(0)}$, $\bar{J}^{(0)}$, $\bar{C}^{(1)}$, $\bar{J}^{(1)}$ за формулами

$$\bar{C} = \bar{C}^{(0)} + \bar{\varepsilon}_e \bar{C}^{(1)}, \quad \bar{J} = \bar{J}^{(0)} + \bar{\varepsilon}_e \bar{J}^{(1)},$$

а в нульовому наближенні маємо

$$\bar{C} = \bar{C}^{(0)}, \quad \bar{J} = \bar{J}^{(0)}.$$

Результати обчислень, які проводилися при $\omega = 10^4 \text{ с}^{-1}$, $c_1 = 10^{3.5} \text{ м/с}$, $\alpha = 0.1$, $\bar{\varepsilon}_c = 10^{-21}$, $\text{Rd} = 10^{19}$, $\beta_{ec} = 0.01$, $\chi = (2n-1)/8\pi$, $n = 1, 2, \dots$, де n – порядок резонансу, подані на рис. 1–4.

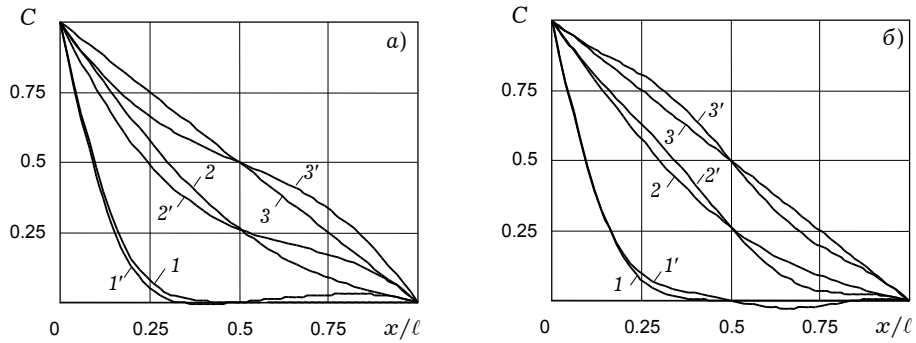


Рис. 1

На рис. 1 показано розподіл концентрації по товщині шару за першого (рис. 1а) та другого (рис. 1б) резонансів для нульового (криві 1–3) та першого (криві 1'–3') наближень відповідно для значень $\bar{t} = tD'/\ell^2 = 0.01, 0.1, 1$ при $\varepsilon_{ec} = 0.1, \bar{\varepsilon}_e = 4 \cdot 10^{-4}$. Значення $\bar{t} = 1$ безрозмірного часу відповідає практично усталеному розподілу концентрації. Бачимо, що вплив коливань суттєвіше проявляється для більших часів і приводить до неоднорідності градієнта концентрації по товщині шару в усталеному режимі, на відміну від нульового наближення, яке не враховує впливу механічних коливань.

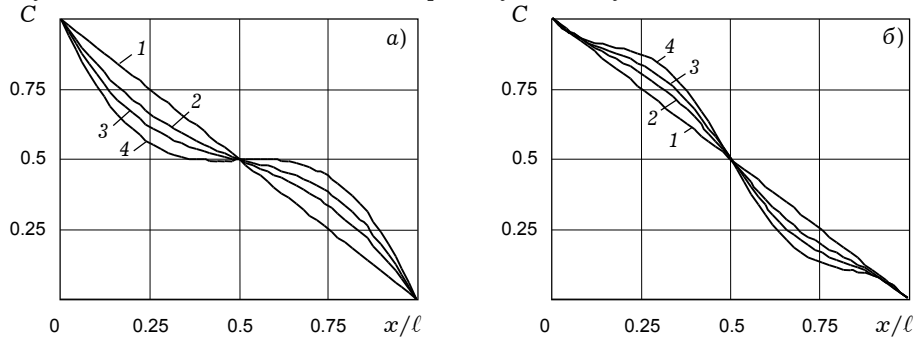


Рис. 2

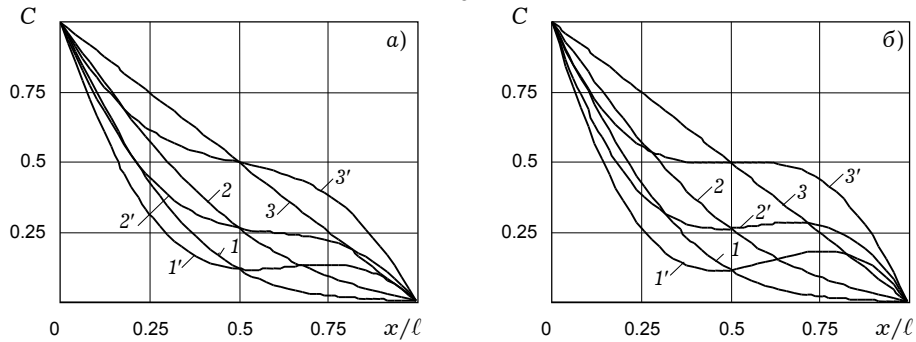


Рис. 3

Рис. 2 ілюструє залежність розподілу концентрації по товщині шару для першого (рис. 2а) і другого (рис. 2б) резонансів при $\bar{\varepsilon}_e = 4 \cdot 10^{-4}$ для різних значень параметра ε_{ec} (кривим 1–4 відповідають значення $\varepsilon_{ec} = 0, 0.1, 0.125, 0.15$). При цьому $\varepsilon_{ec} = 0$ відповідає нульовому наближенню. Бачимо, що зі зростанням параметра ε_{ec} вплив коливання на розподіл концентрації збільшується. Зазначимо принагідно, що різний характер змінності концентрації по товщині шару для першого і другого резонансів, який спостерігаємо на рис. 1 і рис. 2, пов'язаний, очевидно, з різним характером розподілу амплітуди коливань при резонансі і, як наслідок, – з різною за величиною зміною енергії активації і коефіцієнта дифузії для різних точок тіла.

На рис. 3 зображено розподіли по товщині шару концентрації домішки за першого резонансу при $\varepsilon_{ec} = 0.125$ (рис. 3а) та $\varepsilon_{ec} = 0.15$ (рис. 3б) для $\bar{\varepsilon}_e = 4 \cdot 10^{-4}$. Криві 1–3 відповідають нульовому, а криві 1'–3' – першому наближенню при $\bar{t} = tD'/\ell^2 = 0.05, 0.1, 1$. Бачимо, що при збільшенні амплітудного параметра характер зміни розподілу зберігається (див. рис. 1).

При дії вібрації спостерігається також збільшення потоку домішки через шар. Це ілюструють графіки, наведені на рис. 4, де показано часову залежність густини потоку на поверхні $x = \ell$ шару при $\bar{\varepsilon}_e = 4 \cdot 10^{-4}$ для нульового (крива 1) та першого наближень (криві 2, 3 відповідно для $\varepsilon_{ec} = 0.1, 0.15$). При збільшенні амплітудного параметра характер залежності від часу потоку домішки зберігається, однак величина потоку збільшується. При цьому усталеність потоку спостерігається практично для часу $\bar{t} > 0.5$.

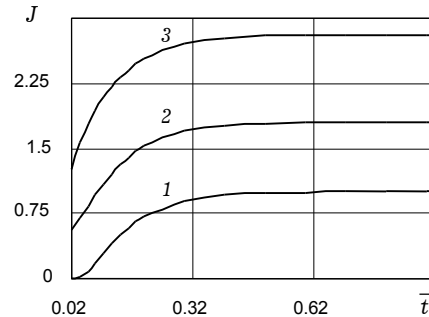


Рис. 4

Таким чином, з урахуванням деформаційної залежності енергії активації дифузії для розглянутої задачі отримуємо нелінійне осереднене рівняння дифузії відносно осередненої концентрації. Розподіл домішки та її потік через шар суттєво залежать від амплітуди коливань. При наявності коливань потік домішки через шар збільшується, а її розподіл по товщині шару стає хвилюподібним навіть в усталеній ситуації. Такі ефекти можуть бути важливими, наприклад, при дифузійному насиченні матеріалів.

1. Архангельский М. Е. Воздействие акустических колебаний на процесс диффузии // Успехи физ. наук. – 1967. – 92, № 2. – С. 181–206.
2. Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М. Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах. – Київ: Наук. думка, 1978. – 232 с.
3. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. – Москва: Мир, 1964. – 456 с.
4. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. – Москва: Мир, 1974. – 304 с.
5. Кортнев А. В., Макарова Т. А. Воздействие ультразвуковых колебаний на диффузионные процессы в жидкости // Акустика и ультразвук. – 1966. – Вып. 1. – С. 23–41.
6. Кортнев А. В., Макарова Т. В. Исследование влияния ультразвука на диффузионную проницаемость мембран животного происхождения // Акустика и ультразвук. техника. – 1968. – Вып. 3. – С. 27–39.
7. Кортнев А. В., Макарова Т. В., Серденко В. В. Об эффективности УЗ воздействия на диффузию через пористые стеклянные перегородки // Акустика и ультразвук. техника. – 1970. – Вып. 6. – С. 3–5.
8. Кошляков М. С., Глинер Э. Б., Смирнова М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – Москва: Физматиз, 1962. – 676 с.
9. Кулемин А. В. Ультразвук и диффузия в металлах. – Москва: Металлургия, 1978. – 200 с.
10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 599 с.
11. Макарова Т. В., Серденко В. В. О некоторых закономерностях влияния УЗ на диффузионный перенос вещества в жидкой среде через пористые перегородки // Акустика и ультразвук. техника. – 1970. – Вып. 6. – С. 6–9.
12. Михайлов В. М., Нерезин В. Д. Исследование процесса диффузии в пористых средах при ультразвуковых воздействиях // Тр. ВНИИЯГГ. – 1975. – Вып. 24. – С. 109–118.
13. Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф. Магнитотермоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1982. – 291 с.
14. Kubik J., Kondrat V., Chaplia Ye. Modelling of diffusive transport of chemicals in porous media accounting for solid matrix vibrations // Studia Geotechn. et Mech. – 1999. – XXI, No. 3–4. – P. 21–29.

ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НА ПЕРЕНОС ПРИМЕСЕЙ В ТВЕРДОМ РАСТВОРЕ

Сформулированы взаимосвязанные уравнения механодиффузии для бинарного твердого раствора, учитывающие деформационную зависимость коэффициента диффузии примеси. С использованием методов временного осреднения, теории размерности и асимптотического разложения по малому параметру построена расчетная схема приближенного решения сформулированной задачи вибродиффузии для слоя, которая реализуется в первом приближении по малому параметру, характеризующему деформационную зависимость энергии активации. Проведено количественное исследование решения и сравнение нулевого и первого приближений.

MECHANICAL VIBRATION EFFECTS ON ADMIXTURES TRANSFER IN SOLID SOLUTION

The interrelated mechanodiffusion equations for binary solid taking into account deformation dependence of admixtures diffusion coefficient have been formulated. Calculation scheme of approximate solution of the vibrodifffusion formulated problem for the layer has been constructed using time averaging, uniformity theory and asymptotic series method according to small parameter. This problem is solved in the first approach according to the small parameter which characterizes deformation dependence of activation energy.

Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.12.06