

ЗАСТОСУВАННЯ МУЛЬТИСІТКОВОГО ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ НА ШТУЧНИХ НЕЙРОМЕРЕЖАХ ДО СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ АДВЕКЦІЇ-ДИFUЗІЇ

Проведено дослідження стосовно ефективності застосування мультисіткового ітераційного нейронного методу до стаціонарних лінійних задач адвекції-дифузії у випадку великого числа Пекле. Побудовано рекурентну штучну нейронну мережу, яка реалізує мультисітковий метод. Архітектура нейронної мережі складається із субмережі прямого поширення, на кожному з шарів якої розміщені два шари кліткової субмережі. Навчання мережі полягає в мінімізації відхилення вихідного рівняння. Особливість чисельної реалізації побудованої мережі полягає в тому, що значна частина обчислень відбувається на грубіших сітках, що значно економить часові затрати та прискорює збіжність до точного розв'язку. Зі збільшенням кількості нейронів точність розв'язку покращується. Наведено результати обчислювального експерименту.

Задачі адвекції-дифузії моделюють різні фізичні процеси й в обчислювальному плані є непростими, особливо у випадку великих чисел Пекле. Зазвичай такі задачі розв'язують числовими методами [9]. Серед числових методів розв'язування крайових задач за продуктивністю домінує метод скінченних елементів (МСЕ), теоретичною основою якого є варіаційні методи [8]. У разі застосування цього методу для числової реалізації математичних моделей процесу адвекції-дифузії простежується явище втрати точності результатів. Відомо, що задачі мігрування субстанції стають сингулярно збуреними за умов значного переважання швидкості конвективного перенесення над швидкістю дифузійного перенесення. Чутливість розв'язку задачі мігрування до конвективних збурень досліджувалась у роботі [3]. Основна трудність чисельного розв'язування сингулярно збурених задач мігрування – це втрата стійкості класичних схем методу скінченних елементів (МСЕ) і методу скінченних різниць (МСР). Щоб отримати коректний (стійкий, без осциляцій) розв'язок використовують різні вдосконалені обчислювальні схеми [1–6]. Як альтернативні до відомих числових методів розв'язування крайових задач ефективно застосовують мультисіткові методи [13]. Останнім часом широкого впровадження в обчислювальну практику набула методологія штучних нейронних мереж для розв'язування багатьох важливих практичних задач, розв'язки яких побудувати відомими числовими методами складно. Загальну характеристику методів розв'язування задач, які використовують штучні нейронні мережі (ШНМ), наведено в [7, 11]. Ітераційні методи розв'язування крайових задач на нейронних мережах почали застосовувати порівняно недавно [12].

Дослідимо можливість застосування та ефективність мультисіткового ітераційного методу на рекурентних штучних нейронних мережах для розв'язування стаціонарних задач адвекції-дифузії з великим числом Пекле. Тестування нейронного мультисіткового ітераційного методу виконуватимемо на задачах, для яких відомі точні розв'язки, а наближені розв'язки знайдено іншими методами.

1. Формулювання задачі. Розглянемо задачу, яка описує стаціонарний процес адвекції-дифузії. Вважаємо, що переміщення субстанції відбувається в нестисливому середовищі, тобто вектор швидкості ω задовольняє умову $\operatorname{div} \omega = 0$. У двовимірному випадку математична задача полягає в знаходженні розв'язку диференціального рівняння вигляду [8]

$$-\Delta u + \omega \operatorname{grad} u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

де Δ – оператор Лапласа; $u(x, y)$ – безрозмірна функція, яка характеризує розподіл концентрації певної субстанції в середовищі; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена зв'язна область евклідового простору з ліпшицевою границею Γ ; $\omega = (\omega_x \text{Pe}, \omega_y \text{Pe})$ – заданий вектор швидкості перенесення субстанції; Pe – число Пекле, яке характеризує швидкість перенесення; $\omega^* = (\omega_x, \omega_y)$ – одиничний вектор, який характеризує напрям перенесення; $f(x, y) \in L_2(\Omega)$ – задана функція, що описує інтенсивність внутрішніх джерел субстанції.

На границі Γ області Ω , де шукаємо розв'язок $u(x, y)$, задано граничні умови, наприклад,

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Числова реалізація сформульованої математичної моделі традиційними числовими методами пов'язана з обчислювальними труднощами: за великих значень числа Пекле простежується нестійкість наближеного розв'язку. У цьому випадку в [1–6] застосовують узагальнені обчислювальні схеми МСЕ. Викладемо алгоритмічно ідею мультисіткового ітераційного методу стосовно до лінійних крайових задач.

2. Ідея мультисіткового методу та алгоритм його реалізації. Розглянемо лінійну крайову задачу, яка полягає в розв'язанні диференціального рівняння

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

за деяких додаткових умов, накладених на шуканий розв'язок $u(x)$, на границі області, наприклад,

$$u(x) = \chi(x), \quad x \in \Gamma.$$

Розв'язок цієї задачі шукаємо в області $G = \Omega \cup \Gamma$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. На G задано диференціальний оператор задачі $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, який діє на функцію $u(x)$, $x \in \Omega$. Через $f(x)$ і $\chi(x)$ позначено задані функції.

Для чисельного розв'язування сформульованої крайової задачі (1) виконаємо дискретизацію в такий спосіб, як у МСР [8, 12]: заміняємо область зміни неперервного аргументу дискретною множиною точок (сіткою) та апроксимуємо диференціальне рівняння різницеvim рівнянням. Тоді отримуємо таку апроксимовану крайову задачу:

$$L_h u_h(x) = f_h(x), \quad x \in G_h, \quad (2)$$

де $L_h: H \rightarrow H$ – лінійний оператор, визначений у просторі сіткових функцій; u_h, f_h – функції, визначені у вузлах сітки $G_h = \omega_h \cup \gamma_h$; $\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, \dots, N-1, h = 1/N\}$ – множина внутрішніх вузлів; $\gamma_h = \{x_i = ih, i = 0, N, h = 1/N\}$ – множина граничних вузлів.

На множині G_h неперервну функцію $u(x)$ апроксимуємо сітковою функцією $u(x_i) = u_i$; $x_i, i = 0, 1, \dots, N$, – значення x у вузлах сіткової області.

Нехай u_h – точний розв'язок рівняння (2). Через $u_h(n)$ позначимо отримане наближення на n -му кроці. Величину похибки n -ї апроксимації $v_h(n)$ обчислюємо за формулою

$$v_h(n) = u_h - u_h(n). \quad (3)$$

Величину відхилення означимо як

$$d_h(n) = f_h - L_h u_h(n). \quad (4)$$

Тоді, використовуючи (3), (4), рівняння для відхилення запишемо в такому вигляді:

$$L_h v_h(n) = d_h(n). \quad (5)$$

Зазначимо, що рівняння (5) є еквівалентним до рівняння (2). Для розв'язування дискретної задачі застосуємо технологію мультисіткових обчислень, яка полягає в організації обчислювального процесу пошуку розв'язку на певній послідовності сіток дискретизації області. Перехід від однієї сітки до іншої забезпечують спеціальні оператори пролонгації та рестрикції [11].

Задачу (2) будемо розв'язувати на множині сіток $G^{(0)}, G^{(1)}, \dots, G^{(M)}$, починаючи з деякої базової сітки $G^{(0)}$, яка характеризується найменшим кроком дискретизації h_0 . Сітку $G^{(0)}$ називають точною сіткою. Величину кроку дискретизації для довільної сітки $G^{(i)}$ можна задати таким чином: $h_i = k^{(i)} h_{i-1}$, де $k^{(i)}$ – коефіцієнт зростання кроку дискретизації. У більшості випадків приймають $k^{(i)} = k = 2$.

Перехід від сітки $G^{(i)}$ до сітки $G^{(i+1)}$ відбувається за допомогою лінійного оператора рестрикції

$$R_i^{i+1} : H_i \rightarrow H_{i+1}. \quad (6)$$

У загальному випадку вигляд оператора рестрикції R_i^{i+1} залежить від номера сітки i . В обчислювальній практиці часто застосовують при переході між різними сітками той самий оператор, який позначають через R . Оператор пролонгації P_{i+1}^i виконує зворотний перехід:

$$P_{i+1}^i : H_{i+1} \rightarrow H_i. \quad (7)$$

Ідея мультисіткового ітераційного методу полягає у послідовному розв'язуванні рівнянь відхилення (5) на грубих сітках. Далі результат передається на точніші сітки та відбувається корекція розв'язку. Для параметрів $d^{(i)}(n)$ та $v^{(i)}(n)$, що відповідають значенням відхилення і похибки у вузлах сітки $G^{(i)}$, оператори R_i^{i+1} та P_{i+1}^i відповідно задають переходи:

$$d^{(i+1)}(n) = R_i^{i+1} d^{(i)}(n),$$

$$v^{(i)}(n) = P_{i+1}^i v^{(i+1)}(n).$$

Очевидно, що обчислення на грубих сітках потребують значно меншої кількості обчислювальних ресурсів, ніж обчислення на точній сітці. З урахуванням цієї обставини мультисіткові методи містять, як правило, значну кількість переходів на сітках із великим кроком дискретизації. Для мультисіткових методів існує фіксований порядок переходів між сітками. Алгоритми переходу між елементами заданої сіткової послідовності називають циклами. Їхню структуру визначають за коефіцієнтом циклічності γ . Частіше застосовують так звані V -цикли або W -цикли. На рис. 1 зображено V -цикл та W -цикл з коефіцієнтом циклічності $\gamma = 4$.

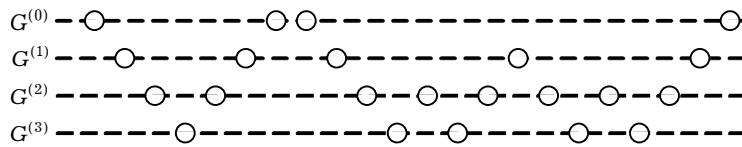


Рис. 1

Мультисітковий метод у загальному випадку містить таку послідовність етапів: перше згладжування, уточнення та друге згладжування [7].

Позначимо через $S[u^{(i)}(n), L^{(i)}, f^{(i)}]$ ітераційну схему згладжування розв'язку на сітці $G^{(i)}$. Опишемо алгоритм мультисіткового методу. Він складається з такої послідовності кроків на n -й ітерації.

Крок I. Перше згладжування наближення.

1°. Виконання v_1 разів ітераційної схеми

$$u^{(0)}(n) = S^{v_1}[u^{(0)}(n), L^{(0)}, f^{(0)}].$$

2°. Обчислення відхилення

$$d^{(0)}(n) = f^{(0)} - L^{(0)}u^{(0)}(n). \quad (8)$$

Крок II. Обчислення похибки на грубих сітках.

Цей крок полягає у послідовному розв'язуванні рівняння відхилення на грубих сітках. На кожній із сіток, за винятком останньої, визначені такі види операцій.

1°. Операція рестрикції

$$d^{(i)}(n) = Rd^{(i-1)}(n), \quad 0 < i < M. \quad (9)$$

2°. Перше згладжування похибки

$$v^{(i)}(n) = S^{v_1}[v^{(i)}(n), L^{(i)}, d^{(i)}]$$

для рівняння відхилення $L^{(i)}v^{(i)} = d^{(i)}$ на сітці $G^{(i)}$.

3°. Операція пролонгації та корекція похибки на сітці $G^{(i)}$

$$v^{(i)}(n) = v^{(i)}(n) + Pv^{(i-1)}(n), \quad 0 < i < M. \quad (10)$$

4°. Друге згладжування похибки

$$v^{(i)}(n) = S^{v_2}[v^{(i)}(n), L^{(i)}, d^{(i)}].$$

Крок III. Корекція на точній сітці.

1°. Корекція наближення $u^{(0)}(n)$ шляхом обчислення похибки $v^{(0)}(n)$ на грубих сітках

$$u^{(0)}(n+1) = u^{(0)}(n) + v^{(0)}(n).$$

2°. Друге згладжування наближення

$$u^{(0)}(n+1) = S^{v_2}[u^{(0)}(n+1), L^{(0)}, f^{(0)}].$$

Крок IV. Повторення кроків I–III до досягнення збіжності. Умова завершення ітераційного процесу має вигляд

$$\frac{|u_h(n+1) - u_h(n)|}{|u_h(n)|} < \varepsilon. \quad (11)$$

Зазначимо, що мультисітковим методам властива висока швидкість збіжності для задач із гладкими коефіцієнтами, причому швидкість збіжності не залежить від величини кроку дискретизації [7, 11, 12].

3. Побудова нейронної мережі. Реалізуємо описаний вище мультисітковий метод на нейронній мережі. Для прикладу розглянемо лінійну одновимірну крайову задачу, розв'язок якої шукаємо на дискретній множині із $M = 4$ сіток. Точна сітка містить 17 точок. Нейрони ототожнюємо з вузлами сіткової області, у якій будується наближений розв'язок крайової задачі. Архітектура нейронної мережі складається із кліткової двошарової мережі та субмережі прямого поширення. Якщо для розв'язування задачі необхідно застосувати $N + 1$ сітку дискретизації, тоді кожній з сіток, за винятком $G^{(M)}$, ставляться у відповідність два шари нейронів. Оператори рестрикції (6) і пролонгації (7) визначають граф міжнейронних з'єднань і вагові коефі-

цієнти відповідно у верхній та нижній половині нейронної мережі прямого поширення. Структура мережі допускає зворотні зв'язки, тобто обчислення в нейроні поточного шару відбуваються з урахуванням попереднього стану цього ж шару. Мережі такого типу називають рекурентними [11]. Результатом роботи штучної нейронної мережі на n -му кроці є корекція розв'язку $\Delta u(n)$. Архітектуру рекурентної ШНМ зображено на рис. 2.

Нейронна субмережа прямого поширення (рис. 2) складається із чотирьох шарів. Першим шаром є найточніша сітка $G^{(0)}$, а останнім шаром – найгрубіша сітка $G^{(3)}$. На сітці $G^{(0)}$ для переходу на $G^{(1)}$ визначено оператор рестрикції R_0^1 . На всіх решітках шарів мережі визначені два оператори: рестрикції (6) для переходу на грубішу сітку та пролонгації (7) для переходу на точнішу сітку. Перехід від точної сітки до грубішої визначимо дією оператора рестрикції $R_i^{i+1} : u^{(i)} \rightarrow u^{(i+1)}$:

$$u_j^{(i+1)} = (R_i^{i+1} u^{(i)})_j = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{2j-1}^{(i)}}{2} + u_{2j}^{(i)} + \frac{u_{2j+1}^{(i)}}{2} \right). \quad (12)$$

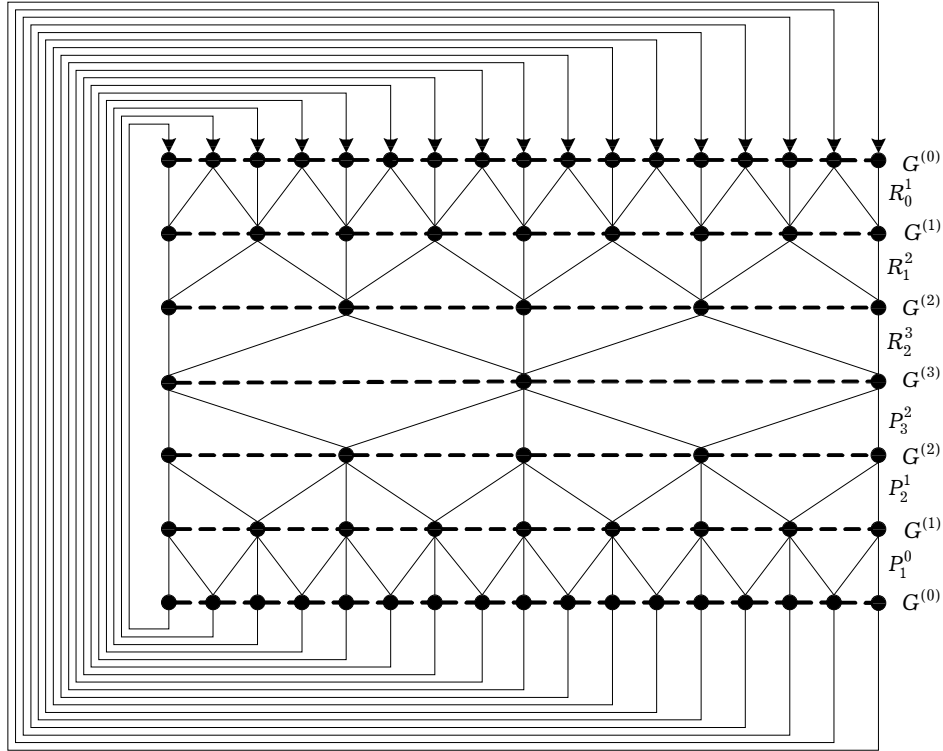


Рис. 2

Оператор вузлової пролонгації $P_{i+1}^i : u^{(i+1)} \rightarrow u^{(i)}$ для переходу з сітки $G^{(i+1)}$ на $G^{(i)}$ задамо у такому вигляді:

$$u_j^{(i)} = \begin{cases} (P_{i+1}^i u^{(i+1)})_{2j} = u_j^{i+1}, \\ (P_{i+1}^i u^{(i+1)})_{2j+1} = \frac{1}{2} (u_j^{(i+1)} + u_{j+1}^{(i+1)}). \end{cases} \quad (13)$$

На кожному із шарів субмережі прямого поширення, за винятком останнього, розташовані два шари кліткової субмережі, які виконують специфічні обчислення, що зумовлює їх різну структуру. На першому шарі мережі виконуються обчислення мультисіткової корекції за формулою вигляду

$$u_h(n+1) = Wu_h(n) + \Delta u(n),$$

де W – матриця вагових коефіцієнтів (задає коефіцієнти затухання) [7].

Структура нейрону першого шару зображена на рис. 3.

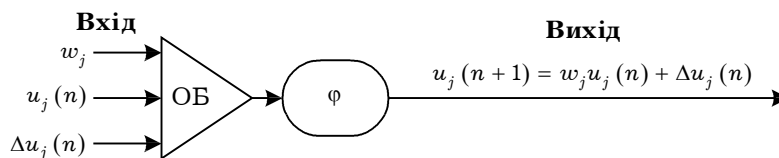


Рис. 3

Він складається з операційного блоку **ОБ** і блоку активаційної функції ϕ . Операційний блок виконує обчислення нового значення елемента u_i вектора u для наступного кроку рекурентної мережі. На вхід нейрона подаються значення елемента u_i на n -му кроці, корекція Δu_i та ваговий коефіцієнт w_j . Як результат отримуємо скореговане значення елемента u_i для наступного кроку рекурентної нейронної мережі. Активаційна функція ϕ для нейронів першого та другого шарів кліткової нейронної субмережі вибирається кусково-лінійною. Нейрон другого шару забезпечує згладжування розв'язку на поточному ітераційному кроці шляхом реалізації такої обчислювальної схеми:

$$u_h(n) = u_h(n) - \rho(L_h u_h(n) - f_h).$$

Запишемо ітераційний процес у загальному випадку

$$u_j(n) = u_j(n) + \rho \left(\sum_k w_{k,j} u_k(n) + c_j \right). \quad (14)$$

Тут $w_{k,j} \in W$; $c_j \in C$; C – відомий вектор правої частини диференціального рівняння крайової задачі у вузлових значеннях сітки; ρ – параметр затухання. Матриця вагових коефіцієнтів W у рівності (14) інтерпретує дію диференціального оператора L_h . Отже, процес формування вагових коефіцієнтів є частиною алгоритму створення кліткової нейронної субмережі й залежить від вибору типу обчислювального шаблону.

Зазначимо, що основним критерієм оцінки ефективності навчання ШНМ є цільова функція [11]. За допомогою цієї функції оцінюють, наскільки робота ШНМ відповідає бажаному результату. Цільовою функцією навчання рекурентної нейромережі виступає мінімізація відхилення $L_h u_h(n) - f_h$ [7]. Ітераційний процес будемо будувати за схемою, описаною у попередньому пункті (**кроки I–III**). На першому шарі мережі згладжуємо розв'язок за ітераційною схемою (14) та обчислюємо відхилення (8). Далі отримуємо відхилення передається на наступний шар нейронів із використанням операторів рестрикції (9), які виконують роль вагових коефіцієнтів для верхньої половини мультисіткової субмережі. На грубих сітках розв'язуємо рівняння відхилення $L_h^{(i)} v_h^{(i)} = d_h^{(i)}$, де індекс i означає номер шару. Для згладжування розв'язку застосовуємо ітераційну схему, яка реалізується на другому шарі кліткової субмережі:

$$v_h^{(i)} = v_h^{(i)} - \rho(L_h^{(i)} v_h^{(i)} - d_h^{(i)}).$$

Тоді одержані значення похибки передаємо до наступного шару, використовуючи для цього оператор рестрикції (9). Досягнувши останнього шару мережі за допомогою операторів пролонгації (10), які визначаються як вагові коефіцієнти для нижньої половини мультисіткової субмережі, отри-

мані значення похибок повертаємо на шар із точнішою сіткою. Результатом роботи буде апроксимоване значення похибки. Корекція поточного значення вектора розв'язку відбувається на першому шарі кліткової субмережі. Для завершення обчислювального процесу використовується умова (11).

Отже, навчання нейронної мережі полягає у модифікації матриці вагових коефіцієнтів, яка задає дію операторів пролонгації і рестрикції. Основною метою навчання вважається досягнення максимальної швидкості збіжності результатів ефективних операцій корекції.

4. Розв'язки деяких задач адвекції-дифузії мультисітковим ітераційним нейронним методом. Спочатку розглянемо одновимірну стаціонарну задачу міграції домішки [4]. Математичною моделлю цієї задачі є звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + \mu \frac{du}{dx} = 3\mu x^2, \quad 0 < x < 1, \quad (15)$$

та умови

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (16)$$

Крайова задача (15), (16) має такий точний розв'язок:

$$u(x) = x^3 + \frac{3x^2}{\mu} + \frac{6x}{\mu^2} - \left(1 + \frac{3}{\mu} + \frac{6}{\mu^2}\right) \frac{e^{\mu x} - 1}{e^\mu - 1}. \quad (17)$$

Для розв'язування одновимірних задач адвекції-дифузії в [4] використовували вдосконалені, стабілізаційні обчислювальні схеми МСЕ, тому що стандартні схеми МСЕ не забезпечували задовільний результат (чисельному розв'язку властиві сильні осциляції, неприйнятна точність). Дослідимо коректність числових розв'язків задачі (15), (16), знайдених нейронним ітераційним методом.

Алгоритм мультисіткового ітераційного методу для розв'язування задачі (15), (16) реалізовано за таких параметрів нейромережі: $\nu = 1$, $\omega = 0.6$. Вибрано кількість сіток $M = 2$, тобто субмережа прямого поширення складається із двох шарів.

Оператор задачі апроксимуємо таким різницеvim оператором:

$$(L^{(k)}u^{(k)})_i = (2u_i^{(k)} - u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)})/h^{(k)2} + \mu(u_{i+1}^{(k)} - u_{i-1}^{(k)})/(2h^{(k)}),$$

де k – номер сітки, $h^{(k)}$ – крок розбиття сітки.

Згладжування наближених значень шуканої функції виконуємо за такою ітераційною формулою:

$$u^{(k)}(n) = u^{(k)}(n) - \rho(L^{(k)}u^{(k)}(n) - F^{(k)}),$$

де $\rho = \frac{(h^{(k)})^2}{2}$. Для конкретної задачі кількість кроків згладжування на кожному шарі вибрано один.

Значення відхилення визначаємо за формулою

$$d_i^{(k)}(n) = F_i^{(k)} - (L^{(k)}u^{(k)}(n))_i.$$

Для переходу між сітками використовуємо лінійні оператори рестрикції (12) та пролонгації (13). Наведемо результати обчислювального експерименту для різної кількості нейронів N у нейромережі, яку використовували для розв'язування крайової задачі (15), (16).

Кількість нейронів першого шару мережі вибрано $N = 1321$. Порівняємо одержані в ході обчислювального процесу на побудованій нейронній мережі наближені результати u_H для задачі (15), (16) з точними u_T , знайденими за формулою (17), для різних значень параметра μ (див. табл. 1 і 2).

Таблиця 1

$x \backslash u$	u_T		u_H	
	$\mu = 10$	$\mu = 20$	$\mu = 10$	$\mu = 20$
0.1	0.0098939	0.0040000	0.0098919	0.0039999
0.2	0.0316055	0.0169999	0.0315994	0.0169997
0.3	0.0708215	0.0449990	0.0708078	0.0449988
0.4	0.1326900	0.0939928	0.1326640	0.0939925
0.5	0.2208980	0.1699470	0.2208520	0.1699460
0.6	0.3351510	0.2786090	0.3350800	0.2786080
0.7	0.4643480	0.4241120	0.4642480	0.4241100
0.8	0.5679970	0.5986620	0.5678780	0.5986590
0.9	0.5257230	0.7063340	0.5256210	0.7063330

На підставі порівняльного аналізу наведених у табл. 1 і 2 числових результатів можемо зробити висновок, що знайдений за допомогою рекурентної нейронної мережі розв'язок є стабільним і практично співпадає з точним розв'язком (17) і розв'язком, одержаним числово-аналітичним методом [10, с. 64, табл. 1].

Таблиця 2

$x \backslash u$	u_T		u_H	
	$\mu = 100$	$\mu = 200$	$\mu = 100, N = 531$	$\mu = 200, N = 1321$
0.1	0.001360	0.001165	0.001360	0.001165
0.2	0.009320	0.008630	0.009319	0.008630
0.3	0.029880	0.028395	0.029879	0.028395
0.4	0.069040	0.066460	0.069039	0.066460
0.5	0.132800	0.128825	0.132798	0.128825
0.6	0.227160	0.221490	0.227158	0.221490
0.7	0.358120	0.350455	0.358118	0.350455
0.8	0.531680	0.521720	0.531677	0.521720
0.9	0.753793	0.741285	0.753791	0.741284

Тепер розглянемо двовимірну крайову задачу, яка описує стаціонарну адвекцію-дифузію, у випадку локально-градієнтного розв'язку [6]:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{Pe} \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad (18)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = 0, \quad (19)$$

де Pe – число Пекле.

Аналітичний розв'язок крайової задачі (18), (19) є таким:

$$u = \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{1}{e^{\text{Pe}} - 1} (1 - e^{\text{Pe}x}) + x \right). \quad (20)$$

У праці [6] застосування для числового розв'язування двовимірної задачі адвекції-дифузії (18), (19) p - та hp -апроксимації на основі ієрархічних базисів на трикутних скінченних елементах дало змогу отримати коректний результат. Проте така обчислювальна схема була ефективною для чисел $\text{Pe} < 10^2$, а для більших значень Pe вже виникали певні обчислювальні труднощі.

Для розв'язування задачі (18), (19) застосуємо нейронний мультисітковий ітераційний метод та проілюструємо його обчислювальну ефективність за великих значень числа Пекле. Спочатку виконаємо дискретизацію області $G = [0, 1] \times [0, 1]$, у якій шукається розв'язок задачі. Розбиття області за координатами x , y будемо задавати однаковими з кількістю точок N та кроком розбиття на k -му шарі нейронів $h^{(k)}$, у цьому разі кількість сіток $M = 2$. Апроксимуємо оператор задачі скінченними різницями:

$$(L^{(k)}u^{(k)})_{i,j} = (4u_{i,j}^{(k)} - u_{i+1,j}^{(k)} - u_{i-1,j}^{(k)} - u_{i,j+1}^{(k)} - u_{i,j-1}^{(k)}) / (h^{(k)})^2 + \\ + \text{Pe} (u_{i+1,j}^{(k)} - u_{i-1,j}^{(k)}) / (2(h^{(k)})^2),$$

де $i, j = 1, \dots, N - 2$.

Унаслідок апроксимації граничні умови набувають такого вигляду:

$$(L^{(k)}u^{(k)})_{0,j} = u_{0,j}^{(k)} = 0, \quad (L^{(k)}u^{(k)})_{N-1,j} = u_{N-1,j}^{(k)} = 0,$$

$$(L^{(k)}u^{(k)})_{i,0} = (-u_{i,2}^{(k)} + 4u_{i,1}^{(k)} - 3u_{i,0}^{(k)}) / (2h^{(k)}) = 0,$$

$$(L^{(k)}u^{(k)})_{i,N-1} = (3u_{i,N-1}^{(k)} - 4u_{i,N-2}^{(k)} + 3u_{i,N-3}^{(k)}) / (2h^{(k)}) = 0.$$

Згладжування значень функції виконуємо за ітераційною формулою

$$u^{(k)}(n) = u^{(k)}(n) - \rho(L^{(k)}u^{(k)}(n) - F^{(k)}),$$

де $\rho = \frac{(h^{(k)})^2}{2}$, $F^{(k)} = \{F_{i,j}^{(k)} \mid i = 0, \dots, N - 1, j = 0, \dots, N - 1\}$, $F_{i,j}^{(k)} = 1$.

Значення відхилення визначаємо за формулою

$$d_{i,j}^{(k)}(n) = F_{i,j}^{(k)} - (L^{(k)}u^{(k)}(n))_{i,j}.$$

Проекцію відхилення на грубішу сітку виконуємо за допомогою оператора рестрикції

$$d_{i,j}^{(k+1)} = (R_k^{k+1}d^{(k)})_{i,j} = \frac{1}{8}(4d_{2i,2j}^{(k)} + d_{2i-1,2j}^{(k)} + d_{2i+1,2j}^{(k)} + d_{2i,2j-1}^{(k)} + d_{2i,2j+1}^{(k)}).$$

Проміжне згладжування на грубих сітках задаємо формулою

$$v^{(k)}(n) = v^{(k)}(n) - \rho(L^{(k)}v^{(k)}(n) - d^{(k)}(n)),$$

де $\rho = \frac{(h^{(k)})^2}{2}$; $v^{(k)}(n)$ – поточне значення похибки на сітці $G^{(k)}$.

Оператор лінійної вузлової пролонгації на двовимірних сітках $P_{k+1}^k : G^{(k+1)} \rightarrow G^{(k)}$ задаємо у такий спосіб:

$$v_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} (P_{k+1}^k v^{(k+1)})_{2i,2j} = v_{i,j}^{(k+1)}, \\ (P_{k+1}^k v^{(k+1)})_{2i+1,2j} = \frac{1}{2}(v_{i,j}^{(k+1)} + v_{i+1,j}^{(k+1)}), \\ (P_{k+1}^k v^{(k+1)})_{2i,2j+1} = \frac{1}{2}(v_{i,j}^{(k+1)} + v_{i,j+1}^{(k+1)}), \\ (P_{k+1}^k v^{(k+1)})_{2i+1,2j+1} = \frac{1}{2}(v_{i,j}^{(k+1)} + v_{i+1,j+1}^{(k+1)}). \end{cases}$$

На останньому кроці поточної ітерації проводимо корекцію значення функції на сітці $G^{(0)}$:

$$u_{i,j}^{(0)}(n+1) = u_{i,j}^{(0)}(n) + v_{i,j}^{(0)}(n).$$

Для числової реалізації алгоритму задаємо такі значення параметрів: $N = 121$, $M = 2$, кількість ітерацій згладжування на кожному шарі нейронів $\nu = 1$, точність $\varepsilon = 0.00000001$. На рис. 4 зображено поверхню наближеного розв'язку досліджуваної задачі для $Pe = 150$ за результатами обчислень побудованої нейронної мережі.

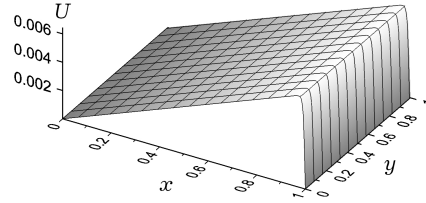


Рис. 4

Зазначимо, що точні значення розв'язку крайової задачі (18), (19) $u(x, y)$,

обчислені за формулою (20), та наближені його значення, отримані з застосуванням ітераційного нейронного методу, в однакових вузлах сітки (при $x = 0.7$, $0 \leq y \leq 1$) співпадають у межах заданої точності

На підставі аналізу виконаних чисельних експериментів для різних значень числа Пекле можемо зробити такий висновок: якщо відношення числа Пекле до кількості точок розбиття за координатами x і y більше від одиниці, то тоді розв'язок зберігає свою стійкість, у протилежному випадку стійкість втрачається. Наближений розв'язок будували за максимального значення числа Пекле $Pe = 250$.

Розглянемо ще стаціонарну двовимірну задачу адвекції-дифузії, математична модель якої має такий вигляд [2]:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + Pe \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad (21)$$

$$u \Big|_{x=0} = \frac{1 - e^{(y-1)Pe}}{1 - e^{-Pe}}, \quad u \Big|_{x=1} = 0, \quad u \Big|_{y=0} = \frac{1 - e^{(x-1)Pe}}{1 - e^{-Pe}}, \quad u \Big|_{y=1} = 0. \quad (22)$$

Для крайової задачі (21), (22) можна знайти аналітичний розв'язок:

$$u(x, y) = (1 - e^{(x-1)Pe})(1 - e^{(y-1)Pe}) / (1 - e^{-Pe})^2. \quad (23)$$

У роботах [2, 6] з'ясовано, що для досліджуваної крайової задачі за великих значень числа Пекле ($Pe \approx 100$) спостерігається нестійкість наближеного розв'язку, отриманого з використанням традиційних обчислювальних схем. У роботі [2] осциляції наближеного розв'язку задачі (21), (22) за МСЕ вдалося загасити завдяки використанню ієрархічної системи базових функцій-бульбашок. Для побудови стійкого числового розв'язку (значення числа $Pe < 10^2$) цієї ж задачі в [6] застосовано p - та hp -апроксимації на основі ієрархічних базисів на трикутних скінченних елементах. Відомі точний розв'язок (23) і числові розв'язки, отримані в [2, 6], використовувались для дослідження достовірності наближеного розв'язку крайової задачі (21), (22) за нейронним ітераційним методом. Відповідно до описаного в п. 2 алгоритму виконуємо покрокове обчислення.

Спочатку вихідну неперервну задачу редукуємо до дискретної. Апроксимуємо оператор задачі скінченними різницями:

$$\begin{aligned} (L^{(k)} u^{(k)})_{i,j} = & (4u_{i,j}^{(k)} - u_{i+1,j}^{(k)} - u_{i-1,j}^{(k)} - u_{i,j+1}^{(k)} - u_{i,j-1}^{(k)}) / (h^{(k)})^2 + \\ & + Pe(u_{i+1,j}^{(k)} - u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} - u_{i,j-1}^{(k)}) / (2(h^{(k)})^2), \end{aligned}$$

де $i, j = 1, \dots, N - 2$.

Граничні умови в цьому разі набувають вигляду

$$(L^{(k)} u^{(k)})_{0,j} = \frac{1 - e^{(j-1)Pe}}{1 - e^{-Pe}} = 0, \quad (L^{(k)} u^{(k)})_{N-1,j} = u_{N-1,j}^{(k)} = 0,$$

$$(L^{(k)}u^{(k)})_{i,0} = \frac{1 - e^{(i-1)Pe}}{1 - e^{-Pe}},$$

$$(L^{(k)}u^{(k)})_{i,N-1} = u_{i,N-1}^{(k)} = 0,$$

$$i, j = 0, \dots, N - 1.$$

Вибираємо $M = 2$, кількість ітерацій згладжування на кожному шарі нейронів $\nu = 1$, точність $\varepsilon = 0.00000001$. Задаємо значення числа Пекле. На рис. 5 показано вигляд поверхні шуканої функції $u(x, y)$, побудованої за результатами обчислень нейронної мережі у випадку $N = 231$ для $Pe = 150$.

У табл. 3 наведено числові результати, отримані за формулою (23) і позначені через u_T (точний розв'язок) і нейронним ітераційним методом – u_H (наближений розв'язок), в однакових вузлах сітки (при $x = 0.5$). Унаслідок порівняльного аналізу цих результатів можемо зробити висновок, що розв'язок, побудований мультисітковим ітераційним методом на рекурентній штучній нейронній мережі, має високу досягнуту точність. Виявлено, що зі збільшенням кількості нейронів у мережі числовий розв'язок добре апроксимує точний.

Отже, виконані дослідження щодо застосовності мультисіткового ітераційного методу на рекурентних нейромережах для розв'язування стаціонарних задач адвекції-дифузії та аналіз чутливості розв'язків до зміни коефіцієнтів диференціального рівняння засвідчили його ефективність. Наведені результати числових експериментів свідчать, що побудовані обчислювальні нейроструктури дають змогу успішно розв'язувати складні в обчислювальному плані задачі адвекції-дифузії з великим числом Пекле, причому швидкість збіжності мультисіткового методу не залежить від величини кроку дискретизації. Розв'язок нейронної мережі покращується за рахунок збільшення кількості нейронів. З'ясовано, що для більшого числа Пекле слід задавати більшу кількість нейронів. Прискорити збіжність методу можна за рахунок збільшення кількості сіток M у мультисітковій мережі, а також регулюванням параметра згладжування розв'язку ν на кожній ітерації.

1. Гумецький Л. Р., Савула Я. Г. Застосування стабілізаційних рівнянь для чисельного розв'язування задач адвекції-дифузії // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 1999. – Вип. 1. – С. 88–93.
2. Коваль М., Савула Я. Використання апроксимацій функціями-бульбашками на чотирикутних скінченних елементах для числового аналізу задачі адвекції-дифузії // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2003. – Вип. 6. – С. 157–165.
3. Козаревська Ю. С., Шинкаренко Г. А. Аналіз критеріїв подібності та чутливості розв'язків задач мігрування субстанції до збурень її коефіцієнтів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 1999. – Вип. 1. – С. 88–93.

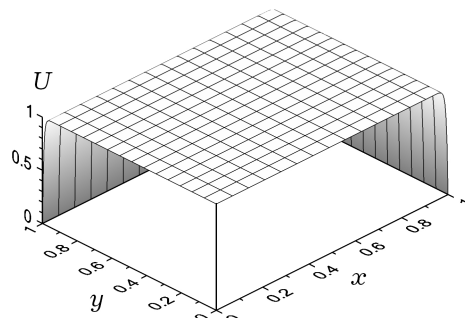


Рис. 5

Таблиця 3

$y \backslash u$	u_T	u_H
0.904	0.999999	1.000000
0.913	0.999998	0.999999
0.922	0.999992	0.999995
0.930	0.999971	0.999980
0.939	0.999892	0.999923
0.948	0.999601	0.999703
0.957	0.998529	0.998851
0.965	0.994579	0.995551
0.974	0.980020	0.982774
0.983	0.926369	0.933300

4. Козаревська Ю. С., Шинкаренко Г. А., Шинкаренко О. Г. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: локалізовані найменші квадрати // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. -мат. – 1999. – Вип. 52. – С. 59–70.
5. Кухарський В. М., Савула Я. Г., Головач Н. П. Стабілізація розв'язків задач адвекції-дифузії з великими числами Пекле, отриманих засобами методу скінченних елементів // Моделювання та інформаційні технології. – 2002. – Вип. 15. – С. 3–14.
6. Мандзак Т., Савула Н. Про використання ієрархічних базисів у методі скінченних елементів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика. та інформатика. – 2003. – Вип. 6. – С. 80–85.
7. Новотарський М. А., Нестеренко Б. Б. Штучні нейронні мережі: обчислення. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – 408 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України. – Т. 51.)
8. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами. – Львів: Видав. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.
9. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – Москва: Едиториал УРСС, 1999. – 248 с.
10. Щербина Н. М. Застосування числово-аналітичного методу до розв'язування крайових задач з примежовим шаром // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 1. – С. 63–67.
11. Haykin S. Neural networks: A comprehensive foundation. – New Jersey: Prentice-Hall, 1998. – 842 p.
12. Xu J. Iterative methods by space decomposition and subspace correction // SIAM Review. – 1992. – 34, No. 4. – P. 581–613.
13. Yserentant H. Old and new convergence proofs for multigrid methods // Acta Numerica. – 1993. – No. 3. – P. 285–326.

ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИСЕТОЧНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА НА ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОСЕТЯХ К СТАЦИОНАРНЫМ ЗАДАЧАМ АДВЕКЦИИ-ДИФУЗИИ

Проведено дослідження ефективності застосування мультисеточного ітераційного нейронного методу застосовано до стаціонарних лінійних задач адвекції-дифузії в разі великого числа Пекле. Побудовано рекурентну штучну нейронну мережу, що реалізує мультисеточний метод. Архітектура нейронної мережі складається з підмережі прямого розповсюдження, на кожному з шарів якої знаходяться два шари клітинної підмережі. Навчання мережі здійснюється шляхом мінімізації невязки вихідного рівняння. Особливістю чисельної реалізації побудованої мережі є те, що значуща частина обчислень виконується на більш крупних сітках, що суттєво економить час розрахунку і прискорює збіжність до точного рішення. Збільшення кількості нейронів підвищує точність рішення. Отримані результати демонструють обґрунтованість мультисеточного ітераційного методу на рекурентних штучних нейронних мережах.

APPLICATION OF MULTI-GRID ITERATIVE NEURAL NETWORKS FOR STATIONARY PROBLEMS OF ADVECTION-DIFFUSION

The study of efficiency of application of multi-grid iterative method, which utilises the recurrent artificial neural networks for solving the stationary problems of advection-diffusion has been made. A recurrent neural network has been constructed for implementation of the multi-grid method, which was used for solving the linear boundary-value problem. The architecture of the presented neural network consists of a feed-forward sub-network where each layer contains two sub-layers that form a cell sub-network. The purpose of the neural network training is to minimize the discrepancy of the original equation, which describes the problem. The main feature of the proposed neural network is that the large part of computations is performed on the rough grids, which leads to shorter execution time and helps to increase the rate of convergence. It has been observed that the quality of the result increases with introduction of additional neurons. The numerical results obtained demonstrate the validity of the multi-grid iterative method, which utilises the recurrent artificial neural networks.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, м. Львів