УДК 539.3

А. В. Ловейкін, А. Ф. Улітко

РІВНОВАГА НЕСТИСЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ, ПОСЛАБЛЕНОГО ДВОМА *V*-ПОДІБНИМИ ПРИПОВЕРХНЕВИМИ ТРІЩИНАМИ, ЩО МАЮТЬ СПІЛЬНУ ВЕРШИНУ

Розглянуто задачу про визначення характеру поведінки напружень у нестисливому півпросторі з двома приповерхневими V-подібними (клиноподібними) тріщинами, які мають спільну вершину та лежать у площині, перпендикулярній до поверхні півпростору. На основі отриманих результатів встановлено, що локальна поведінка напружень при підході до вершини тріщин суттєво залежить від геометричних параметрів тріщин.

1. Вступ. Вивчення задач математичної теорії пружності для тіл, що мають різноманітні внутрішні та приповерхневі дефекти, має певний науково-практичний інтерес, оскільки поблизу цих дефектів відбувається концентрація напружень, яка може стати причиною руйнування тіла. Для передбачення процесу руйнування необхідно знати характер поведінки напружень поблизу дефекту.

Аналізуючи роботи, в яких вивчаються задачі для просторових тіл із внутрішніми тріщинами [1, 6, 8, 10, 11, 19], можна зробити висновок, що при підході до гладкої точки фронту тріщини напруження мають класичну кореневу особливість. Якщо розглядати поведінку напружень поблизу кутової точки фронту тріщини, то в цьому випадку локальна особливість напружень залежить від локальної геометрії тріщини, тобто в залежності від кута, який утворюється ребрами тріщини у негладкій точці фронту, локальна особливість може бути сильнішою від класичної кореневої, а може бути і слабшою. Аналогічна ситуація спостерігається і при розгляді задачі про визначення напружень у тілі, що має приповерхневу тріщину [3, 5, 14–19], але результати мають свою особливість. Так, існують такі кути виходу ребра тріщини на поверхню тіла, при яких напруження у точці виходу ребра будуть обмеженими (немає концентрації напружень), а існують такі кути, при яких у цій точці напруження матимуть локальну особливість, яка може бути як слабшою від класичної кореневої, так і сильнішою.

Проведений аналіз робіт свідчить, що напружено-деформований стан у тілах, що мають внутрішні та приповерхневі дефекти з нерегулярними (кутовими) точками, має суттєво тривимірний характер (особливо поблизу цих нерегулярних точок), і для вивчення особливостей пружних полів в околах таких точок доводиться розглядати задачі математичної теорії пружності саме у тривимірній постановці.

Нарешті зазначимо, що, незважаючи на значну кількість робіт, присвячених вивченню напружено-деформованого стану в тілах з внутрішніми та приповерхневими тріщинами, незначна їх кількість присвячена розгляду задач для тіл, що мають дві й більше тріщин, що безпосередньо взаємодіють між собою, наприклад, мають спільні точки на фронтах. Ця робота присвячена дослідженню задачі про рівновагу пружного півпростору, послабленого двома приповерхневими V-подібними тріщинами, які лежать у площині, перпендикулярній до поверхні півпростору, та мають спільну точку виходу ребер на поверхню півпростору – мають спільну вершину (рис. 1). Основною метою роботи є визначення характеру поведінки напружень в околі вершини тріщин.

2. Постановка задачі. Нехай пружний півпростір займає область $x > 0$, а тріщини розміщені в площині $y = 0$ і займають там двовимірні області $\Sigma_{1,2}$. Будемо вважати, що поверхня півпростору та стінки тріщин вільні від зовнішніх навантажень, а сам півпростір знаходиться під дією зовнішніх розтягуючих навантажень, симетричних за координатою y. Очевидно, що у сформульованих припущеннях розв'язок задачі має бути симетричним за координатою y, і його досить шукати у чверті простору $\Omega = \{x > 0,\ y > 0\}$. Для досягнення основної мети роботи шукатимемо однорідні розв'язки задачі, які визначаються як нетривіальні розв'язки рівнянь рівноваги Ляме в області Ω, що задовольняють такі змішані однорідні крайові умови:

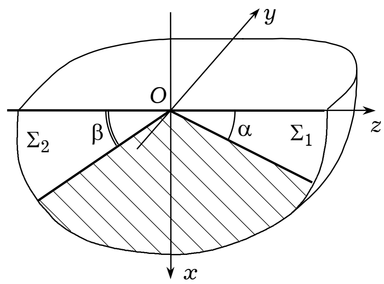

Рис. 1

$$\sigma_x\big|_{x=0} = \tau_{xy}\big|_{x=0} = \tau_{xz}\big|_{x=0} = 0\,,$$

$$\sigma_y\big|_{y=0} = 0, \qquad \tau_{yx}\big|_{y=0} = \tau_{yz}\big|_{y=0} = 0, \qquad (x,z) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2\,,$$

$$u_y\big|_{y=0} = 0, \qquad \tau_{yx}\big|_{y=0} = \tau_{yz}\big|_{y=0} = 0, \qquad (x,z) \notin \Sigma_1 \cup \Sigma_2\,. \tag{1}$$

При цьому умови регулярності на нескінченності не ставляться.

Для відшукання однорідних розв'язків подамо вектор пружних зміщень у формі Папковича − Нейбера [12]

$$2G\mathbf{u} = 4(1-\nu)(\mathbf{i}\Phi_1 + \mathbf{j}\Phi_2) - \operatorname{grad}(x\Phi_1 + y\Phi_2 + \Phi)\,, \tag{2}$$

де ν, G − коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву пружного матеріалу; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ − орти осей Ox та Oy декартової системи координат; $\Phi = (1-2\nu)(\Phi_1^* + \Phi_2^*)$, $\Phi_{1,2}^*$, $\Phi_1 = \dfrac{\partial \Phi_1^*}{\partial x}$, $\Phi_2 = \dfrac{\partial \Phi_2^*}{\partial y}$ − гармонічні в області Ω функції. З умови відсутності дотичних напружень при $x = 0$ та при $y = 0$ випливають умови

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\bigg|_{y=0} = 0\,, \tag{3}$$

при цьому для нормальних напружень та зміщень мають місце рівності

$$\sigma_x\big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}\right)\bigg|_{x=0} + (1-2\nu)\,\frac{\partial^2 \Phi_2^*}{\partial z^2}\bigg|_{x=0}\,,$$

$$\sigma_y\big|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right)\bigg|_{y=0} + (1-2\nu)\frac{\partial^2 \Phi_1^*}{\partial z^2}\bigg|_{y=0}\,,$$

$$2Gu_y\big|_{y=0} = 2(1-\nu)\Phi_2\big|_{y=0}\,, \tag{4}$$

де φ − кільцева координата сферичної або циліндричної систем координат [4].

Враховуючи геометрію тріщин (див. рис. 1) і те, що область Ω являє собою просторовий клин з кутом розхилу граней $\pi/2$, розв'язування задачі зручно проводити у сферичних координатах ρ, θ, φ [4], у яких

$$\Omega = \{\rho > 0,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \varphi < \pi/2\}\,,$$

$$\Sigma_1 = \{\rho > 0,\ 0 < \theta < \alpha,\ \varphi = 0\},$$

$$\Sigma_2 = \{\rho > 0,\ \pi - \beta < \theta < \pi,\ \varphi = 0\}\,,$$

де $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < \pi$.

У випадку нестисливого матеріалу ($\nu = 1/2$) задача зводиться до відшукання двох гармонічних функцій $\Phi_{1,2}$, які у сферичних координатах з урахуванням крайових умов (1), (2) і рівностей (3) мають задовольняти такі умови:

$$\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\pi/2} = 0\,, \tag{5}$$

$$\sigma_x\Big|_{\varphi=\pi/2} = -\frac{1}{\rho \sin\theta}\left.\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \varphi^2}\right)\right|_{\varphi=\pi/2} = 0\,, \tag{6}$$

$$\sigma_y\Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{\rho \sin\theta}\left.\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2}\right)\right|_{\varphi=0} = 0, \quad 0<\theta<\alpha \quad \text{або} \quad \pi-\beta<\theta<\pi\,, \tag{7}$$

$$2G\,u_y\Big|_{\varphi=0} = \Phi_2\Big|_{\varphi=0} = 0, \qquad \alpha \le \theta \le \pi-\beta\,. \tag{8}$$

3. Побудова гармонічних функцій. Для відшукання невідомих гармонічних функцій $\Phi_{1,2}$ подамо їх у вигляді інтегралів типу Мелера – Фока [9] за функціями Лежандра $P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta)$ [2]:

$$\Phi_1 = \frac{\rho^{s-1/2}}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \mu A_s^{(1)}(\mu)\cos(\mu\varphi)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+\mu\right)P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta)\,d\mu\,,$$

$$\Phi_2 = \frac{\rho^{s-1/2}}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \mu A_s^{(2)}(\mu)\cos\left(\mu\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+\mu\right)P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta)\,d\mu\,, \tag{9}$$

$$A_s^{(1,2)}(\mu) = a_s^{(1,2)}(\mu)\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+s+\mu\right) + b_s^{(1,2)}(\mu)\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+s+\mu\right),$$

де $a_s^{(1,2)}(\mu)$, $b_s^{(1,2)}(\mu)$ – невідомі, парні за μ функції, s – невідомий параметр, який вважаємо чисто уявним числом, $\Gamma(\xi)$ – Γ-функція Ейлера [2, 4]. При такому виборі функцій $\Phi_{1,2}$ крайові умови (5) вже виконані. З умови (6) після підстановки зображень (9) і застосування формул інтегральних перетворень типу Мелера – Фока [9] отримаємо

$$a_s^{(2)}(\mu) = -\frac{a_s^{(1)}(\mu)}{\mu}\sin\frac{\pi\mu}{2}, \qquad b_s^{(2)}(\mu) = -\frac{b_s^{(1)}(\mu)}{\mu}\sin\frac{\pi\mu}{2}\,. \tag{10}$$

Підставивши розвинення (9) у змішані крайові умови (7), (8) і продовживши отримані рівності на весь проміжок $0<\theta<\pi$, дістанемо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \mu A_s^{(1)}(\mu)\left(\mu^2 - \sin^2\frac{\pi\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+\mu\right)P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta)\,d\mu =$$

$$= \begin{cases} 0, & 0<\theta<\alpha, \\ \tilde{\sigma}_s(\theta)\sin\theta, & \alpha<\theta<\pi-\beta, \\ 0, & \pi-\beta<\theta<\pi, \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \mu A_s^{(1)}(\mu)\sin(\pi\mu)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s+\mu\right)P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta)\,d\mu =$$

$$= \begin{cases} \tilde{u}_s^{(1)}(\theta), & 0<\theta<\alpha, \\ 0, & \alpha<\theta<\pi-\beta, \\ \tilde{u}_s^{(2)}(\theta), & \pi-\beta<\theta<\pi, \end{cases} \tag{11}$$

де $\tilde{\sigma}_s(\theta)$ і $\tilde{u}_s^{(1,2)}(\theta)$ – невідомі функції, що визначають нормальні напруження в площині тріщин і нормальні зміщення стінок тріщин, і які повинні задовольняти такі умови:

$$\tilde{\sigma}_s \in C(\alpha < \theta < \pi - \beta), \qquad \tilde{\sigma}_s(\theta) \sim C \sin^{-1/2}(\theta - \alpha), \qquad \theta \to \alpha + ,$$

$$\tilde{\sigma}_s(\theta) \sim C \sin^{-1/2}(\pi - \beta - \alpha), \qquad \theta \to (\pi - \beta) - ;$$

$$\tilde{u}_s^{(1)} \in C(0 \le \theta \le \alpha), \qquad \tilde{u}_s^{(1)}(\theta) \sim C \sin^{1/2}(\alpha - \theta), \quad \theta \to \alpha - ,$$

$$\tilde{u}_s^{(2)} \in C(\pi - \beta \le \theta \le \pi), \quad \tilde{u}_s^{(2)}(\theta) \sim C \sin^{1/2}(\theta - \pi + \beta), \quad \theta \to (\theta - \pi) + . \tag{12}$$

Застосувавши до рівностей (11) формули інтегрального перетворення типу Мелера – Фока [9] і використовуючи властивості функцій Лежандра [2], отримаємо рівності

$$\frac{\mu^2 - \sin^2(\pi\mu/2)}{\Gamma(1/2 - s + \mu)}\left[a_s^{(1)}(\mu)\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right) - b_s^{(1)}(\mu)\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right)\right] =$$
$$= b_0^{-\mu}\frac{Y_s^{(1)}(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)},$$

$$\frac{\mu^2 - \sin^2(\pi\mu/2)}{\Gamma(1/2 - s + \mu)}\left[a_s^{(1)}(\mu)\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right) + b_s^{(1)}(\mu)\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right)\right] =$$
$$= a_0^{-\mu}\frac{Y_s^{(2)}(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)},$$

$$\frac{\sin(\pi\mu)}{\Gamma(1/2 - s + \mu)}\left[a_s^{(1)}(\mu)\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right) - b_s^{(1)}(\mu)\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right)\right] =$$
$$= a_0^{\mu}\frac{X_s^{(1)}(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)} - \frac{1}{\sin(\pi\mu)}\left[\cos(\pi s) b_0^{\mu}\frac{X_s^{(2)}(\mu)}{\Gamma(1+\mu)} + \frac{\pi}{G_s(\mu)} b_0^{-\mu}\frac{X_s^{(2)}(-\mu)}{\Gamma(1 - \mu)}\right],$$

$$\frac{\sin(\pi\mu)}{\Gamma(1/2 - s + \mu)}\left[a_s^{(1)}(\mu)\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right) + b_s^{(1)}(\mu)\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + s + \mu\right)\right] =$$
$$= b_0^{\mu}\frac{X_s^{(2)}(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)} - \frac{1}{\sin(\pi\mu)}\left[\cos(\pi s) a_0^{\mu}\frac{X_s^{(1)}(\mu)}{\Gamma(1 + \mu)} + \frac{\pi}{G_s(\mu)} a_0^{-\mu}\frac{X_s^{(1)}(-\mu)}{\Gamma(1 - \mu)}\right], \tag{13}$$

де $a_0 = \mathrm{tg}(\alpha/2)$, $b_0 = \mathrm{tg}(\beta/2)$,

$$Y_s^{(1)}(\mu) = \int_{\alpha}^{\pi-\beta}\tilde{\sigma}_s(t)\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}}\right)^{\mu} F\left(\frac{1}{2} - s; \frac{1}{2} + s; 1 + \mu; \sin^2\frac{t}{2}\right)dt,$$

$$Y_s^{(2)}(\mu) = \int_{\beta}^{\pi-\alpha}\tilde{\sigma}_s(\pi - \tau)\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{\tau}{2}}{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right)^{\mu} F\left(\frac{1}{2} - s; \frac{1}{2} + s; 1 + \mu; \sin^2\frac{\tau}{2}\right)d\tau,$$

$$X_s^{(1)}(\mu) = \mu\int_0^{\alpha}\frac{\tilde{u}_s^{(1)}(t)}{\sin t}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{t}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^{\mu} F\left(\frac{1}{2} + s; \frac{1}{2} - s; 1 + \mu; \sin^2\frac{t}{2}\right)dt,$$

$$X_s^{(2)}(\mu) = \mu\int_0^{\beta}\frac{\tilde{u}_s^{(2)}(\pi - \tau)}{\sin\tau}\left(\frac{\mathrm{tg}\frac{\tau}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^{\mu} F\left(\frac{1}{2} + s; \frac{1}{2} - s; 1 + \mu; \sin^2\frac{\tau}{2}\right)d\tau,$$

$Y_s^{(1,2)}(\mu)$, $X_s^{(1,2)}(\mu)$ – невідомі функції комплексної змінної μ; $F(a;\ b;\ c;\ \xi)$ – гіпергеометрична функція [2]; $G_s(\mu) = \Gamma(1/2 - s + \mu)\Gamma(1/2 + s + \mu)$. Аналізуючи невідомі функції $Y_s^{(1,2)}(\mu)$ та $X_s^{(1,2)}(\mu)$ з урахуванням (12), можна зробити висновок, що вони будуть аналітичними при $\operatorname{Re}\mu > -1/2$, при цьому з леми Ватсона [13] випливає, що при $\mu \to \infty$ ці функції поводять себе, як $C\mu^{-1/2}$.

Вилучивши з отриманих рівностей (13) невідомі функції $a_s^{(1)}(\mu)$ і $b_s^{(1)}(\mu)$, отримаємо систему функціональних рівнянь типу Вінера − Гопфа [7] відносно невідомих функцій $Y_s^{(1,2)}(\mu)$ та $X_s^{(1,2)}(\mu)$:

$$(a_0 b_0)^{\mu} \sin(\pi\mu) \begin{bmatrix} X_s^{(1)}(\mu) \\ X_s^{(2)}(\mu) \end{bmatrix} - \cos(\pi s) \begin{bmatrix} b_0^{2\mu} X_s^{(2)}(\mu) \\ a_0^{2\mu} X_s^{(1)}(\mu) \end{bmatrix} +$$
$$+ \frac{\sin^2(\pi\mu)}{\sin^2(\pi\mu/2) - \mu^2} \begin{bmatrix} Y_s^{(1)}(\mu) \\ Y_s^{(2)}(\mu) \end{bmatrix} = \frac{\pi}{G_s(\mu)} \frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1-\mu)} \begin{bmatrix} X_s^{(2)}(-\mu) \\ X_s^{(1)}(-\mu) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

яка справджується у смузі $|\operatorname{Re}\mu| < 1/2$.

До розв'язання системи (14) застосовуємо методику Вінера − Гопфа [7], основним кроком якої є факторизація коефіцієнта $\dfrac{\sin^2(\pi\mu)}{\sin^2(\pi\mu/2) - \mu^2}$, яка базується на розвиненні знаменника у нескінченний добуток [7]. Має місце рівність

$$\frac{\sin^2(\pi\mu)}{\sin^2(\pi\mu/2) - \mu^2} = \frac{\pi}{\pi^2/4 - 1} \cdot \frac{\mathcal{K}_+(\mu)\mathcal{K}_+(-\mu)}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\mu)}, \tag{15}$$

$$\mathcal{K}_+(\mu) = 2\frac{\Gamma(3/2 + \mu/2)}{\Gamma(1+\mu/2)} \cdot \frac{1}{L_+(\mu)}, \qquad L_+(\mu) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\mu/\lambda_n)(1+\mu/\bar{\lambda}_n)}{1+\mu/(2n+1)^2},$$

де λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, − послідовність простих нулів функції $\sin^2(\pi\mu/2) - \mu^2$, розміщених у першій координатній чверті $\{\operatorname{Re}\mu > 0,\ \operatorname{Im}\mu > 0\}$, при цьому $\lambda_n = 2n + 1 + i(2/\pi)\ln(4n+2) + o(1)$, $n \to \infty$. Використовуючи асимптотичні властивості Г-функції [2, 4] та нескінченних добутків [7], легко встановити, що $\mathcal{K}_+(\mu) \sim C\mu^{1/2}$, $\mu \to \infty$.

Використовуючи факторизацію (15) та об'єднуючи разом функції, аналітичні у півплощині $\operatorname{Re}\mu > -1/2$, та функції, які аналітичні у півплощині $\operatorname{Re}\mu > 1/2$, отримуємо рівність

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}_s^{(1)}(\mu) \\ \tilde{Y}_s^{(2)}(\mu) \end{bmatrix} + (a_0 b_0)^{\mu} \frac{\sin^2(\pi\mu/2) - \mu^2}{\sin(\pi\mu)} \begin{bmatrix} \tilde{X}_s^{(1)}(\mu) \\ \tilde{X}_s^{(2)}(\mu) \end{bmatrix} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \frac{p_k}{\mu - k} (a_0 b_0)^k \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \end{bmatrix} -$$
$$- \cos(\pi s) \frac{\sin^2(\pi\mu/2) - \mu^2}{\sin^2(\pi\mu)} \begin{bmatrix} b_0^{2\mu} \tilde{X}_s^{(2)}(\mu) \\ a_0^{2\mu} \tilde{X}_s^{(1)}(\mu) \end{bmatrix} -$$
$$- \frac{2}{\pi^2} \frac{\cos(\pi s)}{\mu - 1} \begin{bmatrix} b_0^2 x_k^{(2)} \\ a_0^2 x_k^{(1)} \end{bmatrix} + \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{p_k}{(\mu - k)^2} \begin{bmatrix} b_0^{2k} x_k^{(2)} \\ a_0^{2k} x_k^{(1)} \end{bmatrix} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\mu - k} \begin{bmatrix} b_0^{2k}[(p_k \ln b_0^2 - 2k)x_k^{(2)} + p_k y_k^{(2)}] \\ a_0^{2k}[(p_k \ln a_0^2 - 2k)x_k^{(1)} + p_k y_k^{(1)}] \end{bmatrix} \right\} =$$
$$= \frac{\pi^2/4 - 1}{\mathcal{K}_+^2(-\mu)} \frac{\Gamma^2(1-\mu)}{G_s(-\mu)} \begin{bmatrix} \tilde{X}_s^{(2)}(-\mu) \\ \tilde{X}_s^{(1)}(-\mu) \end{bmatrix} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \frac{p_k}{\mu - k} (a_0 b_0)^k \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \end{bmatrix} -$$
$$- \frac{2}{\pi^2} \frac{\cos(\pi s)}{\mu - 1} \begin{bmatrix} b_0^2 x_k^{(2)} \\ a_0^2 x_k^{(1)} \end{bmatrix} + \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{p_k}{(\mu - k)^2} \begin{bmatrix} b_0^{2k} x_k^{(2)} \\ a_0^{2k} x_k^{(1)} \end{bmatrix} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\mu - k} \begin{bmatrix} b_0^{2k}[(p_k \ln b_0^2 - 2k)x_k^{(2)} + p_k y_k^{(2)}] \\ a_0^{2k}[(p_k \ln a_0^2 - 2k)x_k^{(1)} + p_k y_k^{(1)}] \end{bmatrix} \right\}, \quad |\operatorname{Re}\mu| < 1/2, \tag{16}$$

де для зручності введено нові невідомі функції

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_s^{(1,2)}(\mu) \\ \tilde{Y}_s^{(1,2)}(\mu) \end{bmatrix} = \mathcal{K}_+(\mu) \frac{G_s(\mu)}{\Gamma^2(1+\mu)} \begin{bmatrix} X_s^{(1,2)}(\mu) \\ Y_s^{(1,2)}(\mu) \end{bmatrix}, \tag{17}$$

аналітичні при $\operatorname{Re}\mu > -1/2$, які при $\mu \to \infty$ поводять себе, як $C\mu^{-1}$, та використано такі позначення:

$$x_k^{(1,2)} = x_k^{(1,2)}(s) = \tilde{X}_s^{(1,2)}(k), \qquad k = 1,2,\ldots,$$

$$y_k^{(1,2)} = y_k^{(1,2)}(s) = (\tilde{X}_s^{(1,2)})'(k), \qquad k = 2,3,\ldots,$$

$$p_k = \sin^2(\pi k/2) - k^2, \qquad k = 2,3,\ldots. \tag{18}$$

Для невідомих величин $x_k^{(1,2)}$, $y_k^{(1,2)}$, введених рівностями (18), використовуючи асимптотичні властивості функцій $\tilde{X}_s^{(1,2)}(\mu)$, легко встановити поведінку:

$$x_k^{(1,2)} = x_k^{(1,2)}(s) = C_{1,2}(s)/k + O(k^{-2}), \qquad k \to \infty,$$

$$y_k^{(1,2)} = y_k^{(1,2)}(s) = O(k^{-2}), \qquad k \to \infty. \tag{19}$$

Враховуючи цю поведінку, отримаємо, що ряди, які входять до (16), будуть збіжними, якщо параметри a_0 та b_0 задовольняють умову $0 < a_0,\ b_0 < 1$. Згадавши, що $a_0 = \operatorname{tg}(\alpha/2)$, а $b_0 = \operatorname{tg}(\beta/2)$, отримаємо, що застосований підхід справджується лише для гострих кутів занурення ребер тріщин α і β (див. рис. 1), тобто $0 < \alpha,\ \beta < \pi/2$.

Додаткові доданки в рівності (16) введені так, щоб ліва частина була аналітичною у півплощині $\operatorname{Re}\mu > 1/2$, а права – у півплощині $\operatorname{Re}\mu < -1/2$. При цьому обидві частини рівності (16) в областях їх аналітичності при $\mu \to \infty$ прямують до нуля. Тоді з принципу аналітичного продовження і теореми Ліувілля [7] випливає, що ліва та права частини рівності (16) мають дорівнювати нулеві. Отриманий факт дозволяє записати рівності, які визначають невідомі функції $\tilde{X}_s^{(1,2)}(\mu)$ та $\tilde{Y}_s^{(1,2)}(\mu)$. Прирівнявши праву частину (16) до нуля та зробивши заміну аргументу μ на $(-\mu)$, отримаємо рівність для визначення невідомої функції $\tilde{X}_s^{(1,2)}(\mu)$:

$$\frac{\pi^2/4-1}{\mathcal{K}_+^2(\mu)} \cdot \frac{\Gamma^2(1+\mu)}{G_s(\mu)} \begin{bmatrix} \tilde{X}_s^{(2)}(\mu) \\ \tilde{X}_s^{(1)}(\mu) \end{bmatrix} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \frac{p_k}{\mu+k} (a_0 b_0)^k \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \frac{\cos(\pi s)}{\mu+1} \begin{bmatrix} b_0^2 x_k^{(2)} \\ a_0^2 x_k^{(1)} \end{bmatrix} + \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ \frac{p_k}{(\mu+k)^2} \begin{bmatrix} b_0^{2k} x_k^{(2)} \\ a_0^{2k} x_k^{(1)} \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\mu+k} \begin{bmatrix} b_0^{2k}[(p_k \ln b_0^2 - 2k)x_k^{(2)} + p_k y_k^{(2)}] \\ a_0^{2k}[(p_k \ln a_0^2 - 2k)x_k^{(1)} + p_k y_k^{(1)}] \end{bmatrix} \right\} = 0, \quad |\operatorname{Re}\mu| < 1/2. \tag{20}$$

Аналогічну рівність отримуємо і для функцій $\tilde{Y}_s^{(1,2)}(\mu)$.

Для повного визначення функцій $\tilde{X}_s^{(1,2)}(\mu)$ з рівності (20) потрібно знайти невідомі величини $x_k^{(1,2)}$, $k = 1,2,\ldots$, $y_k^{(1,2)}$, $k = 2,3,\ldots$. Враховуючи позначення (18), для їх знаходження, по-перше, послідовно покладемо в (20) $\mu = m = 1,2,\ldots$, а по-друге, продиференціюємо (20) за μ і в отриманій рівності послідовно покладемо $\mu = m = 2,3,\ldots$. Внаслідок цього отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих невідомих:

$$A_m(s)\begin{bmatrix} x_m^{(2)} \\ x_m^{(1)} \end{bmatrix} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cdot \frac{p_k}{m+k} \cdot (a_0 b_0)^k \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \cdot \frac{2}{m+1} \begin{bmatrix} b_0^2 x_k^{(2)} \\ a_0^2 x_k^{(1)} \end{bmatrix} + \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k}{(m+k)^2} \begin{bmatrix} b_0^{2k} x_k^{(2)} \\ a_0^{2k} x_k^{(1)} \end{bmatrix} -$$

$$- \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m+k} \begin{bmatrix} b_0^{2k}[(p_k \ln b_0^2 - 2k) x_k^{(2)} + p_k y_k^{(2)}] \\ a_0^{2k}[(p_k \ln a_0^2 - 2k) x_k^{(1)} + p_k y_k^{(1)}] \end{bmatrix} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$A_m(s)\begin{bmatrix} y_m^{(2)} \\ y_m^{(1)} \end{bmatrix} + A_m(s) B_m(s) \begin{bmatrix} x_m^{(2)} \\ x_m^{(1)} \end{bmatrix} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} \cdot \frac{p_k}{(m+k)^2} \cdot (a_0 b_0)^k \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \end{bmatrix} -$$

$$- \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \frac{2}{(m+1)^2} \begin{bmatrix} b_0^2 x_k^{(2)} \\ a_0^2 x_k^{(1)} \end{bmatrix} - \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2p_k}{(m+k)^3} \begin{bmatrix} b_0^{2k} x_k^{(2)} \\ a_0^{2k} x_k^{(1)} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(m+k)^2} \begin{bmatrix} b_0^{2k}[(p_k \ln b_0^2 - 2k) x_k^{(2)} + p_k y_k^{(2)}] \\ a_0^{2k}[(p_k \ln a_0^2 - 2k) x_k^{(1)} + p_k y_k^{(1)}] \end{bmatrix} = 0, \quad m = 2, 3, \ldots, \tag{21}$$

де використовуються такі позначення:

$$A_m(s) = \frac{\pi^2/4 - 1}{\mathcal{K}_+^2(m)} \cdot \frac{\Gamma^2(1+m)}{G_s(m)},$$

$$B_m(s) = 2\psi(1+m) - \psi\left(\frac{1}{2} - s + m\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + s + m\right) +$$

$$+ \psi\left(1 + \frac{m}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{2} + \frac{m}{2}\right) - 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1+m} - \operatorname{Re}\frac{1}{\lambda_n + m}\right).$$

Аналізуючи властивості отриманої нескінченної системи (21), отримаємо, що при кожному фіксованому комплексному s ця система є квазі-цілком регулярною.

Визначимо шукані гармонічні функції $\Phi_{1,2}$ через розв'язки системи (21). Використовуючи подання (9), зв'язок (10), останню з рівностей (13) і позначення (17), отримаємо

$$\Phi_1 = \frac{\rho^{s-1/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu \frac{\cos(\mu\varphi)}{\sin(\pi\mu)} \cdot \frac{\Gamma(1+\mu)}{\mathcal{K}_+(\mu)} \Big[b_0^{\mu} \tilde{X}_s^{(2)}(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) +$$

$$+ a_0^{\mu} \tilde{X}_s^{(1)}(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos\theta) \Big] d\mu,$$

$$\Phi_2 = -\frac{\rho^{s-1/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos[\mu(\varphi - \pi/2)]}{2\cos(\pi\mu/2)} \cdot \frac{\Gamma(1+\mu)}{\mathcal{K}_+(\mu)} \Big[b_0^{\mu} \tilde{X}_s^{(2)}(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) +$$

$$+ a_0^{\mu} \tilde{X}_s^{(1)}(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos\theta) \Big] d\mu.$$

При $\alpha < \theta < \pi - \beta$ інтеграли в останніх рівностях можна порахувати, якщо замкнути контур інтегрування у півплощині $\operatorname{Re}\mu > 0$ та обчислити суму лишків у простих полюсах підінтегральних виразів. В результаті, враховуючи позначення (18), отримаємо

$$\Phi_1 = -\rho^{s-1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi} k \cos(k\varphi) \cdot \frac{\Gamma(k+1)}{\mathcal{K}_+(k)} \Big[b_0^k x_k^{(2)}(s) P_{s-1/2}^{-k}(\cos\theta) +$$

$$+ a_0^k x_k^{(1)}(s) P_{s-1/2}^{-k}(-\cos\theta) \Big],$$

$$\Phi_2 = -\rho^{s-1/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin[(2k-1)\varphi]}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(2k)}{\mathcal{K}_+(2k-1)}\Big[b_0^{2k-1}x_{2k-1}^{(2)}(s)P_{s-1/2}^{-2k+1}(\cos\theta) +$$
$$+ a_0^{2k-1}x_{2k-1}^{(1)}(s)P_{s-1/2}^{-2k+1}(-\cos\theta)\Big],$$
$$\rho > 0, \quad \alpha < \theta < \pi-\beta, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2. \qquad (22)$$

Аналогічні зображення можна отримати і на інтервалах $0 < \theta < \alpha$, $\pi - \beta < \theta < \pi$.

До цього часу ми вважали, що параметр s є чисто уявним числом, але, враховуючи те, що $x_k^{(1,2)}$ є розв'язками нескінченної системи (21), квазі-цілком регулярної при кожному комплексному s, зображення (22) можна аналітично продовжити з уявної осі на всю комплексну площину s. Нагадаємо, що однорідні розв'язки мають бути нетривіальними розв'язками вихідної задачі. З рівності (22) випливає, що функції $\Phi_{1,2}$ будуть відмінними від тотожного нуля лише у випадку, коли система (21) має нетривіальний розв'язок. Оскільки система (21) є однорідною системою, то це можливе лише у випадку, коли її основний визначник перетворюється в нуль, що дає можливість знайти можливі значення параметра s. Нулі визначника нескінченної системи (21) шукали чисельно шляхом редукції системи до скінченної.

4. Аналіз розподілу напружень. Найбільший інтерес становить вивчення розподілу напружень в околі вершини тріщин, точки *O* (див. рис. 1). З рівності (4), зображень (22) гармонічних функцій $\Phi_{1,2}$ випливає, що у випадку нестисливого матеріалу в площині розташування тріщин ($y = 0$ або $\varphi = 0$) для нормальних напружень можливе таке подання через однорідні розв'язки:

$$\sigma_y\big|_{\varphi=0} = \frac{\rho^{s-3/2}}{\sin\theta}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\pi}k\left(\sin^2\frac{\pi k}{2} - k^2\right)\frac{\Gamma(1+k)}{\mathcal{K}_+(k)}\Big[b_0^k x_k^{(2)}(s)P_{s-1/2}^{-k}(\cos\theta) +$$
$$+ a_0^k x_k^{(1)}(s)P_{s-1/2}^{-k}(-\cos\theta)\Big], \qquad \alpha < \theta < \pi - \beta. \qquad (23)$$

З отриманої рівності (23) випливає, що при наближенні до точки *O* ($\rho \to 0+$, θ – фіксоване) розподіл напружень визначається додатними нулями визначника нескінченної системи (21). Чисельний аналіз системи показав, що розподіл нулів її визначника, а як наслідок – і характер поведінки напружень, суттєво залежить від кутів α та β занурення ребер тріщин у півпростір. Якщо співвідношення між кутами α та β таке, що точка з координатами $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ попадає в область D_1 (рис. 2), то визначник системи (21) має найменші додатні нулі в точках $s = 3/2$ та $s = s_1 > 3/2$, причому ці нулі прості. Якщо подати розв'язок задачі у вигляді суперпозиції однорідних розв'язків, то в цьому випадку нормальні напруження при підході до вершини тріщин поводять себе таким чином:

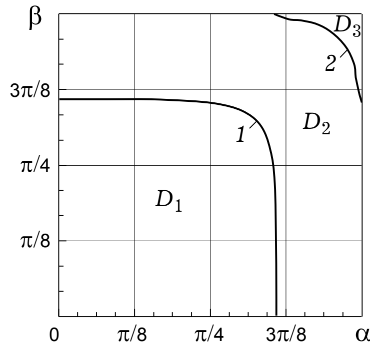

Рис. 2

$$\sigma_y\big|_{\varphi=0} \sim K_0(\theta) + K_1(\theta)\rho^{\gamma}, \quad \rho \to 0+, \quad \alpha < \theta < \pi - \beta, \qquad (24)$$

де $\gamma = s_1 - 3/2 > 0$, тобто напруження залишаються обмеженими, в вершині тріщин немає концентрації напружень.

Якщо точка з координатами $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ попадає на криву *1* (див. рис. 2), то визначник системи (21) має нуль другого порядку в точці $s = s_1 = 3/2$. Тоді в цьому випадку напруження в вершині тріщин мають логарифмічну особливість

$$\sigma_y\Big|_{\varphi=0} \sim K_0(\theta) + K_1(\theta)\ln\rho, \quad \rho \to 0+, \quad \alpha < \theta < \pi - \beta.$$

Якщо ж точка $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ попадає в область D_2, на криву *2* або в область D_3 (див. рис. 2), то визначник системи (21) має найменші нулі в точках $s = s_1 \in (1/2, 3/2)$ та $s = 3/2$, і ці нулі знову прості. Тоді характер розподілу напружень при підході до точки O теж визначається рівністю (24), але в цьому випадку $\gamma = s_1 - 3/2 < 0$, тобто напруження мають локальну степеневу особливість у вершині тріщин. Якщо кути α та β такі, що точка $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ лежить в області D_2 (див. рис. 2), то особливість у вершині є слабшою від класичної кореневої, яка має місце на ребрах тріщин. Якщо точка $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ лежить на кривій *2* (див. рис. 2), то особливість у вершині буде класичною кореневою, тобто такою самою, що й на ребрах. Нарешті, якщо точка $(\alpha/\pi, \beta/\pi)$ лежить в області D_3 (див. рис. 2), то особливість у вершині є сильнішою від особливості на ребрах тріщин.

Числові значення показника особливості γ в залежності від кутів α і β наведено у табл. 1.

Таблиця 1

α/π \ β/π	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.49
0	1.0	0.9914	0.73245	0.2101	-0.1189	-0.3758
0.1	0.9914	0.98315	0.73045	0.20975	-0.1192	-0.3763
0.2	0.73245	0.73045	0.64785	0.2022	-0.12415	-0.3838
0.3	0.2101	0.20975	0.2022	0.10815	-0.15625	-0.42025
0.4	-0.1189	-0.1192	-0.12415	-0.15625	-0.28115	-0.52725
0.49	-0.3758	-0.3763	-0.3838	-0.42025	-0.52725	–

Наприкінці зауважимо, що у випадку, коли $\alpha = 0$ або $\beta = 0$, у півпросторі розміщена одна *V*-подібна приповерхнева тріщина. Ця задача детально вивчалась в літературі [3, 5, 14–19]. Результати, отримані в цій роботі, повністю узгоджуються з результатами, отриманими раніше.

1. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 348 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
3. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Лапина О. Н.* Показатели сингулярности упругих напряжений в точке выхода трещины на поверхность // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 5. – С. 146–153.
4. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. – Москва: Физматгиз, 1963. – 379 с.
5. *Ловейкин А. В., Улитко А. Ф.* Анализ напряженно-деформированного состояния в несжимаемом полупространстве с приповерхностной клиновидной трещиной // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 1. – С. 136–148.
6. *Ловейкин А. В., Улитко А. Ф.* О распределении напряжений в упругом пространстве, ослабленном двумя клиновидными разрезами, лежащими в одной плоскости // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 1. – С. 40–49.

7. *Нобл Б.* Метод Винера – Хопфа. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1968. – 279 с.
8. *Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Стадник М. М.* Пространственные задачи теории трещин: (Обзор). Ч. 1. Основные механические концепции и математические методы в пространственных задачах теории трещин // Физ.-хим. механика материалов. – 1979. – **15**, № 4. – С. 39–55.
9. *Парфенеко Д. М., Улитко А. Ф.* Об одном новом интегральном преобразовании и использовании его в контактных задачах теории упругости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 11. – С. 53–58.
10. *Улітко А. Ф., Ловейкін А. В.* Задача про визначення напружень у пружному просторі з двома клиноподібними розрізами, розміщеними в одній площині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44,** № 4. – С. 70–76.
11. *Улітко А. Ф., Ловейкін А. В.* Задача про рівновагу простору з двома розрізами – по півплощині та клиноподібним у плані, які лежать в одній площині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 1. – С. 109–114.
12. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
13. *Федорюк В. Ф.* Асимптотика: интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
14. *Bažant Z. P., Estenssoro L. F.* Surface singularity and crack propagation // Int. J. Solids Struct. – 1979. – **15**, No. 4. – P. 405–426.
15. *Bentem J. P.* State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space // Int. J. Solids Struct. – 1977. – **13**, No. 5. – P. 479–492.
16. *Bentem J. P.* The quarter-infinite crack in a half-space: Alternative and additional solutions // Int. J. Solids Struct. – 1980. – **16**. – P. 119–130.
17. *Folias E. S.* On the 3-dimencional theory of cracked plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1975. – **42**, No. 3. – P. 663–674.
18. *Ghahremani F., Shih C. F.* Corner singularities of 3-dimencional planar interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1992. – **59**, No. 1. – P. 61–68.
19. *Sinclair G. B.* Stress singularities in classical elasticity-II: Asymptotic identification // Appl. Mech. Rev. – 2004. – **57**, No. 5. – P. 385–439.

РАВНОВЕСИЕ НЕСЖИМАЕМОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ОСЛАБЛЕННОГО ДВУМЯ *V*-ПОДОБНЫМИ ПРИПОВЕРХНОСТНЫМИ ТРЕЩИНАМИ, ИМЕЮЩИМИ ОБЩУЮ ВЕРШИНУ

Рассмотрена задача об определении характера поведения напряжений в несжимаемом полупространстве с двумя приповерхностными V-подобными (клиноподобными) трещинами, которые имеют общую вершину и лежат в плоскости, перпендикулярной поверхности полупространства. Используя полученные результаты, установлено, что локальное поведение напряжений при подходе к вершине трещин существенно зависит от геометрических параметров трещин.

EQUILIBRIUM OF INCOMPRESSIBLE HALF-SPACE WEAKENED BY TWO *V*-SHAPED SURFACE CRACKS THAT HAVE THE SAME TIP

This paper deals with the problem of stress singularity definition in the incompressible half-space with two V-shaped surface cracks that have the same tip and lie in the plane that is perpendicular to the half-space surface. The results obtained in the paper give us the conclusion that the local stress behavior near the cracks' tip depends on the cracks geometrical parameters essentially.

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
26.11.06