УДК 539.3

Б. М. Калиняк

АНАЛІТИЧНІ ВИРАЗИ ДЛЯ НАПРУЖЕНЬ І ТЕРМОНАПРУЖЕНЬ У ДОВГОМУ ПОРОЖНИСТОМУ НЕОДНОРІДНОМУ ТЕРМОЧУТЛИВОМУ ЦИЛІНДРІ

Пропонується спосіб отримання простих формул для визначення напружень у довгому неоднорідному термочутливому порожнистому циліндрі з залежними від радіальної координати характеристиками матеріалу. Відповідну одновимірну квазістатичну задачу термопружності в напруженнях зведено до сукупності інтегральних рівнянь шляхом безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги та суцільності. Проведено порівняння числових результатів, отриманих за цією методикою, методом послідовних наближень, та точним розв'язком у випадку степеневої залежності модуля пружності.

Вступ. Проблема визначення напружень у циліндричних тілах під дією силових і температурних навантажень залишається актуальною до сьогоднішнього дня, особливо стосовно функціонально градієнтних матеріалів (ФГМ) [5–7]. ФГМ – це матеріали з технологічно наперед заданими розподілами фізичних характеристик у них. Ці матеріали застосовують у конструкціях при високих температурах.

У цій роботі пропонується методика отримання формул для обчислення напружень у неоднорідному та термочутливому довгому порожнистому циліндрі шляхом зведення відповідної квазістатичної задачі термопружності до системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду та інтегральних умов безпосереднім інтегруванням рівнянь рівноваги і суцільності в напруженнях [1–3]. Аналогічний підхід використано, зокрема, для визначення напружень у нескінченній смузі [8]. Властивості матеріалу вважаються неперервно залежними від радіальної координати та термочутливими. Із записаної системи інтегральних рівнянь з використанням квадратурних формул отримано аналітичні вирази для розподілу напружень і деформацій.

Постановка задачі. Розглянемо задачу про визначення напружень і деформацій у довгому порожнистому циліндрі з зовнішньою поверхнею $r = R_2$ та внутрішньою $r = R_1$, спричинених відомим температурним полем і рівномірно розподіленими навантаженнями на внутрішній і зовнішній поверхнях. Характеристики матеріалу (модуль пружності E, коефіцієнт Пуассона ν, температурний коефіцієнт лінійного температурного розширення α_t) залежать від радіальної координати r і температури $t(r,\tau)$ (тут τ – час). Поверхня циліндра $r = R_1$ перебуває під дією тиску p_1, а поверхня $r = R_2$ – під дією тиску p_2.

Ця задача у напруженнях [1–3] зводиться до розв'язування рівнянь рівноваги

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2\sigma_r) = \rho\big(\sigma - \rho f(\rho)\big), \tag{1}$$

і рівняння суцільності

$$\rho\frac{de_\varphi}{d\rho} = e_r - e_\varphi, \tag{2}$$

яке з використанням співвідношень між діагональними компонентами e_r, e_φ, e_z тензора деформацій і компонентами σ_r, σ_φ, σ_z тензора напружень

$$e_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_z)] + \Phi(T) = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_r - \nu\sigma) - \nu e_z + (1+\nu)\Phi(T),$$

$$e_\varphi = \frac{1}{E}[\sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \Phi(T) = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma - \sigma_r] - \nu e_z + (1+\nu)\Phi(T),$$

$$e_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)] + \Phi(T) = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma) + \Phi(T), \qquad (3)$$

у напруженнях має вигляд

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1-\nu^2}{E}\sigma - \nu e_z + (1+\nu)\Phi(T)\right] = \sigma_r \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu}{E}\right) - \frac{1+\nu}{E} f. \qquad (4)$$

У рівняннях і співвідношеннях (1)−(4) $\sigma = \sigma_r + \sigma_\varphi$ − сумарне напруження; $\Phi(T) = t_0 \int\limits_{T_p}^{T} \alpha_t(T)\, dT$ − деформація, викликана температурним полем; $T = \frac{t}{t_0}$; $T_p = \frac{t_p}{t_0}$; t_0 − відлікова температура, при якій характеристики матеріалу вважаються сталими; t_p − початковий сталий розподіл температури в циліндрі; $f(\rho) = R_2 \rho F(\rho, T(\rho, \mathrm{Fo}))$ − масові сили розмірності напружень за рахунок переходу до безрозмірної координати $\rho = r/R_2$.

Оскільки на поверхнях циліндра задано рівномірно розподілені навантаження, то

$$\sigma_r\big|_{\rho=\rho_1} = -\,p_1, \qquad \sigma_r\big|_{\rho=1} = -\,p_2. \qquad (5)$$

Осьове напруження σ_z повинно задовольняти інтегральну умову рівноваги [2, 3]

$$\int\limits_0^1 \rho\sigma_z(\rho)\, d\rho = p, \qquad (6)$$

де $p = P/(2\pi R_2^2)$, а P − задане на торцях циліндра зусилля.

Визначення термонапружень. Зінтегрувавши рівняння рівноваги (1) з використанням першої із граничних умов (5), отримаємо зв’язок між радіальними та сумарними напруженнями [3]:

$$\sigma_r(\rho) = -\frac{\rho_1^2 p_1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho} \eta\big(\sigma - \eta f(\eta)\big)\, d\eta. \qquad (7)$$

Застосувавши другу з граничних умов (5) у формулі (7), отримаємо інтегральну умови рівноваги

$$\int\limits_{\rho_1}^{1} \rho\big(\sigma - \rho f(\rho)\big)\, d\rho = \rho_1^2 p_1 - p_2. \qquad (8)$$

Після інтегрування рівняння суцільності (4) отримаємо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду для визначення сумарних напружень σ [3]:

$$\sigma(\rho) = \frac{E\big(\rho, T(\rho, \mathrm{Fo})\big)}{1-\nu^2\big(\rho, T(\rho, \mathrm{Fo})\big)}\Bigg\{ A + \nu\big(\rho, T(\rho, \mathrm{Fo})\big)e_z - \big[1 + \nu\big(\rho, T(\rho, \mathrm{Fo})\big)\big]\Phi\big(T(\rho, \mathrm{Fo})\big) + \int\limits_0^{\rho} \big[\sigma_r(\eta)\varphi'(\eta) - \varphi(\eta) f(\eta)\big]\, d\eta \Bigg\}, \qquad (9)$$

де $\varphi(\rho) = \frac{1+\nu\big(\rho, T(\rho, \tau)\big)}{E\big(\rho, T(\rho, \tau)\big)}$; $\varphi'(\rho) = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu\big(\eta, T(\eta, \tau)\big)}{E\big(\eta, T(\eta, \tau)\big)}\right)\Bigg|_{\eta=\rho}$; A, e_z − сталі, які визначаються з граничних інтегральних умов (6), (8). Надалі у характеристиках матеріалу записуємо залежність тільки від радіальної змінної ρ, оскільки характеристики матеріалів і відоме температурне поле залежать від радіальної змінної ρ, а від часу τ − як параметра.

На відміну від методу послідовних наближень, застосованого для розв'язування системи інтегральних рівнянь (7), (9) [3], у цій роботі застосуємо іншу методику. Порожнистий циліндр ділимо на N тонких шарів. Вважаємо, що товщина k-го шару є такою, що для неперервної функції $Y(x)$ виконується формула трапецій

$$\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} Y(\eta)\,d\eta = \frac{\rho_{k+1}-\rho_k}{2}\left[Y(\rho_k)+Y(\rho_{k+1})\right]+o\left((\rho_{k+1}-\rho_k)^2\right). \tag{10}$$

Рівняння (9) для першого шару з використанням (10) має вигляд

$$\sigma(\rho)=\frac{E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)}\left\{A+\nu(\rho)e_z-[1+\nu(\rho)]\Phi(\rho)+\right.$$
$$\left.+\frac{\rho-\rho_1}{2}\left[\sigma_r(\rho_1)\varphi'(\rho_1)+\sigma_r(\rho)\varphi'(\rho)-\varphi(\rho_1)f(\rho_1)-\varphi(\rho)f(\rho)\right]\right\}. \tag{11}$$

Після підстановки виразу (7) для $\sigma_r(\rho)$ через сумарні напруження $\sigma(\rho)$ у (11) і групування членів з $\sigma(\rho)$ отримаємо

$$\sigma(\rho)=A\delta_{11}(\rho)+e_z\delta_{12}(\rho)+\delta_0(\rho), \tag{12}$$

де

$$\delta_{11}(\rho)=\frac{E(\rho)}{[1-\nu^2(\rho)]\psi(\rho)}\left\{1+\frac{\rho-\rho_1}{4\rho^2}\varphi'(\rho)\frac{\rho_1 E(\rho_1)}{1-\nu^2(\rho_1)}\right\},$$

$$\delta_{12}(\rho)=\frac{E(\rho)}{[1-\nu^2(\rho)]\psi(\rho)}\left\{\nu(\rho)+\frac{\rho-\rho_1}{4\rho^2}\varphi'(\rho)\frac{\rho_1 E(\rho_1)\nu(\rho_1)}{1-\nu^2(\rho_1)}\right\},$$

$$\delta_0(\rho)=\frac{E(\rho)}{[1-\nu^2(\rho)]\psi(\rho)}\left\{-[1+\nu(\rho)]\Phi(\rho)+\frac{\rho-\rho_1}{2}\sigma_r(\rho_1)\varphi'(\rho_1)+\right.$$
$$+\frac{(\rho-\rho_1)^2\rho_1^2}{2\rho^2}\sigma_r(\rho_1)\varphi'(\rho)-\frac{(\rho-\rho_1)^2\rho_1}{4\rho^2}\varphi'(\rho)\frac{E(\rho_1)}{1-\nu^2(\rho_1)}[1+$$
$$+\nu(\rho_1)]\Phi(\rho_1)-\frac{(\rho-\rho_1)^2}{4\rho^2}\varphi'(\rho)\left[\rho_1^2 f(\rho_1)+\rho^2 f(\rho)\right]-$$
$$\left.-\frac{\rho-\rho_1}{2}\varphi(\rho)[\varphi(\rho_1)f(\rho_1)+\varphi(\rho)f(\rho)]\right\}, \tag{13}$$

$$\psi(\rho)=1-\frac{E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)}\frac{(\rho-\rho_1)^2}{4\rho^2}\varphi'(\rho). \tag{14}$$

Оскільки $\sigma_r(\rho_1)=-p_1$, то функції $\delta_{11}(\rho)$, $\delta_{12}(\rho)$, $\delta_0(\rho)$ виражаються через граничну умову, характеристики матеріалу та похідні від характеристик матеріалу. Підстановка отриманого виразу (12) для $\sigma(\rho)$ у рівняння (7) дозволяє записати $\sigma_r(\rho)$ у вигляді

$$\sigma_r(\rho)=A\gamma_{11}(\rho)+e_z\gamma_{12}(\rho)+\gamma_0(\rho), \tag{15}$$

де

$$\gamma_{11}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta\delta_{11}(\eta)\,d\eta\approx\frac{\rho-\rho_1}{2\rho^2}\left[\rho_1\delta_{11}(\rho_1)+\rho\delta_{11}(\rho)\right],$$

$$\gamma_{12}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta\delta_{12}(\eta)\,d\eta\approx\frac{\rho-\rho_1}{2\rho^2}\left[\rho_1\delta_{12}(\rho_1)+\rho\delta_{12}(\rho)\right],$$

$$\gamma_0(\rho)=-\frac{\rho_1^2 p_1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta[\delta_0(\eta)-\eta f(\eta)]\,d\eta\approx$$
$$\approx-\frac{\rho_1^2 p_1}{\rho^2}+\frac{\rho-\rho_1}{2\rho^2}\left[\rho_1\delta_0(\rho_1)+\rho\delta_0(\rho)-\rho_1^2 f(\rho_1)-\rho^2 f(\rho)\right]. \tag{16}$$

Аналогічні викладки для інших шарів з урахуванням того факту, що для $\rho \in (\rho_k, \rho_{k+1})$

$$\sigma_r(\rho) = \frac{\sigma_r(\rho_k)\rho_k^2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_k}^{\rho} \eta\,(\sigma(\eta) - \eta f\,(\eta))\,d\eta\,,$$

приводять до таких виразів для $\sigma(\rho)$ і $\sigma_r(\rho)$:

$$\sigma(\rho) = A\delta_{11}(\rho) + e_z\delta_{12}(\rho) + \delta_0(\rho)\,,$$

$$\sigma_r(\rho) = A\gamma_{11}(\rho) + e_z\gamma_{12}(\rho) + \gamma_0(\rho)\,, \tag{17}$$

де

$$\delta_{11}(\rho) = \frac{E(\rho)}{\left[1-\nu^2(\rho)\right]\psi(\rho)}\left\{1 + \chi_{11}(\rho) + \frac{\Delta\rho}{2}\gamma_{11}(\rho^*)\varphi'(\rho^*) + \right.$$

$$\left. + \frac{(\rho^*)^2\Delta\rho}{2\rho^2}\gamma_{11}(\rho^*)\varphi'(\rho) + \frac{(\Delta\rho)^2}{4\rho^2}\varphi'(\rho)\frac{\rho^*E(\rho^*)}{\left[1-\nu^2(\rho^*)\right]}\right\},$$

$$\delta_{12}(\rho) = \frac{E(\rho)}{\left[1-\nu^2(\rho)\right]\psi(\rho)}\left\{\nu(\rho) + \chi_{12}(\rho) + \frac{\Delta\rho}{2}\gamma_{12}(\rho^*)\varphi'(\rho^*) + \right.$$

$$\left. + \frac{(\rho^*)^2\Delta\rho}{2\rho^2}\gamma_{12}(\rho^*)\varphi'(\rho) + \frac{(\Delta\rho)^2}{4\rho^2}\varphi'(\rho)\frac{\rho^*E(\rho^*)\nu(\rho^*)}{\left[1-\nu^2(\rho^*)\right]}\right\},$$

$$\delta_0(\rho) = \frac{E(\rho)}{\left[1-\nu^2(\rho)\right]\psi(\rho)}\left\{-\left[1+\nu(\rho)\right]\Phi(\rho) + \chi_0(\rho) + \frac{\Delta\rho}{2}\gamma_0(\rho^*)\varphi'(\rho^*) + \right.$$

$$+ \frac{(\rho^*)^2\Delta\rho}{2\rho^2}\gamma_0(\rho^*)\varphi'(\rho) - \frac{\rho^*\Delta\rho}{4\rho^2}\frac{E(\rho^*)\left[1+\nu(\rho^*)\right]\Phi(\rho^*)}{1-\nu^2(\rho^*)}\gamma_0(\rho^*)\varphi'(\rho) -$$

$$\left. - \frac{\Delta\rho}{2}\left[\varphi(\rho^*)f(\rho^*) + \varphi(\rho)f(\rho)\right] - \frac{(\Delta\rho)^2}{4\rho^2}\varphi'(\rho)\left[(\rho^*)^2 f(\rho^*) + \rho^2 f(\rho)\right]\right\},$$

$$\rho^* = \rho_1 + \sum_{k=1}^{N}(\rho_{k+1} - \rho_k)S_+(\rho - \rho_{k+1}), \quad \Delta\rho = \rho - \rho^*\,,$$

$$S_+(x) = \begin{cases}1, & x \ge 0,\\ 0, & x < 0,\end{cases} \qquad \psi(\rho) = 1 - \frac{E(\rho)}{1-\nu^2(\rho)}\frac{\Delta\rho^2}{4\rho^2}\varphi'(\rho)\,,$$

$$\chi_{11}(\rho) = \sum_{k=1}^{N}\frac{\Delta\rho_{k+1}}{2}\left[\gamma_{11}(\rho_k)\varphi'(\rho_k) + \gamma_{11}(\rho_{k+1})\varphi'(\rho_{k+1})\right]S_+(\rho - \rho_{k+1})\,,$$

$$\chi_{12}(\rho) = \sum_{k=1}^{N}\frac{\Delta\rho_{k+1}}{2}\left[\gamma_{12}(\rho_k)\varphi'(\rho_k) + \gamma_{12}(\rho_{k+1})\varphi'(\rho_{k+1})\right]S_+(\rho - \rho_{k+1})\,,$$

$$\chi_0(\rho) = \sum_{k=1}^{N}\frac{\Delta\rho_{k+1}}{2}\left[\gamma_0(\rho_k)\varphi'(\rho_k) + \gamma_0(\rho_{k+1})\varphi'(\rho_{k+1}) - \varphi(\rho_k)f(\rho_k) - \right.$$

$$\left. - \varphi(\rho_{k+1})f(\rho_{k+1})\right]S_+(\rho - \rho_{k+1})\,,$$

$$\gamma_{11}(\rho) = \frac{(\rho^*)^2\gamma_{11}(\rho^*)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho^*}^{\rho}\eta\delta_{11}(\eta)\,d\eta \approx \frac{(\rho^*)^2\gamma_{11}(\rho^*)}{\rho^2} +$$

$$+\frac{\Delta\rho}{2\rho^2}\left[\rho^*\delta_{11}(\rho^*)+\rho\delta_{11}(\rho)\right],$$

$$\gamma_{12}(\rho)=\frac{(\rho^*)^2\gamma_{12}(\rho^*)}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho^*}^{\rho}\eta\delta_{12}(\eta)\,d\eta\approx\frac{(\rho^*)^2\gamma_{12}(\rho^*)}{\rho^2}+$$

$$+\frac{\Delta\rho}{2\rho^2}\left[\rho^*\delta_{12}(\rho^*)+\rho\delta_{12}(\rho)\right],$$

$$\gamma_0(\rho)=\frac{(\rho^*)^2\gamma_0(\rho^*)}{\rho^2}+\frac{\Delta\rho}{2}\left[\rho^*\delta_0(\rho^*)+\rho\delta_0(\rho)-(\rho^*)^2f(\rho^*)+\rho^2f(\rho)\right]. \qquad (18)$$

Сталі A, e_z, визначені з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$Ad_{11}+e_zd_{12}=c_1,$$

$$Ad_{21}+e_zd_{22}=c_2,$$

отриманої внаслідок використання інтегральних умов (6), (8), мають вигляд

$$A=\frac{c_1d_{22}-c_2d_{12}}{d_{11}d_{22}-d_{21}d_{12}},\qquad e_z=\frac{c_2d_{11}-c_1d_{21}}{d_{11}d_{22}-d_{21}d_{12}}, \qquad (19)$$

де

$$d_{11}=\int\limits_{\rho_1}^{1}\eta\delta_{11}(\eta)\,d\eta,\qquad d_{12}=\int\limits_{\rho_1}^{1}\eta\delta_{12}(\eta)\,d\eta,$$

$$c_1=\rho_1^2p_1-p_2+\int\limits_{\rho_1}^{1}\eta^2f(\eta)\,d\eta-\int\limits_{\rho_1}^{1}\eta\delta_0(\eta)\,d\eta,$$

$$d_{21}=\int\limits_{\rho_1}^{1}\eta\nu(\eta)\delta_{11}(\eta)\,d\eta,\qquad d_{22}=\int\limits_{\rho_1}^{1}\eta\left[\nu(\eta)\delta_{12}(\eta)+E(\eta)\right]d\eta,$$

$$c_2=p-\int\limits_{\rho_1}^{1}\eta[\nu(\eta)\delta_0(\eta)-E(\eta)\Phi(\eta)]d\eta. \qquad (20)$$

Використовуючи вирази для сумарних і радіальних напружень (17), з означення сумарних напружень $\sigma=\sigma_r+\sigma_\varphi$ визначаємо колові напруження $\sigma_\varphi(\rho)$. Осьові напруження і деформації легко визначити зі співвідношень між тензорами деформацій і напружень (3) з використанням виразу (19) для осьової деформації e_z.

Приклади і висновки. Для оцінки ефективності такого підходу обчислимо напруження у випадку, коли $\nu=\text{const}$, $E=E_0\rho^n$, $f(\rho)=0$, $\Phi(\rho)=0$. У цьому випадку задача має точний аналітичний розв'язок [4], а рівняння суцільності (4) має вигляд

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\nu^2(\rho)}{E(\rho)}\sigma\right)=\sigma_r\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu(\rho)}{E(\rho)}\right), \qquad (21)$$

звідки випливає, що остаточний вираз для σ не залежить від E_0. Якщо $\sigma(\rho)=\frac{1}{\rho}\frac{d\left[\rho^2\sigma_r(\rho)\right]}{d\rho}$, визначене з рівняння рівноваги, підставити у рівняння суцільності (21), вибрати розв'язок для $\sigma_r(\rho)$ у вигляді ρ^λ, підставити його в отримане рівняння, то загальний розв'язок для $\sigma_r(\rho)$ буде

$$\sigma_r^{(\mathrm{ex})}(\rho) = D_1\rho^{\lambda_1-2} + D_2\rho^{\lambda_2-2}, \tag{22}$$

де корені λ_1, λ_2 характеристичного рівняння і сталі D_1, D_2, визначені з граничних умов (5), запишуться як

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(n+2+\sqrt{(n+2)^2 - 4n\frac{1}{1-\nu}}\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(n+2-\sqrt{(n+2)^2 - 4n\frac{1}{1-\nu}}\right),$$

$$D_1 = \frac{-p_1 + p_2\rho_1^{\lambda_2-2}}{\rho_1^{\lambda_1-2} - \rho_1^{\lambda_2-2}}, \qquad D_2 = \frac{p_1 - p_2\rho_1^{\lambda_1-2}}{\rho_1^{\lambda_1-2} - \rho_1^{\lambda_2-2}}.$$

На основі рівняння рівноваги (1) отримано точний аналітичний вираз для сумарних напружень $\sigma(\rho)$:

$$\sigma^{(\mathrm{ex})}(\rho) = D_1\lambda_1\rho^{\lambda_1-2} + D_2\lambda_2\rho^{\lambda_2-2}. \tag{23}$$

Зауважимо, що записаний розв'язок справджується для $n \ne 1$, оскільки

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu(\rho)}{E_0\rho^n}\right) = \begin{cases} -\dfrac{1}{E_0\rho^{n+1}}n, & n \ne 1, \\ \dfrac{1}{E_0}\ln(\rho), & n = 1. \end{cases}$$

Як видно з формул (17) і (19), напруження залежать від значень характеристик матеріалу та їх похідних у точці та характеру розподілу характеристик матеріалу і їх похідних у порожнистому циліндрі (у вигляді інтегралів (сум) від характеристик через сталі A, e_z).

Нижче у табл. 1–3 подано результати значень сумарних напружень $\sigma^{(\mathrm{ex})}(\rho)$ (як відомо [4], для однорідних тіл вони сталі), обчислених за точними формулами (23) і наближеними виразами (17) для $\sigma(\rho)$ при наявності внутрішнього тиску, степеневій залежності модуля пружності від ρ з $n = 2$ та $n = 5$. Відстань між точками розбиття вважали рівною 0.05. Кількість шарів N для внутрішніх радіусів циліндра $\rho_1 = 0.7$ і $\rho_1 = 0.5$ відповідно приймали рівними $N = 6$ і $N = 10$. Тільки у випадку $\rho_1 = 0.9$ циліндр вважали тонкостінним ($N = 1$).

Таблиця 1

ρ	$n = 2$			$n = 5$		
	$\sigma(\rho)$	$\sigma^{(\mathrm{ex})}(\rho)$	$\left\lvert\frac{\sigma(\rho)-\sigma^{(\mathrm{ex})}(\rho)}{\sigma(\rho)}\right\rvert$, %	$\sigma(\rho)$	$\sigma^{(\mathrm{ex})}(\rho)$	$\left\lvert\frac{\sigma(\rho)-\sigma^{(\mathrm{ex})}(\rho)}{\sigma(\rho)}\right\rvert$, %
0.9	9.29137	9.29793	0.07	7.59266	7.61717	0.32
0.91	9.53637	9.54304	0.07	8.11975	8.14552	0.32
0.92	9.78019	9.78679	0.07	8.66214	8.68844	0.30
0.93	10.023	10.0292	0.06	9.2209	9.24627	0.27
0.94	10.2651	10.2704	0.05	9.79708	9.8193	0.23
0.95	10.5067	10.5103	0.03	10.3917	10.4079	0.16
0.96	10.7479	10.749	0.01	11.0059	11.0123	0.06
0.97	10.9889	10.9866	0.02	11.6407	11.6329	0.07
0.98	11.2298	11.2231	0.06	12.2971	12.27	0.22
0.99	11.4709	11.4585	0.11	12.9761	12.9239	0.40
1.0	11.7122	11.6928	0.17	13.6788	13.5949	0.62

Таблиця 2

ρ	$n = 2$			$n = 5$		
	$\sigma(\rho)$	$\sigma^{(ex)}(\rho)$	$\left\lvert \dfrac{\sigma(\rho) - \sigma^{(ex)}(\rho)}{\sigma(\rho)} \right\rvert$, %	$\sigma(\rho)$	$\sigma^{(ex)}(\rho)$	$\left\lvert \dfrac{\sigma(\rho) - \sigma^{(ex)}(\rho)}{\sigma(\rho)} \right\rvert$, %
0.7	1.9054	1.9148	0.49	-0.271	-0.232	16.43
0.72	5.5926	5.5855	0.13	0.1197	0.1618	25.99
0.75	2.5819	2.5871	0.20	0.7721	0.7965	3.06
0.77	2.8418	2.8471	0.18	1.2245	1.2507	2.10
0.8	3.2268	3.2287	0.06	1.9715	1.9827	0.56
0.83	3.6	3.6014	0.04	2.77	2.7798	0.35
0.86	3.967	3.9661	0.02	3.6493	3.6475	0.05
0.9	4.4448	4.4415	0.07	4.9378	4.9232	0.30
0.93	4.7947	4.7908	0.08	5.9946	5.9762	0.31
0.96	5.1401	5.1346	0.11	7.1462	7.1176	0.40
1.0	5.5926	5.5855	0.13	8.8277	8.7869	0.46

Таблиця 3

ρ	$n = 2$			$n = 5$		
	$\sigma(\rho)$	$\sigma^{(ex)}(\rho)$	$\left\lvert \dfrac{\sigma(\rho) - \sigma^{(ex)}(\rho)}{\sigma(\rho)} \right\rvert$, %	$\sigma(\rho)$	$\sigma^{(ex)}(\rho)$	$\left\lvert \dfrac{\sigma(\rho) - \sigma^{(ex)}(\rho)}{\sigma(\rho)} \right\rvert$, %
0.5	-1.25	-1.21	3.37	-4.31	- 4.136	4.20
0.55	-0.383	-0.356	7.71	-3.458	-3.321	4.12
0.6	0.4028	0.4202	4.14	-2.535	-2.431	4.28
0.65	1.1276	1.1371	0.84	-1.506	-1.433	5.13
0.7	1.8051	1.8083	0.17	-0.339	-0.295	14.72
0.75	2.4453	2.4432	0.09	0.9988	1.0119	1.29
0.8	3.0557	3.049	0.22	2.5376	2.5188	0.74
0.85	3.642	3.6314	0.29	4.3085	4.2561	1.23
0.9	4.2085	4.1943	0.34	6.3434	6.2546	1.42
0.95	4.7586	4.7412	0.37	8.6743	8.5461	1.50
1.0	5.295	5.2746	0.39	11.334	11.163	1.53

З аналізу наведених у таблицях даних випливає, що великі відносні похибки у поодиноких значеннях напружень обумовлені близькістю значень напружень до 0. Отримані для напружень формули (17) вказують, що затрати часу для їх обчислення запропонованим підходом сумірні з часом обчислення однієї ітерації при використанні методу послідовних наближень.

При застосуванні методу послідовних наближень відповідна точність досягається у 2-й або 3-й ітерації [3]. Особливістю формул (17) є також те, що при обчисленні значень напружень у наступній точці використовуються їх значення у попередній. Тому затрати часу на обчислення є пропорційними до кількості шарів, яка є сумірною з кількістю вузлів при чисельному інтегруванні у методі послідовних наближень. Аналітичне подання кінцевих результатів і зниження часових затрат на обчислення вказує на ефективність застосування формул (17) для визначення напружень у довгих неоднорідних термочутливих порожнистих циліндрах.

1. *Вігак В. С.* Розв'язок задач пружності та термопружності у напруженнях // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – Т. 9. – С. 34–131.
2. *Вігак В. М.* Розв'язування одновимірних задач пружності й термопружності в напруженнях для циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40,** № 3. – С. 103–107.

3. *Калиняк Б. М.* Інтегрування рівнянь одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41,** № 2. – С. 124–131.
4. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
5. *Horgan C. O., Chan A. M.* The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials // J. Elasticity. – 1999. – **55**. – P. 43–59.
6. *Noda N.* Thermal stresses in functionally graded materials // Therm. Stresses'99: Proc. 3rd Int. Congr. on Thermal Stresses, Cracow (Poland), June 13–17, 1999. – Cracow: Cracow. Univ. of Techn., 1999. – P. 33–38.
7. *Ruhi M., Angoshtari A., Naghdabadi R.* Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials // J. Therm. Stresses. – 2005. – **28**. – P. 391–408.
8. *Tokovyy Yu. V., Rychahivskyy A. V.* Reduction of plane thermoelasticity problem in inhomogeneous strip to integral Volterra type equation // Math. Model. and Anal. – 2005. – **10**. – P. 91–100.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЙ В ДЛИННОМ ПОЛОМ НЕОДНОРОДНОМ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ

Предложен способ получения простых формул для определения напряжений в длинном неоднородном термочувствительном полом цилиндре с зависимыми от радиальной координаты характеристиками материала. Соответствующая одномерная квазистатическая задача термоупругости в напряжениях сведена к системе интегральных уравнений непосредственным интегрированием уравнений равновесия и сплошности. Проведено сравнение численных результатов, полученных предложенным способом, методом последовательных приближений и точного решения для случая степенной зависимости модуля упругости от радиальной координаты.

ANALYTICAL EXPRESSIONS FOR STRESSES AND THERMAL STRESSES IN LONG INHOMOGENEOUS THERMAL SENSITIVE HOLLOW CYLINDER

An approach for obtaining stresses in an inhomogeneous thermal sensitive hollow cylinder with characteristics of the material dependent on the radial coordinate has been proposed. The corresponding one-dimensional quasi-static problem in terms of stresses has been reduced to solving a series of integral equations. The last have been obtained by direct integration of both the equilibrium and compatibility equations. The numerical results obtained by using the proposed approach, the iteration procedure, and the exact analytical solution in the case when the elasticity modulus has power dependence on radial coordinate have been compared.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.03.06