

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ В ОКОЛІ ВКЛЮЧЕННЯ У ВИГЛЯДІ СКІНЧЕНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПІД ДІЄЮ ХВИЛІ КРУЧЕННЯ

Розв'язано задачу про визначення напруженого стану в необмеженому тілі з включенням у вигляді циліндричної оболонки під дією осесиметричної хвилі кручення. Включення може бути як абсолютно жорстким, так і пружним. Між ним і навколишнім середовищем на зовнішній та внутрішній поверхнях виконуються умови ідеального зчеплення. Метод розв'язування ґрунтується на використанні розривного розв'язку рівняння крутильних коливань і зведенні граничної задачі до сингулярного інтегрального рівняння відносно невідомого стрибка дотичних напружень.

При створенні сучасних машин і будівельних споруд досить часто використовують конструкційні елементи у вигляді тонких включень. Але проектування конструкцій, які містять такі тонкостінні елементи, вимагає розв'язання відповідних змішаних задач теорії пружності, що є тим більше складними, якщо розглядаються у динамічній постановці. Досить часто ці тонкостінні елементи мають вигляд циліндрів. При розгляді подібних задач, як правило, включення передбачається абсолютно жорстким, що спрощує розв'язання задачі, але не дозволяє врахувати вплив пружних властивостей включення на концентрацію напружень навколо нього.

У поданій роботі досліджується напружений стан у тілі з включенням у вигляді пружної циліндричної оболонки під дією гармонічної хвилі кручення. Розв'язання цієї задачі для абсолютно жорсткого включення наведено в роботі [4].

Постановка задачі. Нехай маємо необмежене пружне тіло (матрицю), що містить тонку пружну циліндричну оболонку товщини h , середня поверхня якої збігається з циліндром (рис. 1), $r = r_0$, $|z| \leq a$, $a \gg h$.

У матриці в умовах осевої симетрії (вісь симетрії збігається з віссю включення) відбуваються крутильні коливання внаслідок поширення хвилі кручення. Ця хвиля викликає в матриці кутове переміщення

$$u_{\theta}^0 = \frac{A}{\beta r_0} J_1(\beta r) e^{i\sigma z}, \quad \beta = \sqrt{\alpha_2^2 - \sigma^2},$$

$$\alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}, \quad c_2^2 = \frac{G_1}{\rho_1}, \quad (1)$$

де G_1 , ρ_1 – модуль зсуву та густина матриці; ω – частота коливань; σ – хвильова стала. Множник $e^{-i\omega t}$, який визначає залежність від часу, тут і надалі опущено.

Кутове переміщення матриці можна подати у вигляді

$$u_{\theta} = u_{\theta}^0 + u_{\theta}^1, \quad (2)$$

де u_{θ}^1 – переміщення, яке викликають хвилі, відбиті від включення. У випадку гармонічних коливань в умовах осевої симетрії воно задовольняє рівняння [6]

$$\frac{\partial^2 u_{\theta}^1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^1}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_{\theta}^1 + \frac{\partial^2 u_{\theta}^1}{\partial z^2} + \alpha_2^2 u_{\theta}^1 = 0. \quad (3)$$

Граничні умови на включенні з огляду на його малу товщину формулюються відносно його серединної поверхні $r = r_0$. Тоді у випадку ідеаль-

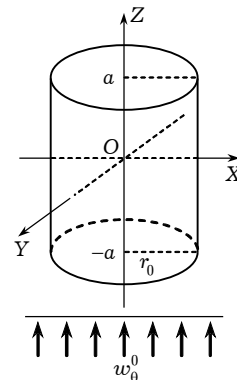


Рис. 1

ного зчеплення зовнішньої і внутрішньої поверхонь включення з матрицею мають виконуватись рівності

$$\begin{aligned} u_{\theta}^1(r_0 \pm 0, z) &= w_{\theta}^0(z) - u_{\theta}^0(r_0 \pm 0, z), \\ \chi(z) &= \tau_{\theta r}(r_0 + 0, z) - \tau_{\theta r}(r_0 - 0, z), \quad -a < z < a. \end{aligned} \quad (4)$$

У цих рівностях $\chi(z)$ – невідомий стрибок дотичних напружень на поверхні включення; $w_{\theta}^0(z)$ – невідоме кутове переміщення серединної поверхні включення. Останнє визначається таким рівнянням теорії пружних оболонок [3]:

$$w_{\theta}^{0''}(z) + \alpha_{02}^2 w_{\theta}^0(z) = -\frac{\chi_1(z)}{G_0 h}, \quad -1 < z < 1, \quad \alpha_{02}^2 = \frac{\rho_0 \omega^2}{G_0}, \quad (5)$$

де G_0, ρ_0 – модуль зсуву і густина включення.

За умови нехтування дією з боку матриці на торці включення рівняння (5) слід розглядати з граничними умовами

$$G_0 h w_{\theta}^{0'}(z \pm a) = 0. \quad (6)$$

Розв'язання задачі. Якщо скористатися розривним розв'язком рівняння (3), отриманим за методикою [5], то кутове переміщення у матриці можна визначити за формулою

$$u_{\theta}^1(r, z) = r_0 \int_{-a}^a \frac{\chi(\eta)}{G_1} F(\eta - z, r) d\eta, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} F(\eta - z, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\lambda, r) e^{i\lambda(\eta - z)} d\lambda, \\ H(\lambda, r) &= \begin{cases} I_1(r_0 q(\lambda)) K_1(r q(\lambda)), & r > r_0, \\ I_1(r q(\lambda)) K_1(r_0 q(\lambda)), & r < r_0, \end{cases} \quad q(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \alpha_2^2}. \end{aligned}$$

Щоб знайти кутове переміщення серединної поверхні включення, необхідно розв'язати одновимірну задачу (5), (6). Для цього вводяться нові позначення:

$$\begin{aligned} z &= a\zeta, \quad v_0(\zeta) = \frac{1}{a} w_{\theta}^0(a\zeta), \quad g = \frac{G_1}{G_0}, \quad \gamma = \frac{a}{r_0}, \quad \varepsilon = \frac{h}{r_0}, \\ \alpha_0 &= \alpha_2 r_0, \quad q_0^2 = \frac{g\gamma^2 \alpha_0^2}{\bar{\rho}}, \quad \varphi(\zeta) = \frac{\chi(a\zeta)}{G_1}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Після введення цих позначень співвідношення (5), (6) набувають вигляду

$$v_0''(\zeta) + q_0^2 v_0(\zeta) = -\frac{g\gamma}{\varepsilon} \varphi(\zeta), \quad v_0'(\pm 1) = 0. \quad (9)$$

Розв'язок одновимірної граничної задачі (9) визначається формулою

$$v_0(\zeta) = -\frac{g\gamma}{\varepsilon} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) G(\tau, \zeta) d\tau. \quad (10)$$

У формулі (10) $G(\tau, \zeta)$ – функція Гріна граничної задачі (9):

$$\begin{aligned} G(\tau, \zeta) &= \frac{\sin q_0(\tau - \zeta)}{2q_0} + \frac{1}{q_0 \sin 2q_0} [\cos q_0(1 + \tau) \cos q_0(1 - \zeta) + \\ &\quad + \cos q_0(1 + \zeta) \cos q_0(1 - \tau)]. \end{aligned}$$

З формул (7), (10) випливає, що для визначення кутового переміщення в матриці і включенні необхідно знайти стрибок дотичного напруження $\chi(z)$. Він може бути визначений в результаті реалізації першої з умов (4).

Оскільки зручніше використовувати не саму цю умову, а рівність, отриману з неї диференціюванням, то стрибок будемо знаходити з рівностей

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0^1}{\partial z}(r_0, z) &= w_0^{0'}(z) - \frac{\partial u_0^0}{\partial z}(r_0, z), \quad -a < z < a, \\ u_0^1(r_0, -a) &= w_0^0(-a) - u_0^0(r_0, -a).\end{aligned}\quad (11)$$

Перша з рівностей (11) є результат диференціювання першої рівності (4), а друга – умова еквівалентності продиференційованої і вихідної рівностей. Підставивши в (11) вирази для переміщень (7) і (10), отримаємо інтегральне рівняння і додаткову умову для визначення невідомого стрибка напружень, які після переходу до позначень (8) набувають вигляду

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \left[L_1(\tau - \zeta) - \frac{g\gamma}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \zeta} G(\tau, \zeta) \right] d\tau &= f_1(\zeta), \quad -1 < \zeta < 1, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \left[L_0(\tau + 1) - \frac{g\gamma^2}{\varepsilon} G(\tau, -1) \right] d\tau &= f_0,\end{aligned}\quad (12)$$

де

$$\begin{aligned}L_1(x) &= 2\gamma x_0 \int_0^\infty u I_1(x_0 q) K_1(x_0 q) \sin(x\gamma x u) du, \quad q = \sqrt{u^2 - 1}, \\ L_0(x) &= -2x_0 \int_0^\infty I_1(x_0 q) K_1(x_0 q) \cos(x\gamma x u) du, \\ f_1(\zeta) &= \frac{i\alpha_0 A_0}{\beta_0} I_1(x_0 \beta_0) e^{i\alpha_0 \gamma x_0 \zeta}, \quad f_0 = \frac{iA_0}{x_0 \beta_0} I_1(x_0 \beta_0) e^{-i\alpha_0 \gamma x_0}, \\ \beta_0 &= \sqrt{1 - \alpha_0^2}, \quad \alpha_0 = \frac{\sigma}{x_2}.\end{aligned}$$

Для побудови розв'язку рівнянь (12) необхідно вилучити сингулярну складову ядер інтегральних операторів. У роботі [4] доведено, що

$$\begin{aligned}L_1(x) &= \frac{1}{x} + F(x), \quad L_0(x) = \ln|x| + H(x), \\ F(x) &= O(x \ln|x|), \quad H(x) = O(x \ln|x|), \quad x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Окрім того, має місце подання

$$\frac{\partial G(\tau, \zeta)}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\tau - \zeta) + D(\tau, \zeta),$$

де $D(\tau, \zeta)$ – неперервна при $-1 \leq \tau, \zeta \leq 1$ функція. За допомогою останніх формул рівняння (12) перетворюються таким чином:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \left[\frac{1}{\tau - \zeta} + \frac{\pi n \gamma}{\varepsilon} \operatorname{sgn}(\tau - \zeta) + R(\tau, -\zeta) \right] d\tau &= f_1(\zeta), \quad -1 < \zeta < 1, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \left[-\gamma \ln(\tau + 1) + R_0(\tau) \right] d\tau &= f_0.\end{aligned}\quad (13)$$

У (13) позначено

$$R(\tau, \zeta) = F(\tau - \zeta) - \frac{2\pi g \gamma}{\varepsilon} D(\tau, \zeta), \quad R_0(\tau) = H(\tau + 1) - \frac{2\pi g \gamma^2}{\varepsilon} G(\tau, -1).$$

Розв'язок інтегрального рівняння (13) у класі функцій, що інтегруються на інтервалі $[-1, 1]$, знаходимо у вигляді

$$\varphi(x) = \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}}.\quad (14)$$

Тоді внаслідок застосування чисельного колокаційного методу, викладеного в [1], з (13) отримуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_m \left[\frac{1}{\tau_m - \zeta_k} + \frac{\pi n \gamma}{\varepsilon} A_{km} + R(\tau_m, \zeta_k) \right] &= f_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_m [B_m + R_0(\tau_m)] &= f_0. \end{aligned} \quad (15)$$

У системі (15) прийнято позначення:

$$\begin{aligned} \Psi_m &= \Psi(\tau_m), \quad a_m = \frac{\pi}{n}, \quad \tau_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}, \quad \zeta_k = \frac{\cos k\pi}{n}, \\ B_m &= -\ln 2 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^j \cos \frac{j(2m-1)\pi}{2n}}{j}, \\ A_{km} &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi(2k-n)}{2n} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sin \frac{jk\pi}{n} \cos \frac{j(2m-1)\pi}{2n}}{j} \right], \\ m &= 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

При виведенні системи (15) для інтегралів з функцією $\text{sgn}(\tau - \zeta)$ і логарифмічною особливістю використано квадратурні формули, наведені у роботі [2].

Після розв'язання системи (15) невідома функція $\Psi(x)$ наближається інтерполяційним многочленом

$$\Psi(\tau) = \sum_{m=1}^n \Psi_m \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T'_m(\tau_m)},$$

де $T_n(\tau)$ – многочлен Чебишева другого роду.

Найбільшу цікавість для механіки руйнування і теорії міцності викликає напружений стан в матриці поблизу включення. Для його оцінки використовують коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), які вводяться формулами

$$N^\pm = \sqrt{a} G_1 K^\pm, \quad K^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm 1 \mp 0} \sqrt{1 \mp x} \varphi(x).$$

Наближені значення безрозмірних КІН через розв'язок системи (15) подаються таким чином [4]:

$$K^\pm = \varphi(\pm 1) = \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m \Psi_m (c\zeta\gamma_m)^{\pm 1}, \quad \gamma_m = \frac{\pi(2m-1)}{4n}. \quad (16)$$

Результати чисельного дослідження і висновки. За допомогою формул (16) проведено комп'ютерне дослідження залежності КІН від параметрів хвильового навантаження, відношення фізичних сталей матриці і включення, а також відношення характерних геометричних розмірів включення. Результати цього дослідження наведено нижче у вигляді графіків. При розрахунках вважали, що відносна товщина включення $\varepsilon = 0.05$. Оскільки розрахунки показали, що найбільші значення КІН спостерігаються при значеннях відношення хвильових сталей α_0 , близьких до 1, то результати наведено тільки для випадку $\alpha_0 = 0.95$. Усі графіки ілюструють залежності $|K^-|$ від α_0 , оскільки $|K^-| > |K^+|$.

Щоб з'ясувати вплив на значення КІН саме жорсткості включення, спочатку вважали, що включення і матриця мають однакову густину: $\bar{\rho} = 1$.

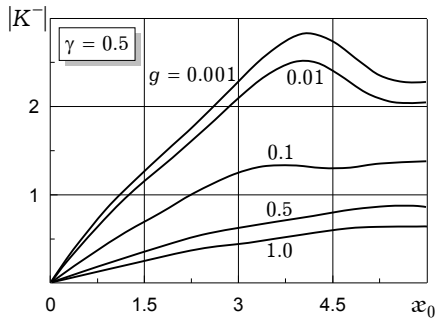


Рис. 2

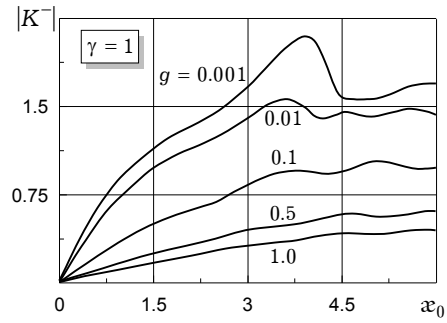


Рис. 3

Результати розрахунків наведено на рис. 2-4, які відповідають значенням відношення геометричних розмірів включення $\gamma = 0.5$, $\gamma = 1$, $\gamma = 2$. Графіки на цих рисунках показують зміну $|K^-|$ при зростанні хвильового числа для значень відношення модулів зсуву $g = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1.0$. Можна бачити, що зі спаданням g значення КІН зростають. При $g = 0.001$ вони вже практично збігаються зі значеннями, що відповідають абсолютно жорсткому включенню [4], біля якого буде найбільша концентрація напружень. Також можна бачити наявність частоти, при якій значення КІН сягають максимуму, причому ця частота зменшується при зростанні жорсткості включення.

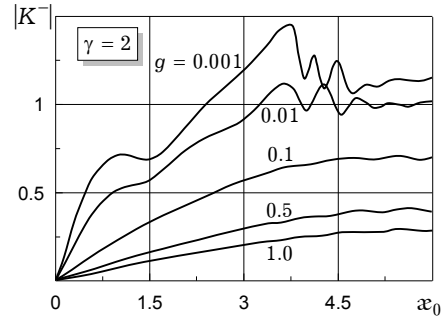


Рис. 4

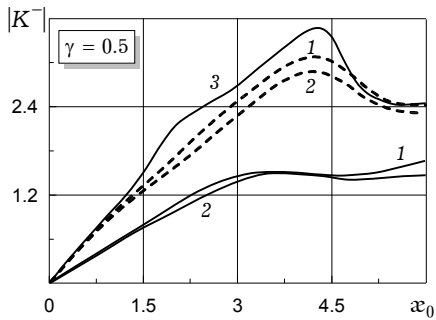


Рис. 5

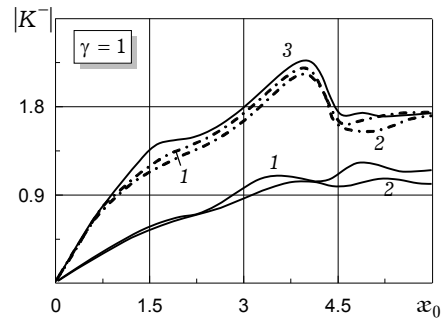


Рис. 6

З метою з'ясування можливості розгляду включень великої жорсткості як абсолютно жорстких були проведені розрахунки КІН для деяких реальних матеріалів матриці та включення. Отримані при цьому результати можна бачити на рис. 5-7, які відповідають наведеним вище відношенням γ розмірів включення. Суцільні криві показують зміну КІН в залежності від хвильового числа при врахуванні пружності включення, а пунктирні – за припущення, що включення є абсолютно жорстким. Вважали, що матеріалом включення є сталь, а матриця складена з таких матеріалів: крива 1 – бетон ($g = 0.078$, $\bar{\rho} = 0.305$); крива 2 – свинець ($g = 0.073$, $\bar{\rho} = 1.44$); крива 3 – гума ($g = 0.000038$, $\bar{\rho} = 0.118$).

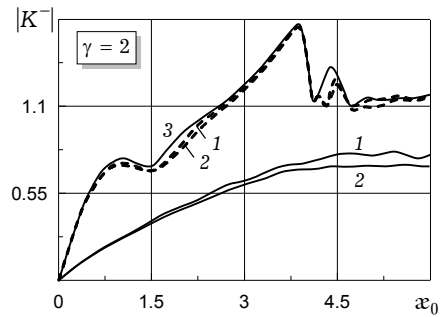


Рис. 7

Порівняння суцільних і пунктирних кривих 1 і 2 показує, що при врахуванні пружності включення отримані значення КІН є значно меншими, навіть у випадку досить жорстких включень. Що стосується матриці з гуми, то обидві криві 3 співпадають, тобто у цьому випадку включення можна вважати абсолютно жорстким.

Наведені на рис. 2–7 результати дозволяють оцінити вплив на значення КІН також і відношення геометричних розмірів включення. Можна бачити, що сильніша концентрація напружень виникає для включень, у яких діаметр є більшим ніж висота.

Взагалі чисельний аналіз напруженого стану дозволяє зробити висновок, що у випадку крутильних коливань при збільшенні жорсткості включення зростає і концентрація напружень навколо нього. Пружність включення приводить до значного зменшення значення КІН порівняно з включенням абсолютно жорстким навіть у випадку досить жорстких включень. При збільшенні жорсткості включення значення КІН прямують до значень, відповідних абсолютно жорсткому, але збігання спостерігається при відношенні модулів зсуву g порядку 10^{-3} , що не реалізується для багатьох реальних матеріалів.

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – Москва: Наука, 1985. – 253 с.
2. Литвин О. В., Попов В. Г. Взаимодействие упругих волн с тонким упругим включением без изгибной жесткости // Вестн. Одес. нац. ун-та. Физ.-мат. науки. – 2000. – 5, вып. 3. – С. 116–121.
3. Перцев А. К., Платонов Э. Г. Динамика оболочек и пластин. – Ленинград: Судостроение, 1987. – 316 с.
4. Попов В. Г. Взаимодействие гармонической волны кручения с тонким жёстким цилиндрическим включением // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 2004. – № 5. – С. 75–81.
5. Попов Г. Я., Морозов Ю. А., Вайсфельд Н. Д. К решению динамических задач о концентрации упругих напряжений возле дефектов на цилиндрических поверхностях // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 1. – С. 28–36.
6. Поручиков В. Е. Методы динамической теории упругости. – Москва: Наука, 1986. – 328 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ВКЛЮЧЕНИЯ В ВИДЕ КОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВОЛНЫ КРУЧЕНИЯ

Решена задача об определении напряженного состояния в неограниченном теле возле включения в виде цилиндрической оболочки под действием осесимметричной волны кручения. Включение может быть как абсолютно жестким, так и упругим. Между ним и внешней средой на внешней и внутренней сторонах выполнены условия идеального сцепления. Метод решения основан на использовании разрывного решения уравнения крутильных колебаний и сведении граничной задачи к сингулярному интегральному уравнению относительно неизвестного скачка касательных напряжений.

ANALYSIS OF STRESS CONCENTRATION NEAR INCLUSION IN THE FORM OF FINITE CYLINDRICAL SHELL UNDER ACTION OF TORSIONAL WAVE

The problem about the definition of stress state in the unbounded body near inclusion in the form of a cylindrical shell under the action of an axisymmetric torsional wave is solved. The inclusion can be both absolutely stiff and elastic. The conditions of ideal cohesion between the inclusion and the external medium on the external and internal sides of the inclusion are satisfied. The method of solution is based on the use of the discontinuous solution of equation of torsional oscillations and reduction of the boundary-value problem to the singular integral equation concerning unknown jump of tangential stresses.

Одеська нац. морська акад., Одеса

Одержано
28.11.06