УДК 517.983.54

І. Є. Баранська

# ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

*Визначено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі знаходження невідомого старшого коефіцієнта, що залежить від часу, у двовимірному параболічному рівнянні в області з невідомою межею.*

Одним із підходів до дослідження задач з вільною межею [3] є зведення її до задач в області з фіксованими межами за допомогою заміни змінних. При цьому невідомі функції, які задають межі області, з'являються у коефіцієнтах рівняння. Тому таку задачу природно розглядати як обернену коефіцієнтну задачу та застосовувати до неї методику, розроблену для дослідження обернених задач [4]. Більше того, в задачі з вільною межею можна додатково ставити завдання відтворення невідомих коефіцієнтів рівняння. У випадку одновимірного рівняння теплопровідності такий підхід було реалізовано в [2]. У роботі [1] досліджувалася обернена задача в області з вільною межею для одновимірного рівняння параболічного типу.

Ця робота є продовженням досліджень обернених задач з вільними межами шляхом зведення їх до відповідних обернених задач. Розглядається обернена задача для двовимірного параболічного рівняння в області з невідомою межею. Для знаходження невідомої межі області та невідомого коефіцієнта рівняння задаються три додаткові умови у вигляді інтегральних.

В області $\Omega_T \equiv \{(x_1, x_2, t) : 0 < x_1 < l(t),\ 0 < x_2 < h(t),\ 0 < t < T < \infty\}$ з невідомими функціями $x_1 = l(t)$, $x_2 = h(t)$ розглянемо параболічне рівняння

$$u_t = a(t)\left(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\right) + b(x_1, x_2, t)u_{x_1} + c(x_1, x_2, t)u_{x_2} + \\ + d(x_1, x_2, t)u + f(x_1, x_2, t) \qquad (1)$$

в якому $a(t)$ − невідомий коефіцієнт. Задамо початкову умову

$$u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in [0, l_0] \times [0, h_0],\ l_0 \equiv l(0),\ h_0 \equiv h(0), \qquad (2)$$

крайові умови

$$u(0, x_2, t) = \mu_1(x_2, t), \quad u(l(t), x_2, t) = \mu_2(x_2, t), \quad x_2 \in [0, h(t)], \quad t \in [0, T],$$

$$u(x_1, 0, t) = \mu_3(x_1, t), \quad u(x_1, h(t), t) = \mu_4(x_1, t), \quad x_1 \in [0, l(t)], \quad t \in [0, T], \qquad (3)$$

та умови перевизначення

$$\int_0^{l(t)} \int_0^{h(t)} u(x_1, x_2, t)\, dx_2\, dx_1 = \mu_5(t), \qquad t \in [0, T], \qquad (4)$$

$$\int_0^{l(t)} \int_0^{h(t)} x_2 u(x_1, x_2, t)\, dx_2\, dx_1 = \mu_6(t), \qquad t \in [0, T], \qquad (5)$$

$$a(t)\, u_{x_1}(0, x_0, t) = \mu_7(t), \qquad t \in [0, T], \qquad (6)$$

де $x_0$ − деяка фіксована точка з $(0, h(t))$.

Заміною $y_1 = \dfrac{x_1}{l(t)}$, $y_2 = \dfrac{x_2}{h(t)}$, $t = t$ зведемо задачу (1)−(6) до оберненої задачі стосовно невідомих $a(t)$, $l(t)$, $h(t)$, $v(y_1, y_2, t) \equiv u(y_1 l(t), y_2 h(t), t)$ в області з відомими межами $Q_T \equiv \{(y_1, y_2, t) : 0 < y_1 < 1,\ 0 < y_2 < 1,\ 0 < t < T\}$:

$$v_t = a(t)\left(\frac{1}{l^2(t)} v_{y_1y_1} + \frac{1}{h^2(t)} v_{y_2y_2}\right) + \frac{b(y_1 l(t), y_2 h(t), t) + y_1 l'(t)}{l(t)} v_{y_1} +$$

**ISSN 0130−9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007. − 50, № 2. − С. 17-28.** 

$$+\frac{c(y_1 l(t), y_2 h(t), t) + y_2 h'(t)}{h(t)} v_{y_2} + d\,(y_1 l(t), y_2 h(t), t)\, v +$$

$$+ f(y_1 l(t), y_2 h(t), t), \qquad (y_1, y_2, t) \in Q_T, \tag{7}$$

$$v(y_1, y_2, 0) = \varphi(y_1 l_0, y_2 h_0), \qquad y_i \in [0,1], \qquad i = 1, 2, \tag{8}$$

$$v(0, y_2, t) = \mu_1(y_2 h(t), t), \quad v(1, y_2, t) = \mu_2(y_2 h(t), t), \quad y_2 \in [0,1], \quad t \in [0,T],$$

$$v(y_1, 0, t) = \mu_3(y_1 l(t), t), \quad v(y_1, 1, t) = \mu_4(y_1 l(t), t), \quad y_1 \in [0,1], \quad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$l(t)h(t)\int_0^1\int_0^1 v(y_1, y_2, t)\, dy_2\, dy_1 = \mu_5(t), \qquad t \in [0,T], \tag{10}$$

$$l(t)h^2(t)\int_0^1\int_0^1 y_2 v(y_1, y_2, t)\, dy_2\, dy_1 = \mu_6(t), \qquad t \in [0,T], \tag{11}$$

$$\frac{a(t)}{l(t)} v_{y_1}\left(0, x_0 h^{-1}(t), t\right) = \mu_7(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{12}$$

**Означення.** Функції $(a, l, h, v) \in C[0,T] \times (C^1[0,T])^2 \times C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, $a(t) > 0$, $l(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$, які задовольняють умови (7)–(12), назвемо розв'язком задачі (7)–(12).

Зауважимо, запис $v \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ означає, що функція $v$ є двічі неперервно диференційовною за просторовими змінними та неперервно диференційовною за часовою змінною в області $\bar{Q}_T$.

**Теорема існування.** *Нехай виконуються умови*:

(***i***) $\varphi \in C([0,+\infty) \times [0,+\infty))$, $\mu_i \in C([0,+\infty) \times [0,T])$, $i = 1, \ldots, 4$,
$f \in C([0,+\infty) \times [0,+\infty) \times [0,T])$;

(***ii***) $0 < \varphi_0 \le \varphi(x_1, x_2) \le \varphi_1 < \infty$, $(x_1, x_2) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty)$,
$\mu_i(t) > 0$, $i = 5, 6, 7$, $t \in [0,T]$,
$0 < \mu_{i0} \le \mu_i(x_2, t) \le \mu_{i1} < \infty$, $i = 1, 2$, $(x_2, t) \in [0,+\infty) \times [0,T]$,
$0 < \mu_{k0} \le \mu_k(x_1, t) \le \mu_{k1} < \infty$, $k = 3, 4$, $(x_1, t) \in [0,+\infty) \times [0,T]$,
$d(x_1, x_2, t) \le 0$, $(x_1, x_2, t) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty) \times [0,T]$,
$0 \le f(x_1, x_2, t) \le f_1 < \infty$, $(x_1, x_2, t) \in [0,+\infty) \times [0,+\infty) \times [0,T]$,
$\mu_{kx_1}(x_1, t) > 0$, $(x_1, t) \in [0, L_2] \times [0,T]$, $k = 3, 4$,
$\varphi_{x_1}(x_1, x_2) > 0$, $(x_1, x_2) \in [0, l_0] \times [0, h_0]$, $0 < x_0 < H_1$,

*де* $l_0, h_0, H_1$ *– відомі сталі, про які буде сказано нижче*;

(***iii***) $\varphi \in C^2([0, l_0] \times [0, h_0])$, $\mu_m \in C^1[0,T]$, $m = 5, 6$, $\mu_7 \in C[0,T]$,
$\mu_i \in C^{2,1}([0, H_2] \times [0,T])$, $i = 1, 2$, $\mu_k \in C^{2,1}([0, L_2] \times [0,T])$, $k = 3, 4$,
$f \in C^{1,0}([0, L_2] \times [0, H_2] \times [0,T])$,

*де* $H_2$, $L_2$ *– деякі додатні сталі, значення яких буде вказано нижче*;

(***iiii***) *умови узгодження нульового та першого порядків.*

*Тоді можна вказати таке число* $t_0$, $0 < t_0 \le T$, *що розв'язок задачі* (7)–(12) *існує при* $0 \le y_i \le 1$, $i = 1, 2$, $0 \le t \le t_0$.

Д о в е д е н н я. З умов (2), (4), (5) отримаємо систему рівнянь стосовно невідомих $l_0, h_0$:

$$\int_0^{l_0}\int_0^{h_0} \varphi(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 = \mu_5(0), \qquad \int_0^{l_0}\int_0^{h_0} x_2 \varphi(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 = \mu_6(0). \tag{13}$$

Позначивши $\int\limits_0^{l_0} \varphi(x_1, x_2) dx_1 \equiv \psi(l_0, x_2)$, систему (13) запишемо у вигляді

$$\int\limits_0^{h_0} \psi(l_0, x_2)\, dx_2 = \mu_5(0), \qquad \int\limits_0^{h_0} x_2 \psi(l_0, x_2)\, dx_2 = \mu_6(0).$$

З припущень теореми отримаємо, що $\varphi_0 l_0 \le \psi(l_0, x_2) = \int\limits_0^{l_0} \varphi(x_1, x_2)\, dx_1 \le \varphi_1 l_0$.

Тоді $\varphi_0 l_0 h_0 \le \int\limits_0^{h_0} \psi(l_0, x_2)\, dx_2 \le \varphi_1 l_0 h_0$. Функція $y = \int\limits_0^{h_0} \psi(l_0, x_2)\, dx_2$ при довільному фіксованому $l_0 > 0$ є монотонно зростаючою стосовно $h_0$. Отже, з умов теореми випливає, що існує єдине значення $h_0(l_0)$, яке є розв'язком рівняння $\int\limits_0^{h_0(l_0)} \psi(l_0, x_2)\, dx_2 = \mu_5(0)$ і $\frac{\mu_5(0)}{\varphi_1 l_0} \le h_0(l_0) \le \frac{\mu_5(0)}{\varphi_0 l_0}$. Тоді

$$\frac{\varphi_0 \mu_5^2(0)}{2\varphi_1^2 l_0} \le \varphi_0 l_0 \frac{h_0^2(l_0)}{2} \le \int\limits_0^{h_0(l_0)} x_2 \psi(l_0, x_2)\, dx_2 \le \varphi_1 l_0 \frac{h_0^2(l_0)}{2} \le \frac{\varphi_1 \mu_5^2(0)}{2\varphi_0^2 l_0}.$$

Функція $y = \int\limits_0^{h_0(l_0)} x_2 \psi(l_0, x_2)\, dx_2$ – монотонно спадна функція від змінної $l_0$, яка перетне пряму $y = \mu_6(0)$ лише в одній точці. Отже, існує єдине значення $l_0$, $h_0$, яке є розв'язком системи (13).

З припущень теореми за принципом максимуму для розв'язку задачі (7)–(9) справджується оцінка

$$0 < M_0 \le v(y_1, y_2, t) \le M_1 < \infty, \qquad (y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_T, \tag{14}$$

де $M_0$, $M_1$ – відомі величини, які визначаються через вихідні дані.

З умов (10) та (11) отримаємо

$$h(t) = \frac{\mu_6(t) \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 v(y_1, y_2, t)\, dy_2\, dy_1}{\mu_5(t) \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 y_2 v(y_1, y_2, t)\, dy_2\, dy_1}, \qquad t \in [0, T], \tag{15}$$

$$l(t) = \frac{\mu_5^2(t) \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 y_2 v(y_1, y_2, t)\, dy_2\, dy_1}{\mu_6(t) \left( \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 v(y_1, y_2, t)\, dy_2\, dy_1 \right)^2}, \qquad t \in [0, T]. \tag{16}$$

Тоді, враховуючи (14), правильні такі оцінки:

$$0 < H_1 \le h(t) \le H_2 < \infty, \qquad 0 < L_1 \le l(t) \le L_2 < \infty. \tag{17}$$

Задача (7)–(9) еквівалентна рівнянню

$$\begin{aligned} v(y_1, y_2, t) &= v_0(y_1, y_2, t) + \\ &+ \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G_{11}(y_1, y_2, t, \xi_1, \xi_2, \tau) \left( \frac{b(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau) + \xi_1 l'(\tau)}{l(\tau)} v_{\xi_1}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \right. \\ &+ \frac{c(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau) + \xi_2 h'(\tau)}{h(\tau)} v_{\xi_2}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \\ &+ \left. d(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau) v(\xi_1, \xi_2, \tau) \right) d\xi_1\, d\xi_2\, d\tau, \qquad (y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_T, \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$v_0(y_1,y_2,t)=\int_0^1\int_0^1 G_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\varphi(\xi_1 l(0),\xi_2 h(0))\,d\xi_1\,d\xi_2+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{11\xi_1}(y_1,y_2,t,0,\xi_2,\tau)\,\frac{a(\tau)}{l^2(\tau)}\,\mu_1(\xi_2 h(\tau),\tau)\,d\xi_2\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{11\xi_1}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\,\frac{a(\tau)}{l^2(\tau)}\,\mu_2(\xi_2 h(\tau),\tau)\,d\xi_2\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{11\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\,\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,\mu_3(\xi_1 l(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{11\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\,\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,\mu_4(\xi_1 l(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)f(\xi_1 l(\tau),\xi_2 h(\tau),\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau\,, \qquad (19)$$

$$G_{k\ell}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)=$$

$$=\frac{1}{4\pi\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(y_1-\xi_1+2n)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(y_1+\xi_1+2n)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\right)\right)\left(\exp\left(-\frac{(y_2-\xi_2+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^\ell\exp\left(-\frac{(y_2+\xi_2+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\right), \qquad k,\ell=1,2,$$

$$\theta_1(t)=\int_0^t\frac{a(\sigma)}{l^2(\sigma)}\,d\sigma, \qquad \theta_2(t)=\int_0^t\frac{a(\sigma)}{h^2(\sigma)}\,d\sigma.$$

Зазначимо, що $G_{11}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)$ − функція Ґріна рівняння

$$v_t=a(t)\left(\frac{1}{l^2(t)}v_{y_1y_1}+\frac{1}{h^2(t)}v_{y_2y_2}\right)+f(y_1l(t),y_2h(t),t), \quad (y_1,y_2,t)\in Q_T\,, \qquad (20)$$

з крайовими умовами (9), а $v_0(y_1,y_2,t)$ є розв'язком задачі (20), (8), (9). З (18), враховуючи властивості функції Ґріна

$$-G_\tau=\frac{a(\tau)}{l^2(\tau)}G_{\xi_1\xi_1}+\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}G_{\xi_2\xi_2}, \qquad G_{11\xi_iy_1}=-G_{21\xi_i\xi_1}, \qquad i=1,2,$$

знайдемо $v_{y_1}(y_1,y_2,t)$:

$$v_{y_1}(y_1,y_2,t)=v_{0y_1}(y_1,y_2,t)+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{11y_1}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau)\left(\frac{b(\xi_1l(\tau),\xi_2h(\tau),\tau)+\xi_1l'(\tau)}{l(\tau)}v_{\xi_1}(\xi_1,\xi_2,\tau)+\right.$$

$$+\frac{c(\xi_1l(\tau),\xi_2h(\tau),\tau)+\xi_2h'(\tau)}{h(\tau)}v_{\xi_2}(\xi_1,\xi_2,\tau)+$$

$$\left.+d(\xi_1l(\tau),\xi_2h(\tau),\tau)v(\xi_1,\xi_2,\tau)\right)d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau, \quad (y_1,y_2,t)\in\bar{Q}_T\,, \qquad (21)$$

де

$$v_{0y_1}(y_1,y_2,t)=l_0\int_0^1\int_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\varphi_\eta(\eta,\xi_2h_0)\Big|_{\eta=\xi_1l_0}\,d\xi_1\,d\xi_2-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,0,\xi_2,\tau)\left[\xi_2h'(\tau)\,\mu_{1\eta}(\eta,\tau)-a(\tau)\mu_{1\eta\eta}(\eta,\tau)+\right.$$

$$+ \mu_{1\tau}(\eta,\tau)]\Big|_{\eta=\xi_2 h(\tau)} d\xi_2\, d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,1,\xi_2,\tau)\big[\xi_2 h'(\tau)\mu_{2\eta}(\eta,\tau) -$$

$$- a(\tau)\mu_{2\eta\eta}(\eta,\tau) + \mu_{2\tau}(\eta,\tau)]\Big|_{\eta=\xi_2 h(\tau)} d\xi_2\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} l(\tau)\,\mu_{3\eta}(\eta,\tau)\Big|_{\eta=\xi_1 l(\tau)} d\xi_1\, d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} l(\tau)\,\mu_{4\eta}(\eta,\tau)\Big|_{\eta=\xi_1 l(\tau)} d\xi_1\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G_{11y_1}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,\tau) f(\xi_1 l(\tau),\xi_2 h(\tau),\tau)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\tau\,. \qquad (22)$$

Оцінимо в (22) суму таких доданків:

$$l_0 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\,\varphi_\eta(\eta,\xi_2 h_0)\Big|_{\eta=\xi_1 l_0} d\xi_1\, d\xi_2 +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} l(\tau)\,\mu_{3\eta}(\eta,\tau)\Big|_{\eta=\xi_1 l(\tau)} d\xi_1\, d\tau -$$

$$- \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} l(\tau)\,\mu_{4\eta}(\eta,\tau)\Big|_{\eta=\xi_1 l(\tau)} d\xi_1\, d\tau \ge$$

$$\ge l_0 \min_{(x_1,x_2)\in[0,l_0]\times[0,h_0]} \varphi_{x_1}(x_1,x_2) \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\, d\xi_1\, d\xi_2 +$$

$$+ \min_{(x_1,t)\in[0,L_2]\times[0,T]} l(t)\mu_{3x_1}(x_1,t) \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\, d\xi_1\, d\tau +$$

$$+ \min_{(x_1,t)\in[0,L_2]\times[0,T]} l(t)\mu_{4x_1}(x_1,t)\left( - \int\limits_0^t \int\limits_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\, d\xi_1\, d\tau \right) \ge$$

$$\ge \min\left\{ \min_{(x_1,x_2)\in[0,l_0]\times[0,h_0]} \varphi_{x_1}(x_1,x_2),\ \min_{(x_1,t)\in[0,L_2]\times[0,T]} l(t)\mu_{3x_1}(x_1,t),\right.$$

$$\left. \min_{(x_1,t)\in[0,L_2]\times[0,T]} l(t)\mu_{4x_1}(x_1,t) \right\} \left( \int\limits_0^1 G_1(y_2,t,\xi_2,0)\, d\xi_2 +\right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t G_{1\xi_2}(y_2,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\, d\tau - \int\limits_0^t G_{1\xi_2}(y_2,t,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\, d\tau \right),$$

де

$$G_1(y,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left( \exp\left( -\frac{(y-\xi+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))} \right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left( -\frac{(y+\xi+2m)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))} \right) \right)$$

– функція Ґріна рівняння

$$v_t = a(t)\frac{1}{h^2(t)} v_{yy}, \qquad 0 < y < 1, \qquad 0 < t < T\,, \qquad (23)$$

з крайовими умовами першого роду.

Розглянувши допоміжну задачу для рівняння (23) з умовами $v(y,0)=1$, $y\in[0,1]$, $v(0,t)=1$, $v(1,t)=1$, $t\in[0,T]$, легко переконатися, що

$$\int\limits_0^1 G_1(y_2,t,\xi_2,0)\, d\xi_2 + \int\limits_0^t G_{1\xi_2}(y_2,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\, d\tau - \int\limits_0^t G_{1\xi_2}(y_2,t,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\, d\tau \equiv 1\,.$$

Отже,

$$l_0\int_0^1\int_0^1 G_{21}(y_1,y_2,t,\xi_1,\xi_2,0)\,\varphi_\eta(\eta,\xi_2 h_0)\big|_{\eta=\xi_1 l_0}\,d\xi_1\,d\xi_2 +$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,0,\tau)\,\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,l(\tau)\,\mu_{3\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_1 l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau -$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{21\xi_2}(y_1,y_2,t,\xi_1,1,\tau)\,\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,l(\tau)\,\mu_{4\eta}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\xi_1 l(\tau)}\,d\xi_1\,d\tau \ge M_2 > 0\,.$$

Решта доданків у (21), (22) при $t=0$ дорівнюють нулеві. Тому існує деяке число $t_1 : 0 < t_1 \le T$, при якому виконується оцінка

$$v_{y_1}(y_1,y_2,t) \ge \frac{1}{2}M_2\,, \qquad (y_1,y_2,t)\in \bar{Q}_{t_1}\,. \tag{24}$$

З (12), враховуючи умови теореми та оцінки (17), (24), отримаємо оцінку зверху для $a(t)$:

$$0 < a(t) \le A_1, \qquad t\in[0,t_1]\,. \tag{25}$$

Продиференціюємо (10) та (11) за $t$. Використовуючи рівняння (7), рівності (10) та (11), отримаємо

$$\begin{aligned}
&l'(t)\,l(t)\,h^2(t)\int_0^1 \mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2 + h'(t)\,h(t)\,l^2(t)\int_0^1 \mu_4(y_1l(t),t)\,dy_1 = \\
&= \mu_5'(t)\,l(t)\,h(t) - a(t)\,h^2(t)\int_0^1 \left[v_{y_1}(1,y_2,t) - v_{y_1}(0,y_2,t)\right]dy_2 - \\
&- a(t)\,l^2(t)\int_0^1 \left[v_{y_2}(y_1,1,t) - v_{y_2}(y_1,0,t)\right]dy_1 - \\
&- l(t)h^2(t)\int_0^1 \left[b(l(t),y_2h(t),t)\mu_2(y_2h(t),t) - b(0,y_2h(t),t)\mu_1(y_2h(t),t)\right]dy_2 - \\
&- h(t)l^2(t)\int_0^1 \left[c(y_1l(t),h(t),t)\mu_4(y_1l(t),t) - c(y_1l(t),0,t)\mu_3(y_1l(t),t)\right]dy_1 + \\
&+ l^2(t)\,h^2(t)\int_0^1\int_0^1 \Big(b_\eta(\eta,y_2h(t),t)\big|_{\eta=y_1l(t)} + c_\eta(y_1l(t),\eta,t)\big|_{\eta=y_2h(t)} - \\
&- d\,(y_1l(t),y_2h(t),t)\Big)v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2 - \\
&- l^2(t)\,h^2(t)\int_0^1\int_0^1 f(y_1l(t),y_2h(t),t)\,dy_1\,dy_2\,,
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
&l'(t)\,l(t)\,h^2(t)\int_0^1 (1-y_2)\mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2 = \mu_5'(t)\,l(t)\,h(t) - \mu_6'(t)\,l(t) - \\
&- a(t)\,h^2(t)\int_0^1 (1-y_2)\left[v_{y_1}(1,y_2,t) - v_{y_1}(0,y_2,t)\right]dy_2 + \\
&+ a(t)\,l^2(t)\int_0^1 \left[v_{y_2}(y_1,0,t) - \mu_4(y_1l(t),t) + \mu_3(y_1l(t),t)\right]dy_1 + \\
&+ h(t)\,l^2(t)\int_0^1 c\,(y_1l(t),0,t)\mu_3(y_1l(t),t)\,dy_1 + \\
&+ h(t)\,l^2(t)\int_0^1\int_0^1 c\,(y_1l(t),y_2h(t),t)v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2 -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- l(t)\,h^2(t)\int_0^1 (1-y_2)\big[b\,(l(t),y_2h(t),t)\mu_2(y_2h(t),t) - \\
&- b\,(0,y_2h(t),t)\mu_1(y_2h(t),t)\big]\,dy_2 + \\
&+ l^2(t)\,h^2(t)\int_0^1\int_0^1 (1-y_2)\Big(b_\eta(\eta,y_2h(t),t)\big|_{\eta=y_1l(t)} + c_\eta(y_1l(t),\eta,t)\big|_{\eta=y_2h(t)} - \\
&- d(y_1l(t),y_2h(t),t)\Big)v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2 - \\
&- l^2(t)\,h^2(t)\int_0^1\int_0^1 (1-y_2)f(y_1l(t),y_2h(t),t)\,dy_1\,dy_2. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Отже, задачу (7)–(12) зведено до системи рівнянь (15), (16), де $t \in [0,t_1]$, та

$$
a(t) = \frac{\mu_7(t)l(t)}{w_1(0,x_0h^{-1}(t),t)}, \qquad t \in [0,t_1], \qquad (28)
$$

$$
\begin{aligned}
&p\,(t)\,l(t)\,h^2(t)\int_0^1 \mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2 + g(t)\,h(t)\,l^2(t)\int_0^1 \mu_4(y_1l(t),t)\,dy_1 = \\
&= \mu_5'(t)l(t)\,h(t) - a(t)\,h^2(t)\int_0^1 \big[w_1(1,y_2,t) - w_1(0,y_2,t)\big]\,dy_2 - \\
&- a(t)\,l^2(t)\int_0^1 \big[w_2(y_1,1,t) - w_2(y_1,0,t)\big]\,dy_1 - \\
&- l(t)\,h^2(t)\int_0^1 \big[b\,(l(t),y_2h(t),t)\mu_2(y_2h(t),t) - \\
&- b\,(0,y_2h(t),t)\mu_1(y_2h(t),t)\big]\,dy_2 - h(t)l^2(t)\int_0^1 \big[c(y_1l(t),h(t),t)\mu_4(y_1l(t),t) - \\
&- c\,(y_1l(t),0,t)\mu_3(y_1l(t),t)\big]\,dy_1 + l^2(t)h^2(t)\int_0^1\int_0^1 \Big(b_\eta(\eta,y_2h(t),t)\big|_{\eta=y_1l(t)} + \\
&+ c_\eta(y_1l(t),\eta,t)\big|_{\eta=y_2h(t)} - d\,(y_1l(t),y_2h(t),t)\Big)v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2 - \\
&- l^2(t)\,h^2(t)\int_0^1\int_0^1 f(y_1l(t),y_2h(t),t)\,dy_1\,dy_2, \qquad t \in [0,t_1], \qquad (29)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p\,(t)\,l(t)\,h^2(t)\int_0^1 (1-y_2)\mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2 = \mu_5'(t)\,l(t)\,h(t) - \mu_6'(t)\,l(t) - \\
&- a(t)\,h^2(t)\int_0^1 (1-y_2)\big[w_1(1,y_2,t) - w_1(0,y_2,t)\big]\,dy_2 + \\
&+ a(t)\,l^2(t)\int_0^1 \big[w_2(y_1,0,t) - \mu_4(y_1l(t),t) + \mu_3(y_1l(t),t)\big]\,dy_1 + \\
&+ h(t)\,l^2(t)\int_0^1 c(y_1l(t),0,t)\,\mu_3(y_1l(t),t)\,dy_1 + \\
&+ h(t)\,l^2(t)\int_0^1\int_0^1 c(y_1l(t),y_2h(t),t)\,v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2 - \\
&- l(t)\,h^2(t)\int_0^1 (1-y_2)\big[b\,(l(t),y_2h(t),t)\mu_2(y_2h(t),t) -
\end{aligned}
$$

$$- b(0, y_2 h(t), t)\mu_1(y_2 h(t), t)\big] dy_2 +$$

$$+ l^2(t)h^2(t)\int_0^1\int_0^1 (1-y_2)\Big(b_\eta(\eta, y_2 h(t), t)\big|_{\eta=y_1 l(t)} + c_\eta(y_1 l(t), \eta, t)\big|_{\eta=y_2 h(t)} -$$

$$- d(y_1 l(t), y_2 h(t), t)\Big) v(y_1, y_2, t)\, dy_1\, dy_2 -$$

$$- l^2(t)h^2(t)\int_0^1\int_0^1 (1-y_2) f(y_1 l(t), y_2 h(t), t)\, dy_1\, dy_2, \quad t \in [0, t_1], \tag{30}$$

$$v(y_1, y_2, t) = v_0(y_1, y_2, t) +$$

$$+ \int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{11}(y_1, y_2, t, \xi_1, \xi_2, \tau)\bigg(\frac{b(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau) + \xi_1 p(\tau)}{l(\tau)} w_1(\xi_1, \xi_2, \tau) +$$

$$+ \frac{c(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau) + \xi_2 g(\tau)}{h(\tau)} w_2(\xi_1, \xi_2, \tau) +$$

$$+ d(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau) v(\xi_1, \xi_2, \tau)\bigg) d\xi_1\, d\xi_2\, d\tau, \quad (y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_{t_1}, \tag{31}$$

$$w_i(y_1, y_2, t) = v_{0\,y_i}(y_1, y_2, t) +$$

$$+ \int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{11 y_i}(y_1, y_2, t, \xi_1, \xi_2, \tau)\bigg(\frac{b(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau) + \xi_1 p(\tau)}{l(\tau)} w_1(\xi_1, \xi_2, \tau) +$$

$$+ \frac{c(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau) + \xi_2 g(\tau)}{h(\tau)} w_2(\xi_1, \xi_2, \tau) +$$

$$+ d(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau) v(\xi_1, \xi_2, \tau)\bigg) d\xi_1\, d\xi_2\, d\tau, \qquad i = 1, 2,$$

$$(y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_{t_1}, \tag{32}$$

де $p(t) \equiv l'(t)$; $g(t) \equiv h'(t)$; $w_i(y_1, y_2, t) \equiv v_{y_i}(y_1, y_2, t)$, $i = 1, 2$; $v_{0y_1}$ задано формулою (22), а $v_{0y_2}$ має вигляд

$$v_{0y_2}(y_1, y_2, t) = h_0\int_0^1\int_0^1 G_{12}(y_1, y_2, t, \xi_1, \xi_2, 0)\, \varphi_\eta(\xi_1 l_0, \eta)\big|_{\eta=\xi_2 h_0} d\xi_1\, d\xi_2 -$$

$$- \int_0^t\int_0^1 G_{12}(y_1, y_2, t, \xi_1, 0, \tau)\big[\xi_1 l'(\tau)\, \mu_{3\eta}(\eta, \tau) -$$

$$- a(\tau)\, \mu_{3\eta\eta}(\eta, \tau) + \mu_{3\tau}(\eta, \tau)\big]\big|_{\eta=\xi_1 l(\tau)} d\xi_1\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t\int_0^1 G_{12}(y_1, y_2, t, \xi_1, 1, \tau)\big[\xi_1 l'(\tau)\, \mu_{4\eta}(\eta, \tau) -$$

$$- a(\tau)\, \mu_{4\eta\eta}(\eta, \tau) + \mu_{4\tau}(\eta, \tau)\big]\big|_{\eta=\xi_1 l(\tau)} d\xi_1\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t\int_0^1 G_{12\xi_1}(y_1, y_2, t, 0, \xi_2, \tau)\, \frac{a(\tau)}{l^2(\tau)}\, h(\tau)\, \mu_{1\eta}(\eta, \tau)\big|_{\eta=\xi_2 h(\tau)} d\xi_2\, d\tau -$$

$$- \int_0^t\int_0^1 G_{12\xi_1}(y_1, y_2, t, 1, \xi_2, \tau)\, \frac{a(\tau)}{l^2(\tau)}\, h(\tau)\, \mu_{2\eta}(\eta, \tau)\big|_{\eta=\xi_2 h(\tau)} d\xi_2\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t\int_0^1\int_0^1 G_{11 y_2}(y_1, y_2, t, \xi_1, \xi_2, \tau)\, f(\xi_1 l(\tau), \xi_2 h(\tau), \tau)\, d\xi_1\, d\xi_2\, d\tau. \tag{33}$$

Отже, якщо функції $(a, l, h, v) \in C[0,t_1] \times (C^1[0,t_1])^2 \times C^{2,1}(\bar{Q}_{t_1})$, $a(t) > 0$, $l(t) > 0$, $h(t) > 0$, $t \in [0,t_1]$, є розв'язком задачі (7)–(12), то функції $(a, l, h, p, g, v, w_i,\ i = 1,2) \in (C[0,t_1])^5 \times (C(\bar{Q}_{t_1}))^3$, $a(t) > 0$, $l(t) > 0$, $h(t) > 0$, є розв'язком системи (15), (16), (28)–(32). Покажемо, що справджується й обернене твердження, тобто, якщо функції $(a, l, h, p, g, v, w_i,\ i = 1,2)$, $a(t) > 0$, $l(t) > 0$, $h(t) > 0$, з класу $(C[0,t_1])^5 \times (C(\bar{Q}_{t_1}))^3$ є розв'язком системи (15), (16), (28)–(32), то функції $(a, l, h, v)$, $a(t) > 0$, $l(t) > 0$, $h(t) > 0$, належать до класу $C[0,t_1] \times (C^1[0,t_1])^2 \times C^{2,1}(\bar{Q}_{t_1})$ і є розв'язком задачі (7)–(12). Оскільки функція $v_0(y_1, y_2, t)$ є розв'язком задачі (20), (8), (9), то з умов теореми випливає, що $v_0 \in C^{2,1}(\bar{Q}_{t_1})$. Продиференціювавши (31) за $y_i$, $i = 1,2$, отримаємо, що $v_{y_i} \equiv w_i$, $i = 1,2$. З рівності (31) випливає, що $v \in C^{2,1}(\bar{Q}_{t_1})$ є розв'язком рівняння

$$\begin{aligned} v_t &= a(t)\left(\frac{1}{l^2(t)} v_{y_1 y_1} + \frac{1}{h^2(t)} v_{y_2 y_2}\right) + \frac{b(y_1 l(t), y_2 h(t), t) + y_1 p(t)}{l(t)} v_{y_1} + \\ &\quad + \frac{c(y_1 l(t), y_2 h(t), t) + y_2 g(t)}{h(t)} v_{y_2} + \\ &\quad + d(y_1 l(t), y_2 h(t), t)\, v + f(y_1 l(t), y_2 h(t), t) \end{aligned} \tag{34}$$

і задовольняє умови (8), (9). Виконання умов (10), (11) випливає з (15) і (16). Продиференціюємо (15), (16) і врахуємо, що $v(y_1, y_2, t)$ є розв'язком рівняння (34). Провівши спрощення, отримаємо

$$\begin{aligned} p(t)\, l(t)\, h^2(t) \int_0^1 (1 - y_2) \mu_2(y_2 h(t), t)\, dy_2 &= \mu_5'(t)\, l(t)\, h(t) - \mu_6'(t)\, l(t) - \\ &- a(t)\, h^2(t) \int_0^1 (1 - y_2)\left[w_1(1, y_2, t) - w_1(0, y_2, t)\right] dy_2 + \\ &+ a(t)\, l^2(t) \int_0^1 \left[w_2(y_1, 0, t) - \mu_4(y_1 l(t), t) + \mu_3(y_1 l(t), t)\right] dy_1 + \\ &+ h(t)\, l^2(t) \int_0^1 c(y_1 l(t), 0, t) \mu_3(y_1 l(t), t)\, dy_1 + \\ &+ h(t)\, l^2(t) \int_0^1 \int_0^1 c(y_1 l(t), y_2 h(t), t) v(y_1, y_2, t)\, dy_1\, dy_2 - \\ &- l(t)\, h^2(t) \int_0^1 (1 - y_2)\left[b(l(t), y_2 h(t), t)\, \mu_2(y_2 h(t), t) - \right. \\ &\left. - b(0, y_2 h(t), t) \mu_1(y_2 h(t), t)\right] dy_2 + \\ &+ l^2(t)\, h^2(t) \int_0^1 \int_0^1 (1 - y_2)\Big( b_\eta(\eta, y_2 h(t), t)\big|_{\eta = y_1 l(t)} + \\ &+ c_\eta(y_1 l(t), \eta, t)\big|_{\eta = y_2 h(t)} - d(y_1 l(t), y_2 h(t), t)\Big) v(y_1, y_2, t)\, dy_1\, dy_2 - \\ &- l^2(t)\, h^2(t) \int_0^1 \int_0^1 (1 - y_2) f(y_1 l(t), y_2 h(t), t)\, dy_1\, dy_2 + \\ &+ \left[(g(t) - h'(t))\, l(t) + (p(t) - l'(t))\, h(t)\right] \mu_5(t) - \\ &- \left((g(t) - h'(t)) \frac{2l(t)}{h(t)} + (p(t) - l'(t))\right) \mu_6(t), \end{aligned}$$

$$p(t)\,l(t)\,h^2(t)\int_0^1 \mu_2(y_2h(t),t)\,dy_2 + g(t)\,h(t)\,l^2(t)\int_0^1 \mu_4(y_1l(t),t)\,dy_1 =$$

$$= \mu_5'(t)\,l(t)\,h(t) - a(t)\,h^2(t)\int_0^1 \left[w_1(1,y_2,t) - w_1(0,y_2,t)\right]dy_2 -$$

$$- a(t)\,l^2(t)\int_0^1 \left[w_2(y_1,1,t) - w_2(y_1,0,t)\right]dy_1 -$$

$$- l(t)\,h^2(t)\int_0^1 \left[b(l(t),y_2h(t),t)\,\mu_2(y_2h(t),t) -\right.$$

$$\left.- b(0,y_2h(t),t)\,\mu_1(y_2h(t),t)\right]dy_2 -$$

$$- h(t)\,l^2(t)\int_0^1 \left[c\,(y_1l(t),h(t),t)\,\mu_4(y_1l(t),t) -\right.$$

$$\left.- c\,(y_1l(t),0,t)\mu_3(y_1l(t),t)\right]dy_1 +$$

$$+ l^2(t)\,h^2(t)\int_0^1\int_0^1 \Big(b_\eta(\eta,y_2h(t),t)\Big|_{\eta=y_1l(t)} + c_\eta(y_1l(t),\eta,t)\Big|_{\eta=y_2h(t)} -$$

$$- d(y_1l(t),y_2h(t),t)\Big)v(y_1,y_2,t)\,dy_1\,dy_2 -$$

$$- l^2(t)\,h^2(t)\int_0^1\int_0^1 f(y_1l(t),y_2h(t),t)\,dy_1\,dy_2 + \left(p\,(t) - l'(t)\right)h(t)\mu_5(t) +$$

$$+ \left(g(t) - h'(t)\right)l(t)\mu_5(t)\,.$$

Віднявши від цих рівностей (29), (30), отримаємо однорідну систему рівнянь:

$$\left(g(t) - h'(t)\right)\left(l(t)\mu_5(t) - \frac{2l(t)}{h(t)}\mu_6(t)\right) + \left(p\,(t) - l'(t)\right)\left(h(t)\mu_5(t) - \mu_6(t)\right) = 0\,,$$

$$\left(g(t) - h'(t)\right)l(t)\mu_5(t) + \left(p(t) - l'(t)\right)h(t)\mu_5(t) = 0\,.$$

Визначник цієї системи $\Delta = l(t)\mu_5(t)\mu_6(t) \ne 0$. Отже, $p\,(t) \equiv l'(t)$, $g(t) \equiv h'(t)$. З рівності (28) випливає виконання умови (12). Еквівалентність задачі (7)–(12) і системи рівнянь (15), (16), (28)–(32) встановлено.

Застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, доведемо існування розв'язку системи рівнянь (15), (16), (28)–(32). Встановимо оцінки невідомих $w_i(y_1,y_2,t)$, $i = 1,2$, $a(t)$, $p(t)$, $g(t)$. Введемо позначення

$$W(t) \equiv \max_{0\le y_i\le 1,\ i=1,2}\left|w_1(y_1,y_2,t)\right| + \max_{0\le y_i\le 1,\ i=1,2}\left|w_2(y_1,y_2,t)\right|.$$

З (32) отримаємо

$$W(t) \le C_1 + C_2\int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} + \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\right)d\tau +$$

$$+ C_3\int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} + \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\right)\left(1+|p(\tau)|+|g(\tau)|\right)W(\tau)\,d\tau\,. \quad (35)$$

З (29) та (30) випливає

$$|p(t)| \le C_4 + C_5 a(t)\,W(t)\,, \quad (36)$$

$$|g(t)| \le C_6 + C_7 a(t)\,W(t)\,. \quad (37)$$

Отже, ввівши позначення $W_*(t) \equiv 1 + W(t)$ та врахувавши нерівності (36), (37), оцінки (17) для $l(t)$, $h(t)$, нерівність (35) запишемо у вигляді

$$W_*(t) \le C_8 + C_9 \int_0^t \frac{a(\tau)\, W_*^2(\tau) d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}},$$

де $\theta(t) = \int_0^t a(\sigma)\, d\sigma$. Міркуваннями, аналогічними до наведених в [1] при доведенні теореми існування розв'язку оберненої задачі в області з вільною межею для одновимірного рівняння параболічного типу, отримаємо при вужчому проміжку часу $[0, t_2]$ наступну оцінку:

$$|w_i(y_1, y_2, t)| \le W_*(t) \le M_3 < \infty, \qquad i = 1,2, \qquad (y_1, y_2, t) \in \bar{Q}_{t_2}. \tag{38}$$

Тоді з (28) справджується оцінка для $a(t)$ знизу, а з (36), (37) маємо оцінки для $p(t)$ та $g(t)$:

$$a(t) \ge A_2 > 0, \qquad |p(t)| \le P_1, \qquad |g(t)| \le P_2, \qquad t \in [0, t_2]. \tag{39}$$

Систему рівнянь (15), (16), (28)–(32) подамо у вигляді рівняння $\nu = F\nu$, де $\nu = \big(a(t), l(t), h(t), p(t), g(t), v(y_1, y_2, t), w_i(y_1, y_2, t),\ i = 1,2\big)$, а оператор $F$ визначається рівняннями (15), (16), (28)–(32). Означимо множину

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \equiv \Big\{ &\big(a(t), l(t), h(t), p(t), g(t), v(y_1, y_2, t), w_i(y_1, y_2, t),\ i = 1,2\big) \in \\ &\in (C[0, t_0])^5 \times (C(\bar{Q}_{t_0}))^3 :\ A_2 \le a(t) \le A_1,\ L_1 \le l(t) \le L_2, \\ &H_1 \le h(t) \le H_2,\ |p(t)| \le P_1,\ |g(t)| \le P_2,\ M_0 \le v(y_1, y_2, t) \le M_1, \\ &\frac{1}{2} M_2 \le w_1(y_1, y_2, t) \le M_3,\ |w_2(y_1, y_2, t)| \le M_3 \Big\}, \end{aligned}$$

де $t_0 = \min\{t_1, t_2\}$. З оцінок (14), (17), (25), (38), (39) випливає, що оператор $F$ відображає множину $\mathcal{N}$ в себе. Те, що оператор $F$ є цілком неперервним, доведено в [4]. За теоремою Шаудера розв'язок системи рівнянь (15), (16), (28)–(32) існує, а отже, існує і розв'язок задачі (7)–(12). ◊

**Теорема єдиності.** *Нехай виконуються умови*:

(***i***) $f \in C^{1,0}([0, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, T])$, $\quad \mu_{itx_2} \in C([0, +\infty) \times [0, T])$, $i = 1,2$,

$\mu_{ktx_1} \in C([0, +\infty) \times [0, T])$, $k = 3,4$;

(***ii***) $0 < \varphi_0 \le \varphi(x_1, x_2) \le \varphi_1 < \infty$, $(x_1, x_2) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$,

$\mu_i(t) > 0, \quad t \in [0, T],\ i = 5,6$,

$\mu_{kx_1}(x_1, t) > 0, \qquad (x_1, t) \in [0, +\infty) \times [0, T], \quad k = 3,4$,

$\varphi_{x_1}(x_1, x_2) > 0, \qquad (x_1, x_2) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$,

$\mu_2(x_2, t) \ne 0, \qquad (x_2, t) \in [0, +\infty) \times [0, T]$,

$\mu_4(x_1, t) \ne 0, \qquad (x_1, t) \in [0, +\infty) \times [0, T]$.

*Тоді розв'язок задачі* (7)–(12) *єдиний.*

Д о в е д е н н я єдиності розв'язку задачі (7)–(12) проводимо за схемою доведення теореми єдиності розв'язку оберненої задачі в області з вільною межею для одновимірного рівняння параболічного типу [1]. Припускаємо, що існує два розв'язки задачі. Тоді записуємо задачу відносно різниць цих розв'язків, яку зводимо до системи інтегральних рівнянь Вольтера другого роду. Внаслідок єдиності розв'язку таких систем одержуємо єдиність розв'язку задачі (7)–(12). ◊

1. *Баранська І. Є.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 2. – С. 32–42.
2. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.
3. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
4. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / Math. Studies: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – Vol. 10. – 238 p.

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ДВУХМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ**

*Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи определения неизвестного старшего коэффициента, зависящего от времени, в двухмерном параболическом уравнении в области со свободной границей.*

**INVERSE PROBLEM IN DOMAIN WITH FREE BOUNDARY FOR TWO-DIMENSIONAL PARABOLIC-TYPE EQUATION**

*We establish the conditions for existence and uniqueness of solution to the inverse problem for the two-dimensional parabolic-type equation with unknown time-dependent leading coefficient in a domain with free boundary.*

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
21.06.06