УДК 624.046: 519.21

Я. І. Єлейко, Ю. В. Жерновий

ІМОВІРНІСТЬ НЕБЕЗПЕЧНОГО СТАНУ СКЛАДЕНИХ БАЛОК І СТЕРЖНІВ З ВИПАДКОВИМИ НАВАНТАЖЕННЯМИ ТА ПОЧАТКОВИМИ ПРОГИНАМИ

Побудовано ймовірнісну модель для прогнозування небезпечного (критичного) стану складених балок і стержнів, пов'язаного зі втратою ними плоскої форми стійкості або з руйнуванням. Основну увагу зосереджено на визначенні ймовірності виникнення небезпечного стану конструкцій з рівномірно розподіленими випадковими зовнішніми силами та параметрами початкових прогинів.

1. Вступ. Важливе значення у дослідженні роботи складених конструкцій мають питання вивчення початкових технологічних і конструкційних неправильностей (початкових прогинів). Конструкційні неправильності форми виникають під час виготовлення конструкції з елементів зі спеціально заданими конструкційними підйомами методом пружного збирання. Напружено-деформований стан конструкції, який виникає під впливом початкових неправильностей і зовнішньої силової дії, викликає небезпечний стан конструкції (втрата стійкості, руйнування з'єднань тощо).

Зусилля, що діють на конструкції, як і значення та форми початкових неправильностей, не є цілковито детермінованими, а мають тією чи іншою мірою випадковий характер. Тому роботу таких конструкцій необхідно досліджувати за допомогою методів теорії ймовірностей.

Перелік праць, присвячених вивченню роботи складених конструкцій під впливом випадкових факторів, можна знайти в монографії [2]. У цій статті, як і в [2], ймовірність небезпечного стану конструкції розглядаємо з точки зору втрати нею стійкості плоскої форми згину або руйнування з'єднання між окремими її елементами. На відміну від монографії [2], не робимо припущення про апріорний нормальний розподіл випадкової величини, яка характеризує виникнення небезпечного стану конструкції, а визначаємо цей розподіл, вважаючи відомими закони розподілу зовнішніх сил і параметрів початкових прогинів.

2. Загальна модель. Розглянемо роботу складеної двотаврової балки з приклепаними (привареними точковим зварюванням) полицями, яка має вертикальну та горизонтальну площини симетрії. Нехай стінка й полиці балки навантажені випадковими вертикально розподіленими зусиллями, а верхні й нижні полиці до пружного збирання балки мали випадкові початкові прогини $w_s^0 = k_s f_s(x)$, $s = 1, 2$.

Припустимо [2], що стан двотаврової балки в умовах експлуатації характеризується поздовжніми T_{sj} і вертикальними N_{sj}, $s = 1, 2$, $j = 1, \ldots, m$, зусиллями зрізу в заклепках. Мета інженерного розрахунку складеної двотаврової балки − одержання гарантії того, що за час її експлуатації не настане критичний стан за міцністю на зріз для кожної з $2m$ заклепок, тобто згідно з [2]

$$\sqrt{T_{sj}^2 + N_{sj}^2} \le R, \qquad s = 1, 2, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

де R − гранично допустиме зусилля зрізу кожної із заклепок. Отже, якщо відома функція розподілу ймовірностей $F_{sj}(x)$ випадкової величини

$$\chi_{sj} = R - \sqrt{T_{sj}^2 + N_{sj}^2}, \tag{1}$$

то ймовірність виникнення критичного стану для кожної з заклепок можна знайти за формулою

$$P_{sj}(-) = P\{\chi_{sj} < 0\} = F_{sj}(0), \qquad s = 1,2, \quad j = 1,\dots,m.$$

Імовірність досягнення критичного стану для усієї двотаврової балки $P(-)$ визначається з умови руйнування хоча б однієї з $2m$ заклепок:

$$P(-) = 1 - \prod_{s,j} \left(1 - P_{sj}(-)\right). \tag{2}$$

Стан складеної двотаврової балки з приклеєними полицями за наявності випадкових початкових прогинів $w_s^0(x)$, $s = 1,2$, в умовах експлуатації характеризується [2] розподіленими зусиллями $q_w^{(s)}(x)$, $q_x^{(s)}(x)$ у клеєних швах. Умову недопустимості граничного стану клеєних швів біля s-ї полиці за міцністю можна записати у вигляді [2]

$$\chi_s(x) = q - \sqrt{q_w^{(s)} + q_x^{(s)}} \ge 0, \qquad s = 1,2, \tag{3}$$

де q – гранично допустиме зусилля зсуву в кожній точці клеєного шва. Тоді ймовірність появи граничного стану клеєного шва біля s-ї полиці в точці з абсцисою x знайдемо за формулою

$$P_s^-(x) = P\{\chi_s(x) < 0\} = F_{sx}(0), \qquad s = 1,2,$$

де $F_{sx}(y)$ – функція розподілу ймовірностей випадкової величини $\chi_s(x)$ у точці x. Ймовірність досягнення граничного стану двотаврової балки з приклеєними полицями в точці з абсцисою x виражається через ймовірності $P_s^-(x)$, $s = 1,2$:

$$P^-(x) = 1 - \left(1 - P_1^-(x)\right)\left(1 - P_2^-(x)\right) = P_1^-(x) + P_2^-(x) - P_1^-(x)P_2^-(x). \tag{4}$$

Як показано в монографії [2], ступінь вичерпання несучої здатності двотаврової балки при втраті плоскої форми стійкості під дією випадкових розподілених зусиль $q_s = q_s^0\psi_s(x)$ і початкових прогинів $w_s^0 = k_s f_s(x)$ можна звести до вигляду

– для балки з приклепаними полицями:

$$C_{is} = A_{is}^{(1)}q_1^0 + A_{is}^{(2)}q_2^0 + A_{is}^{(3)}k_1 + A_{is}^{(4)}k_2, \qquad i,s = 1,2, \tag{5}$$

– для балки з приклеєними полицями:

$$C_{is} = B_{is}^{(1)}q_1^0 + B_{is}^{(2)}q_2^0 + B_{is}^{(3)}k_1 + B_{is}^{(4)}k_2, \qquad i,s = 1,2. \tag{6}$$

Тут коефіцієнти $A_{is}^{(r)}$, $B_{is}^{(r)}$, $r = 1,\dots,4$, виражаються через відомі функції $\psi_s(x)$, $f_s(x)$, параметри стінки і полиць балки, клею; q_s^0, k_s – випадкові величини. Втрата плоскої форми стійкості настає при $C_{is} \ge 1$ [2]. Знаючи функцію розподілу ймовірностей $F_{is}(x)$ випадкової величини C_{is}, $i,s = 1,2$, для обидвох різновидів з'єднань полиць можна визначити ймовірності небезпечного стану балки при втраті плоскої форми згину від відповідної групи зусиль за формулами

$$P_{is}(-) = P\{C_{is} \ge 1\} = 1 - F_{is}(1), \qquad i,s = 1,2.$$

Оскільки балка може втратити стійкість в результаті дії хоча б однієї з груп горизонтальних або вертикальних складових зусиль, то ймовірність виникнення небезпечного стану для балки, пов'язаного з втратою стійкості, запишеться у вигляді

$$P(-) = 1 - \prod_{i,s=1}^{2} \left(1 - P_{is}(-)\right). \tag{7}$$

Розглянемо роботу стержня, який складений з трьох елементів, з неперервними (клеєні шви) в'язями при втраті плоскої форми стійкості у площині, паралельній до швів. Стержень має вісь симетрії, яка паралельна до стиків, і паралельну до швів поздовжню площину симетрії. Для кожного елемента приймається розрахункова схема стержня, а в'язі працюють на зсув. На середній елемент діє випадкове розподілене зусилля $q_c = q_c^0\chi_c(x)$, а на крайні елементи − зусилля $q_k = q_k^0\chi_k(x)$. Початкові прогини цих елементів відповідно дорівнюють $w_c^0 = k_c f_c(x)$, $w_k^0 = k_k f_k(x)$. Тут q_c^0, q_k^0, k_c, k_k − випадкові параметри. Для ступеня вичерпання несучої здатності стержня запишемо таку формулу [2]:

$$C = c_1 q_c^0 + c_2 q_k^0 + c_3 k_c + c_4 k_k, \tag{8}$$

де коефіцієнти c_r, $r = 1,\dots,4$, визначаються через відомі функції $\chi_c(x)$, $\chi_k(x)$, $f_c(x)$, $f_k(x)$ і параметри стержня та клею. Якщо відома функція розподілу ймовірностей $F_C(x)$ випадкової величини C, то ймовірність небезпечного стану стержня виразиться формулою

$$P(-) = P\{C \ge 1\} = 1 - F_C(1). \tag{9}$$

Випадкові параметри T_{sj}, N_{sj}; $q_w^{(s)}$, $q_x^{(s)}$; q_1^0, q_2^0; k_1, k_2; q_c^0, q_k^0, k_c, k_k, за допомогою яких визначено випадкові величини χ_{sj}, $\chi_s(x)$, C_{is} і C згідно зі співвідношеннями (1), (3), (5), (6), (8), можуть мати різні розподіли ймовірностей внаслідок впливу різних випадкових чинників. Тому не завжди доцільно й не завжди можливо задавати для кожного з параметрів якийсь фіксований розподіл, який би охоплював весь спектр їхніх можливих значень. Природніше кожному з випадкових чинників поставити у відповідність певний розподіл імовірностей кожного з параметрів.

Отож пропонуємо таку ймовірнісну модель для прогнозування небезпечного стану складених балок і стержнів. Нехай на стан конструкції впливають зовнішні випадкові чинники, що задаються за допомогою попарно несумісних подій $A_1,\dots,A_n$, імовірності яких $P(A_i)$ відомі. Якщо в кожному з випадків A_i, $i = 1,\dots,n$, можна визначити функцію (функції) розподілу ймовірностей випадкової величини (випадкових величин) χ_{sj}, $\chi_s(x)$, C_{is} або C відповідно, то за формулами (2), (4), (7) або (9) знайдемо умовну ймовірність $P_{A_i}(-)$, $i = 1,\dots,n$, небезпечного стану, який є наслідком випадкової події A_i. Тоді ймовірність небезпечного стану конструкції обчислимо за формулою повної ймовірності

$$P(-) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(-)P(A_i). \tag{10}$$

Імовірності $P_{A_i}(-)$, $i = 1,\dots,n$, можна розглядати як значення дискретної випадкової величини ρ, яку називатимемо *ризиком* виникнення небезпечного стану, з математичним сподіванням $m_\rho = P(-)$ та дисперсією

$$D(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{A_i}(-) - P(-)\right)^2 P(A_i).$$

Тоді безрозмірна величина

$$r = \frac{\sqrt{D(\rho)}}{P(-)} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(P_{A_i}(-) - \sum_{j=1}^{n} P_{A_j}(-)P(A_j)\right)^2 P(A_i)}}{\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(-)P(A_i)} \qquad (11)$$

є *мірою ризику* виникнення небезпечного стану конструкції.

3. Визначення ймовірнісних характеристик випадкових величин χ_{sj}, $\chi_s(x)$, C_{is} **та** C**.** Співвідношення (1) і (3), які служать для визначення випадкових величин χ_{sj} і $\chi_s(x)$ відповідно, зафіксувавши x, об'єднаємо формулою

$$\chi = Q - \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = Q - \varphi(X_1, X_2), \qquad (12)$$

де Q – відома стала, а X_1, X_2 – випадкові величини, для яких відома сумісна щільність розподілу ймовірностей $p(x_1, x_2)$.

Оскільки

$$P\{\chi < x\} = P\{Q - \varphi(X_1, X_2) < x\} =$$

$$= P\{\varphi(X_1, X_2) > Q - x\} = 1 - F_\varphi(Q - x),$$

то $F_\chi(x) = 1 - F_\varphi(Q - x)$, де $F_\chi(x)$, $F_\varphi(x)$ – функції розподілу ймовірностей випадкової величини χ і $\varphi = \varphi(X_1, X_2)$ відповідно.

Функцію $F_\varphi(x)$ визначимо за формулою для закону розподілу функції двох випадкових аргументів [1], яка для випадку, коли випадкові величини X_1, X_2 незалежні, записується у вигляді

$$F_\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\varphi(x_1,x_2)<x} p_1(x_1)\,dx_1\right)p_2(x_2)\,dx_2, \qquad (13)$$

де $p_i(x_i)$ – щільність розподілу ймовірностей випадкової величини $X_i, i = 1, 2$.

Як випливає з (12), $m_\chi = Q - m_\varphi$, $\sigma_\chi^2 = \sigma_\varphi^2$, де m_χ, m_φ і σ_χ, σ_φ – математичні сподівання і середні квадратичні відхилення випадкових величин χ і φ відповідно.

Згідно з (5), (6), (8) кожна з випадкових величин C_{is}, C є сумою чотирьох випадкових величин, тому ці співвідношення також об'єднаємо єдиною формулою

$$C = \sum_{s=1}^{4} X_s, \qquad (14)$$

вважаючи відомою щільність розподілу ймовірностей $p(x_1,\ x_2, \ldots, x_4)$ системи випадкових величин $X_1, \ldots, X_4$. Тоді функцію розподілу ймовірностей випадкової величини C вигляду (14) зможемо визначити за формулою для закону розподілу суми випадкових величин [1], яка для випадку, коли випадкові величини X_1, $X_2, \ldots, X_4$ незалежні, записується у вигляді

$$F_C(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{x-\sum_{i=2}^{4} x_i} p_1(x_1)\,dx_1\right)p_2(x_2)p_3(x_3)p_4(x_4)\,dx_2\,dx_3\,dx_4, \qquad (15)$$

де $p_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, 4$, – щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X_i.

4. Рівномірний розподіл параметрів початкових прогинів і зовнішніх сил.

4.1. Визначення ймовірностей $P_{A_i}\{\chi < 0\}$**.** Припустимо, що наслідком дії випадкового чинника A_i є рівномірний розподіл незалежних випадкових величин X_1, X_2, від яких згідно з формулою (12) залежить випадкова величина χ. Умовну ймовірність $P_{A_i}\{\chi < 0\}$ знайдемо за формулою

$$P_{A_i}\{\chi < 0\} = F_\chi(0) = 1 - F_\varphi(Q). \tag{16}$$

Якщо випадкові величини X_1, X_2 незалежні і розподілені рівномірно відповідно на проміжках $(0, a)$ і $(0, b)$, де $a \le b$, то, обчислюючи функцію розподілу $F_\varphi(x)$ за формулою (13), одержимо

$$F_\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ F_{\varphi 1}(x), & 0 \le x \le a, \\ F_{\varphi 2}(x), & a \le x \le b, \\ F_{\varphi 3}(x), & b \le x \le \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 1, & x \ge \sqrt{a^2 + b^2}, \end{cases}$$

де

$$F_{\varphi 1}(x) = \frac{\pi x^2}{4ab}, \qquad F_{\varphi 2}(x) = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{2b} + \frac{x^2}{2ab} \arcsin\frac{a}{x},$$

$$F_{\varphi 3}(x) = \frac{1}{2ab}\Bigg[a\sqrt{x^2 - a^2} + b\sqrt{x^2 - b^2} + {}$$

$$+ x^2\left(\arcsin\frac{a}{x} - \arcsin\frac{\sqrt{x^2 - b^2}}{x}\right)\Bigg].$$

Отже, згідно з (16)

$$P_{A_i}\{\chi < 0\} = \begin{cases} 0, & Q \ge \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 1 - F_{\varphi 3}(Q), & b \le Q \le \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 1 - F_{\varphi 2}(x), & a \le Q \le b, \\ 1 - F_{\varphi 1}(x), & 0 \le Q \le a. \end{cases} \tag{17}$$

З рівності (17) випливає, що при $a \to \infty$ ймовірність $P_{A_i}\{\chi < 0\}$ збільшується до одиниці, тобто виникнення небезпечного стану конструкції, зумовленого дією випадкового чинника A_i, стає практично вірогідним.

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини χ відповідно будуть

$$m_\chi = Q - m_\varphi,$$

$$m_\varphi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{3} + \frac{a^2}{6b}\ln\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{a} + \frac{b^2}{6a}\ln\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{b},$$

$$\sigma_\chi^2 = \sigma_\varphi^2 = \frac{a^2 + b^2}{3} - m_\varphi^2.$$

4.2. Визначення ймовірностей $P_{A_i}\{C \ge 1\}$**.** Нехай наслідком дії випадкового чинника A_i є рівномірний розподіл незалежних випадкових величин $X_1, \ldots, X_4$, сумою яких є випадкова величина C. Умовну ймовірність $P_{A_i}\{C \ge 1\}$ шукаємо у вигляді

$$P_{A_i}\{C \ge 1\} = 1 - F_C(1). \tag{18}$$

Якщо випадкові величини $X_1, \ldots, X_4$ незалежні і однаково рівномірно розподілені на проміжку $(0, a)$, то, здійснивши обчислення за формулою (15), знайдемо функцію розподілу $F_C(x)$:

$$F_C(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^4}{24a^4}, & 0 \le x \le a, \\ \dfrac{-3x^4 + 16ax^3 - 24a^2x^2 + 16a^3x - 4a^4}{24a^4}, & a \le x \le 2a, \\ \dfrac{3x^4 - 32ax^3 + 120a^2x^2 - 176a^3x + 92a^4}{24a^4}, & 2a \le x \le 3a, \\ \dfrac{-x^4 + 16ax^3 - 96a^2x^2 + 256a^3x - 234a^4}{24a^4}, & 3a \le x \le 4a, \\ 1, & x \ge 4a. \end{cases} \tag{19}$$

Отже, згідно з (18)

$$P_{A_i}\{C \ge 1\} = \begin{cases} 0, & 0 < a \le \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{(4a-1)^4}{24a^4} \in \left[0, \dfrac{1}{24}\right], & \dfrac{1}{4} \le a \le \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{-68a^4 + 176a^3 - 120a^2 + 32a - 3}{24a^4} \in \left[\dfrac{1}{24}, \dfrac{1}{2}\right], & \dfrac{1}{3} \le a \le \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{28a^4 - 16a^3 + 24a^2 - 16a + 3}{24a^4} \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{23}{24}\right], & \dfrac{1}{2} \le a \le 1, \\ 1 - \dfrac{1}{24a^4} \in \left[\dfrac{23}{24}, 1\right), & a \ge 1. \end{cases} \tag{20}$$

З (20) випливає, що при $a \ge 1$ подія $\{C \ge 1\}$ практично вірогідна, а для $4a \le 1$ – неможлива. Розподіл (19) симетричний, для нього $m_c = a/2$, $\sigma_c^2 = a^2/12$ і $P_{A_i}\{C \ge 1\} = 0.5$, якщо $m_c = 1$, тобто при $a = 0.5$.

Як ***приклад*** застосування моделі, розробленої у **п. 2**, знайдемо ймовірність і міру ризику виникнення небезпечного стану складеного стержня у випадку, коли події A_i, $i = 1, \ldots, n$, рівноймовірні, а випадкова величина C має вигляд (8).

Нехай наслідком події A_1 є однаковий рівномірний розподіл випадкових величин X_s, $s = 1, \ldots, 4$, на проміжку $(0, a_1)$, де $\dfrac{1}{4} \le a_1 \le \dfrac{1}{3}$, а наслідками кожної з подій A_i, $i = 2, \ldots, n$, – однаковий рівномірний розподіл випадкових величин X_s, $s = 1, \ldots, 4$, на проміжку $(0, a_i)$ відповідно, де $a_i \ge 1$, $i = 2, \ldots, n$. Тоді згідно з формулами (20), (10) і (11) одержимо

$$P(-) = \frac{1}{24n}\left(\frac{(4a_1 - 1)^4}{a_1^4} + \sum_{i=2}^{n} \frac{24a_i^4 - 1}{a_i^4}\right),$$

$$r = \frac{1}{P(-)}\sqrt{\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{(4a_1 - 1)^4}{24a_1^4} - P(-)\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{24a_i^4 - 1}{a_i^4} - P(-)\right)^2\right\}}.$$

5. Висновки. Запропонована ймовірнісна модель дозволяє визначати ймовірнісні характеристики ступеня вичерпання несучої здатності складених балок і стержнів з точки зору втрати ними плоскої форми стійкості та ступеня вичерпання міцності складених балок з точки зору руйнування їхніх клеєних або зварних з’єднань, якщо відомі розподіли зовнішніх випадкових сил і параметрів початкових прогинів, а також обчислювати ймовірність та міру ризику виникнення небезпечного стану таких конструкцій.

Цілком природне припущення про рівномірний розподіл зовнішніх сил і параметрів початкових прогинів дало змогу отримати прості, але важливі для практичних застосувань формули для ймовірностей виникнення небезпечного стану складених конструкцій.

1. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – Москва: Наука, 1988. – 480 с.
2. *Зарівняк І. С.* Стійкість і імовірність небезпечного стану складених балок і стержнів з випадковими навантаженнями і початковими неправильностями. – Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. – 144 с.

ВЕРОЯТНОСТЬ ОПАСНОГО СОСТОЯНИЯ СОСТАВНЫХ БАЛОК И СТЕРЖНЕЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ НАГРУЗКАМИ И НАЧАЛЬНЫМИ ПРОГИБАМИ

Построена вероятностная модель для прогнозирования опасного (критического) состояния составных балок и стержней, связанного с потерей ими плоской формы устойчивости или с разрушением. Основное внимание уделено определению вероятности возникновения опасного состояния конструкций с равномерно распределенными случайными внешними силами и параметрами начальных прогибов.

PROBABILITY OF DANGEROUS STATE OF COMPOSITE BEAMS AND RODS WITH RANDOM LOADS AND INITIAL DEFLECTIONS

The probabilistic model for prediction of a dangerous (critical) state of composite beams and rods with loss of stability of plane form or fracture is constructed. The probability of dangerous state of constructions with uniformly distributed random external forces and initial deflections parameters is found.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано 25.04.05