УДК 534:539.3

О. Я. Мічуда

ПРО ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ ФІЗИЧНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ МЕХАНІКИ ІНЕРЦІЙНИХ ПРУЖНИХ СИСТЕМ

Сформульовано базове енергетичне рівняння для масоізольованої пружної системи, яка перебуває під дією динамічного силового навантаження. На цій основі за умов потенціального опису встановлено співвідношення локального динамічного стану і відповідні рівняння руху для поступальної, обертальної та деформаційної форм руху.

Проблема оптимального проектування та технології виготовлення елементів тонкостінних конструкцій і приладів, які працюють в умовах динамічного періодично змінного в часі зовнішнього навантаження, зумовлює необхідність подальшого вдосконалення математичних моделей нелінійної механіки деформівних систем, які би найбільш повно враховували інерційні параметри характерних форм локального руху й, зокрема, ефекти релаксації процесу деформування. У цьому напрямку необхідно відзначити, зокрема, класичні праці Я. С. Підстригача [4, 5], які присвячені розробці дифузійної теорії непружного деформування металічних тіл. Тут вперше введено тензорні параметри інерційності: тензор густини та тензор хімічного потенціалу.

У роботах [1, 3] сформульовано варіаційну постановку крайових задач нелінійної механіки інерційних пружних систем, які знаходяться під дією статичного і динамічного зовнішнього силового навантаження. При цьому враховано ефекти взаємовпливу процесу деформування та інерційного руху.

У цій статті пропонується енергетичний підхід до побудови фізичних співвідношень та рівнянь руху динамічної пружної системи з урахуванням інерційності всіх форм локального руху.

1. Постановка задачі. Базове енергетичне рівняння. Розглядаємо масоізольовану пружну систему K_* неперервно розташованих матеріальних елементів (точок), яка у відліковому (природному) стані ($t \le t_0$, t − час) ненавантажена, однорідна та бієктивно відображається на область $X_0^* \cup \partial X_0^*$ евклідового простору. Термодинамічний стан системи у відліковій конфігурації характеризується температурою $T_{(0)}$ і густиною ентропії $S_{(0)}$, хімічним потенціалом $\mu_{(0)}$ і густиною маси $\rho_{(0)}$.

Протягом часу $t_1 \le t \le t_2$ ($t_1 \ge t_0$) система K_* перебуває під дією динамічного силового навантаження, яке зумовлює інерційні термомеханічні процеси в межах довільної фізично малої підсистеми $\delta K \subset K_*$ і системи K_* в цілому.

Ідентифікацію довільної фізично малої підсистеми $\delta K \subset K_*$ і центра маси $k \in \delta K$ цієї підсистеми реалізуємо за допомогою радіуса-вектора $\mathbf{r}_0$ місця точки $k \in \delta K$ у відліковій (рівноважній) конфігурації, а місце розташування цієї точки в довільний інший момент часу t ($t_1 \le t \le t_2$) − за допомогою радіуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}$, де $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$ − вектор переміщення.

Адитивною мірою динамічного стану (ситуації) системи K_* в актуальний момент часу є енергія $\mathcal{E}(K_*, t)$. Лінійна складова приросту (зміни) цієї енергії протягом часу $(t, t+dt)$ за ізотермічних умов деформування ($T = T_0$) дорівнює

$$d\mathcal{E}(K_*,t) = \int\limits_{X_0^*} dE\,\delta V_0 = \int\limits_{\partial X_0^*} (\boldsymbol{\sigma}_{*n}^{+} \cdot d\mathbf{u})\,\delta\Sigma_0 + \int\limits_{X_0^*} (\mathbf{f}^{+} \cdot d\mathbf{u})\,\delta V_0\,. \tag{1}$$

Тут E – густина енергії фізично малої підсистеми δK; $\boldsymbol{\sigma}_{*n}^{+}(\mathbf{r}_0,t) \equiv \equiv \dfrac{d\boldsymbol{\mathcal{P}}_n^{+}}{dt}(\mathbf{r}_0,t)$ – вектор зовнішнього динамічного силового навантаження; $\mathbf{f}^{+}(\mathbf{r}_0,t)$ – вектор об'ємних зовнішніх сил; крапкою між величинами позначено операцію скалярного добутку.

Якщо врахувати те, що на поверхні ∂X_0^* зовнішні сили динамічного стану $\boldsymbol{\sigma}_{*n}^{+}(\mathbf{r}_0,t)$ урівноважуються в кожній точці внутрішніми силами

$$\boldsymbol{\sigma}_{*n}(\mathbf{r}_0,t) = \frac{d\boldsymbol{\mathcal{P}}_n}{dt}(\mathbf{r}_0,t) \equiv \mathbf{n}_0 \cdot \frac{d\widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}}{dt}(\mathbf{r}_0,t),$$

то енергетичне рівняння (1) можна подати так:

$$d\mathcal{E}(K_*,t) = \int\limits_{\partial X_0^*} \mathbf{n}_0 \cdot \left(\frac{d\widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}}{dt} \cdot d\mathbf{u}\right)\delta\Sigma_0 + \int\limits_{X_0^*} (\mathbf{f}^{+} \cdot d\mathbf{u})\,\delta V_0\,. \tag{2}$$

У співвідношенні (2) $\dfrac{d\widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}}{dt} \equiv \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_*(\mathbf{r}_0,t)$ – тензор динамічних напружень, $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}} = = \widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}(\mathbf{r}_0,t)$ – тензор імпульсу динамічних деформаційних процесів.

Скористаємося додатково формулою Остроградського – Ґаусса про перехід від поверхневого інтегралу до об'ємного по області X_0^*. Тоді базове енергетичне співвідношення можна подати так:

$$d\mathcal{E}(K_*,t) = \int\limits_{X_0^*} \left[\mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} + (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v}) \cdot\cdot (d\widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}})^{\top}\right] dV_0\,. \tag{3}$$

У цьому рівнянні $\mathcal{E}(K_*,t)$ – густина енергії фізично малої підсистеми δK, яка є нормованою за об'ємом δV_0 цієї підсистеми у відліковому однорідному стані ($t \le t_0$); $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$ – швидкість поступального руху фізично малої підсистеми; $\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v} = \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})$ – тензор швидкостей процесу деформування; $\mathbf{p} = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \frac{d\widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}}{dt} + \mathbf{f}^{+}\right) d\tilde{t}$ – вектор імпульсу поступального руху; $\otimes$ – оператор діадного добутку; дві крапки вказують на операцію подвійного скалярного добутку.

З огляду на те, що енергія $\mathcal{E}(K_*,t)$ є адитивною мірою стану системи K_*, співвідношення (3) можна подати так:

$$d\mathcal{E}(K_*,t) = \int\limits_{X_0^*} dE\,dV_0\,, \tag{4}$$

$$dE = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{p} + (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v}) \cdot\cdot (d\widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}})^{\top}. \tag{5}$$

Індекс $\top$ – оператор транспонування тензора $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}$.

За умов потенціального опису динамічних систем густина енергії $E = = E(\mathbf{p},\widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}})$ є характеристичною функцією локального динамічного стану і диференціальна 1-форма (5) є повним диференціалом. З огляду на це можна записати такі рівняння локального динамічного стану системи:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{p},\widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}),$$

$$\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v} = \frac{\partial E}{\partial \widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}} \equiv (\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v})(\mathbf{p},\widehat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}). \tag{6}$$

Тут перше рівняння є фізичним рівнянням для поступальної складової руху, а друге рівняння є відповідно фізичним співвідношенням для деформаційної і обертальної форм локального руху.

2. Фізичні співвідношення для ізотропних динамічних систем. Вихідним є рівняння локального стану (6). Для ізотропних матеріалів функція динамічного стану $E = E(\mathbf{p}, \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}})$ є функцією скалярних інваріантів параметрів $\mathbf{p}$ і $\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}$.

При встановленні лінійної системи фізичних співвідношень приймаємо, що функція $E = E(\mathbf{p}, \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}})$ є аналітичною функцією в околі вихідного динамічного стану. Обмежимося розглядом ізотропних матеріалів, для яких густина енергії $E = E(\mathbf{p}, \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}})$ є функцією скалярних інваріантів параметрів інерційного динамічного стану $(\mathbf{p}, \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}})$ до другого порядку включно. За незалежні інваріанти можна прийняти, зокрема, такі:

$I_1^{(2)} = I(\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}) \equiv \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}} \cdot\cdot\, I$ – скалярний інваріант першого порядку,

$$I_2^{(1)} = I(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}), \qquad I_2^{(2)} = I(\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^s \cdot \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^s),$$

$$I_3^{(2)} = I(\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^a \cdot \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^a).$$

Тут верхні індекси s, a вказують на те, що розглядаємо симетричну або антисиметричну складову тензора $\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}$.

До наведених скалярних інваріантів слід долучити скалярний інваріант, який характеризує енергію взаємовпливу імпульсів поступальної і деформаційної форм руху

$$I_2^{(12)} = I(\mathbf{p} \times \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}).$$

В результаті одержимо такі фізичні рівняння динамічного стану:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\left[\mathbf{p} - \beta_* \frac{\rho}{\rho_\ell} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot\cdot\, \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\right], \tag{7}$$

$$\nabla_0 \otimes \mathbf{v} = \frac{1}{\rho_\ell}\left[\frac{1}{3\eta_0}\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\hat{I} + \frac{1}{2\eta_1}(\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^s)^d + \frac{1}{2\eta_1^*}\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^a - \beta_* \frac{\rho_\ell}{\rho} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{p}\right]. \tag{8}$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \epsilon_{ijk}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ – антисиметричний тензор Леві – Чивіта; ρ – об’ємна густина маси, ρ_ℓ – лінійна густина; β_* – коефіцієнт взаємовпливу поступальної та обертальної форм руху.

Подамо фізичні співвідношення (7), (8) у розгорнутій формі для конкретних складових інерційного руху, а саме, для поступальної, обертальної форм руху і одночасно для характеристик локальної зміни в часі об’єму та форми фізично малих підсистем:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\left[\mathbf{p} - \beta_* \frac{\rho}{\rho_\ell} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot\cdot\, \hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\right], \tag{7$'$}$$

$$(\nabla_0 \otimes \mathbf{v})^a = \frac{1}{\rho_\ell}\left[\frac{1}{2\eta_1^*}\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^a - \beta_* \frac{\rho_\ell}{\rho} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \mathbf{p}\right], \tag{8$'$}$$

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{3\eta_0\rho_\ell}\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}, \tag{8$''$}$$

$$(\nabla_0 \otimes \mathbf{v})^d = \frac{1}{2\eta_1\rho_\ell}(\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^s)^d. \tag{8$'''$}$$

Зазначимо, що перші два рівняння для поступальної і обертальної форм руху враховують ефекти взаємовпливу цих двох форм руху. Зокрема поле швидкостей $\mathbf{v}$ природно визначається імпульсом поступального руху. Водночас воно залежить і від імпульсу обертальної складової руху. Аналогічно враховується і вплив імпульсу поступального руху на обертову складову локального руху. У той же час в межах лінійної системи фізичних співвідношень процеси зміни в часі об'єму та форми фізично малої підсистеми залежать лише від імпульсів власного поля.

3. Система динамічних рівнянь руху. Для одержання таких рівнянь продиференціюємо за часом фізичні рівняння (7′), (8′)–(8‴):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} - \beta_* \frac{\rho}{\rho_\ell}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\cdot\frac{d\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}}{dt}\right],$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v})^a = \frac{1}{\rho_\ell}\left[\frac{1}{2\eta_1^*}\frac{d\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^a}{dt} - \beta_* \frac{\rho_\ell}{\rho}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt}\right],$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{3\eta_0\rho_\ell}\frac{d\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{v})^d = \frac{1}{2\eta_1\rho_\ell}\frac{d}{dt}(\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}^s)^d.$$

Для динамічних пружних систем

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*, \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t}(\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \mathbf{f}^+)\,d\tilde{t}\right] = \boldsymbol{\nabla}_0\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \mathbf{f}^+.$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_*(\mathbf{r}_0, t)$ – тензор динамічних напружень, який для ізотропних пружних систем подається так:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = K_* e\hat{\mathbf{I}} + 2G_*\left(\hat{\mathbf{e}} - \frac{1}{3}e\hat{\mathbf{I}}\right) + 2G'_*\hat{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{9}$$

де K_*, G_*, G'_* – динамічні модулі пружності стосовно зміни об'єму, форми та поворотів відповідно,

$$e = \boldsymbol{\nabla}_0\cdot\mathbf{u}, \quad \hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u} + \mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}_0), \quad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u} - \mathbf{u}\otimes\boldsymbol{\nabla}_0). \tag{10}$$

Якщо використати фізичні рівняння (9) і геометричні співвідношення (10), то одержимо таку систему динамічних рівнянь для опису поступальної, обертальної та деформаційної форм руху:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} + \beta_*\frac{G'_*}{\rho_\ell}\boldsymbol{\nabla}_0\times\mathbf{u} = C_{*1}^2\boldsymbol{\nabla}_0(\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\mathbf{u}) + C_{*2}^2\Delta\mathbf{u} + \frac{\mathbf{f}^+}{\rho}, \tag{11}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^a - \frac{G'_*}{\rho_\ell\eta_1^*}(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^a = -\beta_*\frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \mathbf{f}^+), \tag{12}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\mathbf{u}) - \frac{K_*}{3\rho_\ell\eta_0}(\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\mathbf{u}) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^s\right]^d - \frac{G_*}{\rho_\ell\eta_1}\left[(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^s\right]^d = 0. \tag{14}$$

Тут

$$C_{*1}^2 = \frac{1}{\rho}\left(K_* + \frac{1}{3}G_* - G'_*\right), \qquad C_{*2}^2 = \frac{1}{\rho}(G_* + G'_*).$$

Рівняння (11) і (12) враховують взаємовплив поступальної та обертальної форм руху.

Знехтуємо надалі складовими, пропорційними до параметра β_* $(\beta_* = 0)$. Тоді система динамічних рівнянь (11)–(14) набуває вигляду

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = C_{*1}^2\boldsymbol{\nabla}_0(\boldsymbol{\nabla}_0\cdot\mathbf{u}) + C_{*2}^2\Delta\mathbf{u} + \frac{\mathbf{f}^+}{\rho}, \tag{15}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^a = \frac{G'_*}{\rho_\ell\eta_1^*}(\boldsymbol{\nabla}_0\otimes\mathbf{u})^a, \tag{16}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u}) = \frac{K_*}{3\rho_\ell \eta_0}(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u}), \tag{17}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^s\right]^d = \frac{G_*}{\rho_\ell \eta_1}\left[(\boldsymbol{\nabla}_0 \otimes \mathbf{u})^s\right]^d. \tag{18}$$

Якщо врахувати, що

$$\Delta\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}_0(\boldsymbol{\nabla}_0 \cdot \mathbf{u}) - \boldsymbol{\nabla}_0 \times (\boldsymbol{\nabla}_0 \times \mathbf{u}) \equiv \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{u}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{u}),$$

то рівняння руху (15) для поступальної складової руху можна подати так:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = (C_{*1}^2 + C_{*2}^2)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{u}) - C_{*2}^2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{u}) + \frac{\mathbf{f}^+}{\rho}.$$

У такій самій формі аналогічне рівняння руху для симетричної теорії пружності ($G'_* = 0$) наведено в [2].

4. Висновки. На основі запропонованого енергетичного підходу сформульовано постановку крайових задач для динамічних пружних систем з урахуванням інерційності поступальної і деформаційних форм локального руху. Одержані результати можуть бути використані, зокрема, і для опису хвильових процесів у пружних системах із заданими початковими напруженнями.

1. *Бурак Я. Й., Каленюк П. І., Мічуда О. Я.* Про визначальні співвідношення в механіці інерційних пружних систем // Доп. НАН України. – 2004. – № 3. – С. 41–45.
2. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 284 с.
3. *Каленюк П. І., Мічуда О. Я.* Варіаційна модель нелінійної механіки інерційних пружних систем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 4. – С. 184–190.
4. *Підстригач Я. С.* Диференціальні рівняння дифузійної теорії деформації твердого тіла // Доп. АН УРСР. – 1963. – № 31. – С. 336–340.
5. *Подстригач Я. С.* Диффузионная теория неупругости металлов // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1965. – № 2. – С. 67–72.

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ФОРМИРОВАНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ МЕХАНИКИ ИНЕРЦИОННЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Получено основное энергетическое соотношение для массоизолированной упругой системы, которая находится под воздействием динамической силовой нагрузки. Установлены физические соотношения локального динамического состояния и уравнения движения для поступательной, вращательной и деформационной форм движения.

ON ENERGETIC APPROACH TO CONSTRUCTING PHYSICAL RELATIONSHIPS OF INERTIA ELASTIC SYSTEMS MECHANICS

The basic energy equation is formulated for a mass-isolated elastic system being under the action of dynamical force loading. Within the scope of potential description the relationships of local dynamical state are formulated as well as the motion equations for translational, rotative and deformation forms of motion.

[1] Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики,
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Ін-т прикл. математики та фундам. наук
нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів

Одержано
27.03.07