

**ЗГИН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З ТРІЩИНОЮ
НА ПРЯМОЛІНІЙНІЙ МЕЖІ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ
З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ**

Досліджено двосторонній згин кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням контакту її берегів. Із використанням теорії функцій комплексної змінної і комплексних потенціалів сформульовану задачу зведено до задач лінійного спряження, на основі яких знайдено явний вигляд для комплексних потенціалів. Проведено числовий аналіз контактного тиску між берегами тріщин і напружень на межі поділу матеріалів.

У машинобудуванні та інших галузях техніки широко використовують пластинчасті елементи, що зумовлено їх порівняною легкістю і міцністю. Їх дієздатність та експлуатаційні характеристики залежать від тріщиноподібних дефектів, які різко знижують діапазон допустимого навантаження. Тому важливо знати, як такі дефекти впливають на напружено-деформований стан і міцність тонкостінних конструкцій.

Значний інтерес представляє вивчення згину пластинчастих елементів конструкції з тріщинами. Вперше задачу про згин пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною розглянув М. L. Williams [16], використовуючи класичну теорію і вважаючи, що береги тріщини не контактують. Постановки задач такого типу для пластини з тріщинами та методи їх розв'язування наведено, наприклад, у роботах [8, 11]. У роботі [14] побудовано розв'язок задачі про згин пластини з наскрізною тріщиною з урахуванням контакту її берегів по всій її довжині на верхній або нижній основі пластини з використанням теорії Кірхгофа – Лява. У роботі [7] досліджувалась задача про згин пластини з використанням теорії Рейснера. Огляд робіт з цього напрямку наведено в праці [8]. У роботах [5, 6] розглянуто згин кусково-однорідної пластини з тріщиною в одній із складових за різного її розміщення відносно лінії поділу матеріалів з урахуванням контакту берегів дефекту.

Теоретичною основою розрахунку на міцність пластинчастих структур, складених з різних елементів, є розв'язок задачі про напружено-деформований стан з'єднаних півплощин з різними пружними властивостями з міжфазними дефектами. Вона є ідеалізацією зварного з'єднання двох різних металічних тіл з тріщинами вздовж зварного шва, які появляються у процесі зварювання або експлуатації. Задачі теорії пружності для структур з міжфазними дефектами, береги яких не контактують, розглядалися у багатьох працях і їх систематизовано в довідниках [12, 13]. Плоскі контактні задачі для міжфазних тріщин за дії силових і термічних навантажень розв'язано в працях [1, 2, 4, 9, 15]. Вплив контакту берегів міжфазних тріщин у кусково-однорідних пластинах за згину в літературі не вивчався.

Побудова ефективних моделей та отримання на їх основі розв'язків задач про згин пластини з урахуванням явища закриття тріщини дає змогу уточнити умови поширення тріщини та руйнування пластинчастих конструкційних елементів.

Постановка задачі. Дослідимо згин кусково-однорідної ізотропної пластини сталої товщини $2h$ з прямолінійною межею поділу матеріалів. Вважимо, що на межі поділу розміщена математична тріщина завдовжки 2ℓ , береги якої вступають у гладкий контакт на одній з основ пластини під дією рівномірно розподілених моментів на нескінченності (рис. 1).

Виберемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з початком у центрі тріщини, направивши вісь Ox по межі поділу матеріалів так, щоб координат-

на площина Oxy співпадала з середньою поверхнею пластини. Лінію осі Ox , де розміщена тріщина, позначимо через L , а через L' – межу поділу матеріалів поза тріщиною, де відбувається їх ідеальний контакт. Півплощину, для якої $y > 0$ ($y < 0$), позначимо через S_2 (S_1). Пружним сталим матеріалів півплощини S_j будемо приписувати індекс j , $j=1,2$. Граничним значенням відповідних величин при прямуванні y до осі Ox із області S_2 і S_1 відповідно будемо приписувати індекси «+» і «-». Згинальні моменти на нескінченності позначаємо через M_{x1}^∞ і M_{x2}^∞ , M_y^∞ (рис. 1).

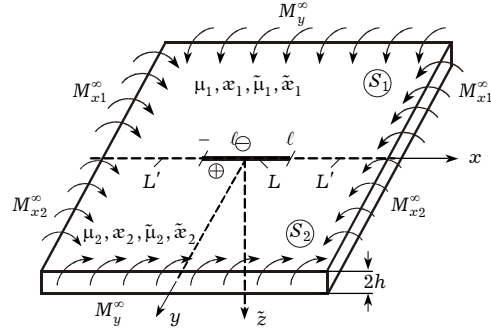


Рис. 1

Оскільки береги тріщини контактують, то в пластині, крім згинальних моментів, виникають мембранні зусилля [14]. Тому розв'язок задачі подамо у вигляді розв'язків двох задач: задачі про узагальнений плоский напружений стан і задачі про згин пластини (теорія Кірхгофа – Лява), за таких крайових умов:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^\pm &= \sigma_{yy} = -\frac{N}{2h}, & \sigma_{xy}^\pm &= 0, & M_y^\pm &= M_y, & x \in L, \\ M_y &= hN, & \partial_x [V] &= -h [\partial_{xy}^2 W], & x \in L, \\ [\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}] &= 0, & [\partial_x (U + iV)] &= 0, & x \in L', \\ \left[M_y + i \left(H_{xy} + \int_{-\infty}^x N_y dx \right) \right] &= 0, & [(\partial_{xx}^2 W + i \partial_{xy}^2 W)] &= 0, & x \in L'. \end{aligned}$$

Тут N – контактне зусилля між берегами тріщини; σ_{yy}, σ_{xy} – компоненти тензора напружень; U, V – проєкції вектора переміщення точки в плоскій задачі на осі Ox і Oy відповідно; W – прогин пластини; M_y і H_{xy} – відповідно згинальний і крутний моменти; N_y – перерізувальна сила; $P = N_y + \partial_x H_{xy}$ – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; $[f] = f^+ - f^-$.

Побудова розв'язку задачі. Введемо комплексні потенціали $\Phi_P^{(j)}(z)$, $\Psi_P^{(j)}(z)$ для плоскої задачі та $\Phi_3^{(j)}(z)$, $\Psi_3^{(j)}(z)$ – для згину пластини. Аналітично продовжимо $\Phi_P^{(j)}(z)$ і $\Phi_3^{(j)}(z)$ із області S_j в область S_{3-j} за формулою [3, 10]

$$\Phi(z) = -\bar{\Phi}(z) - z\bar{\Phi}'(z) - \bar{\Psi}(z), \quad \bar{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})},$$

де відповідні індекси опущено.

Напружено-деформований стан пластини визначаємо на основі співвідношень [3, 10]

$$\sigma_{yy}^{(j)} - i\sigma_{xy}^{(j)} = \Phi_P^{(j)}(z) - \Phi_P^{(j)}(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_P^{(j)'}}(z), \quad (1)$$

$$2\mu_j \frac{\partial}{\partial x} (U + iV) = \alpha_j \Phi_P^{(j)}(z) + \Phi_P^{(j)}(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_P^{(j)'}}(z), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \Phi_3^{(j)}(z) - \Phi_3^{(j)}(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_3^{(j)'}}(z), \quad (3)$$

$$2\tilde{\mu}_j \left(M_y + i \left(H_{xy} + \int_{-\infty}^x N_y dx \right) + ic_j \right) = \tilde{\alpha}_j \Phi_3^{(j)}(z) + \Phi_3^{(j)}(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_3^{(j)'}}(z). \quad (4)$$

Тут $z = x + iy$; $i = \sqrt{-1}$; $\mu_j = \frac{E_j}{2(1 + \nu_j)}$, $\tilde{\mu}_j = -\frac{1}{2D_j(1 - \nu_j)}$; $D_j = \frac{2E_j h^3}{3(1 - \nu_j^2)}$;

$\alpha_j = \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j}$, $\tilde{\alpha}_j = \frac{3 + \nu_j}{1 - \nu_j}$; E_j – модуль Юнга; ν_j – коефіцієнт Пуассона;

c_j – дійсна стала.

Для згину пластини комплексні потенціали подамо так:

$$\Phi_3^{(j)}(z) = \tilde{\Phi}_3^{(j)}(z) + \begin{cases} \Gamma_j, & z \in S_j, \\ -\Gamma_j - \bar{\Gamma}_j, & z \in S_{3-j}, \end{cases} \quad (5)$$

де

$$\Gamma_j = -\frac{M_{xy}^\infty + M_y^\infty}{4D_j(1 + \nu_j)}, \quad \Gamma'_j = \frac{M_y^\infty - M_{xy}^\infty}{2D_j(1 - \nu_j)}, \quad \tilde{\Phi}_3^{(j)}(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Введемо нові функції:

$$\begin{aligned} \theta_\Pi(z) &= \Phi_P^{(2)}(z) + \Phi_P^{(1)}(z), \\ \Phi_\Pi(z) &= \frac{\alpha_j}{2\mu_j} \Phi_P^{(j)}(z) - \frac{1}{2\mu_{3-j}} \Phi_P^{(3-j)}(z), \quad z \in S_j, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \theta_3(z) &= h (\tilde{\Phi}_3^{(2)}(z) + \tilde{\Phi}_3^{(1)}(z)), \\ \Phi_3(z) &= \frac{\tilde{\alpha}_j}{2\tilde{\mu}_j} \tilde{\Phi}_3^{(j)}(z) - \frac{1}{2\tilde{\mu}_{3-j}} \tilde{\Phi}_3^{(3-j)}(z), \quad z \in S_j. \end{aligned} \quad (8)$$

З крайової умови

$$\sigma_{yy}^+ - i\sigma_{xy}^+ = \sigma_{yy}^- - i\sigma_{xy}^-, \quad x \in L + L',$$

враховуючи позначення (7), отримаємо задачу лінійного спряження

$$\theta_\Pi^+(x) - \theta_\Pi^-(x) = 0, \quad x \in L + L',$$

розв'язком якої є

$$\theta_\Pi(z) = 0. \quad (9)$$

З крайової умови

$$M_y^+ + i \left(\int_{-\infty}^x P dx \right)^+ = M_y^- + i \left(\int_{-\infty}^x P dx \right)^-, \quad x \in L + L',$$

беручи до уваги співвідношення (4) і позначення (5), (8), отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi_3^+(x) + ic_1 + \frac{\tilde{\alpha}_2}{2\tilde{\mu}_2} \Gamma_2 - \frac{1}{2\tilde{\mu}_1} (-\Gamma_1 - \Gamma'_1) = \\ = \Phi_3^+(x) + ic_2 + \frac{\tilde{\alpha}_1}{2\tilde{\mu}_1} \Gamma_1 - \frac{1}{2\tilde{\mu}_2} (-\Gamma_2 - \Gamma'_2). \end{aligned} \quad (10)$$

Враховуючи поведінку функцій $\Phi_3(x)$ на нескінченності та позначення (6), з (10) отримаємо, що $c_1 = c_2 = c$, а також задачу лінійного спряження

$$\Phi_3^+(x) - \Phi_3^-(x) = 0, \quad x \in L + L',$$

розв'язком якої є

$$\Phi_3(z) = 0. \quad (11)$$

Беручи до уваги (11) і (9) і позначення (7) і (8), комплексні потенціали $\Phi_{\text{P}}^{(j)}(z)$ і $\tilde{\Phi}_3^{(j)}(z)$ подамо так:

$$\Phi_{\text{P}}^{(j)}(z) = \begin{cases} \frac{2}{A_j} \mu_1 \mu_2 \Phi_{\text{II}}(z), & z \in S_j, \\ -\frac{2}{A_{3-j}} \mu_1 \mu_2 \Phi_{\text{II}}(z), & z \in S_{3-j}, \end{cases}$$

$$\tilde{\Phi}_3^{(j)}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{A}_j h} \tilde{\mu}_j \theta_3(z), & z \in S_j, \\ \frac{1}{\tilde{A}_{3-j} h} \tilde{\alpha}_{3-j} \tilde{\mu}_j \theta_3(z), & z \in S_{3-j}. \end{cases} \quad (12)$$

Тут $A_j = x_j \mu_{3-j} + \mu_j$, $\tilde{A}_j = \tilde{\alpha}_j \tilde{\mu}_{3-j} + \tilde{\mu}_j$, $j = 1, 2$.

З крайової умови

$$\partial_x [\partial_x W + i \partial_y W] = 0, \quad x \in L',$$

використовуючи співвідношення (3) і формулу (6), запишемо

$$\tilde{\Phi}_3^{2+}(x) + \tilde{\Phi}_3^{1+}(x) + 2\Gamma_2 + \bar{\Gamma}'_2 = \tilde{\Phi}_3^{1-}(x) + \tilde{\Phi}_3^{2-}(x) + 2\Gamma_1 + \bar{\Gamma}'_1, \quad x \in L'. \quad (13)$$

Оскільки функція $\tilde{\Phi}_3(x)$ при великих x зникає, то повинна виконуватись рівність

$$-M_{x_1}^\infty E_1^{-1} = -M_{x_2}^\infty E_2^{-1} + M_y^\infty (-v_1 E_1^{-1} + v_2 E_2^{-1}).$$

Якщо врахувати рівності (8), то з (13) одержимо

$$\theta_3^+(x) - \theta_3^-(x) = 0, \quad x \in L'.$$

Використавши крайову умову

$$\sigma_{yy}^+ + \sigma_{yy}^- = 2\sigma_{yy} = -\frac{1}{h} N, \quad x \in L,$$

та співвідношення (1) і (12), після перетворень матимемо

$$\Phi_{\text{II}}^+(x) - g\Phi_{\text{II}}^-(x) = -N\tilde{q}, \quad x \in L, \quad (14)$$

де $\tilde{q} = \frac{1}{4\mu_1\mu_2 h} A_2$, $g = -\frac{A_2}{A_1}$.

Відокремивши дійсну та уявну частини в (14), одержимо

$$\text{Re}(\Phi_{\text{II}}^+(x) - g\Phi_{\text{II}}^-(x)) = -N\tilde{q}, \quad x \in L, \quad (15)$$

$$\Phi_{\text{II}}^+(x) - \overline{\Phi_{\text{II}}^+(x)} = g\left(\Phi_{\text{II}}^-(x) - \overline{\Phi_{\text{II}}^-(x)}\right), \quad x \in L. \quad (16)$$

На основі співвідношення (2), враховуючи (7) і (16), запишемо

$$\Phi_{\text{II}}^-(x) - \overline{\Phi_{\text{II}}^-(x)} = w(x), \quad x \in L,$$

$$\Phi_{\text{II}}^+(x) - \overline{\Phi_{\text{II}}^+(x)} = gw(x), \quad x \in L, \quad (17)$$

$$w(x) = \frac{2i}{g-1} \cdot \frac{\partial[V]}{\partial x}.$$

Додавши та віднявши співвідношення (17), отримаємо

$$[\partial_x V] = \alpha \left\{ (\Phi_{\text{II}}(x) - \bar{\Phi}_{\text{II}}(x))^+ + (\Phi_{\text{II}}(x) - \bar{\Phi}_{\text{II}}(x))^- \right\}, \quad x \in L, \quad (18)$$

$$[\partial_x V] = \beta \left\{ (\Phi_{\text{II}}(x) + \bar{\Phi}_{\text{II}}(x))^+ - (\Phi_{\text{II}}(x) + \bar{\Phi}_{\text{II}}(x))^- \right\}, \quad x \in L, \quad (19)$$

тут $\alpha = \frac{g-1}{g+1} \cdot \frac{1}{2i}$, $\beta = \frac{1}{2i}$.

На підставі (4) можемо записати

$$2\tilde{\mu}_2(M_y + ic) = \tilde{x}_2\Phi_3^{(2)+}(x) + \Phi_3^{(2)-}(x), \quad x \in L.$$

Якщо тепер врахувати (5), (6) і (12), то одержимо

$$2(M_y + ic) = \frac{\tilde{x}_2}{h\tilde{A}_2}(\theta_3^+(x) - \tilde{g}\theta_3^-(x)) + 2M_y^\infty, \quad x \in L, \quad (20)$$

$$\tilde{g} = -\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2} \frac{\tilde{A}_2}{\tilde{A}_1}.$$

Взявши дійсну та уявну частини в (20), матимемо

$$M_y = \frac{\tilde{x}_2}{4h\tilde{A}_2} \left\{ \Phi_3^+(x) + \overline{\Phi_3^+(x)} - \tilde{g} \left(\Phi_3^-(x) + \overline{\Phi_3^-(x)} \right) \right\} + M_y^\infty, \quad x \in L, \quad (21)$$

$$\theta_3^+(x) - \overline{\theta_3^+(x)} - \tilde{g} \left(\theta_3^-(x) - \overline{\theta_3^-(x)} \right) = 2iQ, \quad x \in L, \quad (22)$$

$$Q = \frac{2c\tilde{A}_2h}{\tilde{x}_2}.$$

На основі співвідношення (3) з урахуванням (22) запишемо

$$[\partial_{xy}^2 W] = \tilde{\alpha} \left\{ -\frac{4iQ}{1-\tilde{g}} + (\theta_3(x) - \overline{\theta_3(x)})^+ + (\theta_3(x) - \overline{\theta_3(x)})^- \right\}, \quad x \in L, \quad (23)$$

$$[\partial_{xy}^2 W] = \tilde{\beta} \{ (\theta_3(x) + \overline{\theta_3(x)})^+ - (\theta_3(x) + \overline{\theta_3(x)})^- \}, \quad x \in L, \quad (24)$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{g} - 1}{2ih(1 + \tilde{g})}, \quad \tilde{\beta} = \frac{1}{2hi}.$$

З крайової умови

$$[\partial_x V] = -h[\partial_{xy}^2 W], \quad x \in L,$$

врахувавши (18), (19), (23), (24), отримаємо такі задачі лінійного спряження:

$$\begin{aligned} & [\alpha(\Phi_{\Pi}(x) - \overline{\Phi_{\Pi}(x)}) + h\tilde{\alpha}(\theta_3(x) - \overline{\theta_3(x)}) - \tilde{P}]^+ + \\ & \quad + [\alpha(\Phi_{\Pi}(x) - \overline{\Phi_{\Pi}(x)}) + h\tilde{\alpha}(\theta_3(x) - \overline{\theta_3(x)}) - \tilde{P}]^- = 0, \quad x \in L, \\ & [\beta(\Phi_{\Pi}(x) + \overline{\Phi_{\Pi}(x)}) + h\tilde{\beta}(\theta_3(x) + \overline{\theta_3(x)})]^+ - \\ & \quad - [\beta(\Phi_{\Pi}(x) + \overline{\Phi_{\Pi}(x)}) + h\tilde{\beta}(\theta_3(x) + \overline{\theta_3(x)})]^- = 0, \quad x \in L. \end{aligned} \quad (25)$$

Тут $\tilde{P} = \frac{2iQ\tilde{\alpha}h}{1-\tilde{g}}$.

Якщо врахувати поведінку відповідних функцій на нескінченності, то розв'язки крайових задач (25) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha(\Phi_{\Pi}(z) - \overline{\Phi_{\Pi}(z)}) + h\tilde{\alpha}(\theta_3(z) - \overline{\theta_3(z)}) &= \tilde{P} - \tilde{P}z(z^2 - \ell^2)^{-1/2} = \rho(z), \\ \beta(\Phi_{\Pi}(z) + \overline{\Phi_{\Pi}(z)}) + h\tilde{\beta}(\theta_3(z) + \overline{\theta_3(z)}) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Розв'язавши систему рівнянь (26) відносно функцій $\overline{\Phi_{\Pi}(z)}$ і $\overline{\theta_3(z)}$, одержимо

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_{\Pi}(z)} &= a_{11}\Phi_{\Pi}(z) + a_{12}\theta_3(z) + a_{13}\rho(z), \\ \overline{\theta_3(z)} &= a_{21}\Phi_{\Pi}(z) + a_{22}\theta_3(z) + a_{23}\rho(z), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \text{де } a_{11} &= \frac{g\tilde{g} - 1}{g - \tilde{g}}, & a_{12} &= \frac{(g+1)(\tilde{g}-1)}{g - \tilde{g}}, & a_{13} &= -\frac{i(g+1)(\tilde{g}+1)}{g - \tilde{g}}, \\ a_{21} &= -\frac{(g-1)(\tilde{g}+1)}{(g-\tilde{g})}, & a_{22} &= -\frac{g\tilde{g} - 1}{g - \tilde{g}}, & a_{23} &= \frac{i(\tilde{g}+1)(g+1)}{(g-\tilde{g})}. \end{aligned}$$

З крайової умови

$$M_y = hN,$$

враховуючи (15) і (21), можемо записати

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{\alpha}_2}{4\tilde{A}_2 h} \{ \theta_3^+(x) + \bar{\theta}_3^-(x) - \tilde{g}(\theta_3^-(x) + \bar{\theta}_3^+(x)) \} + M_y^\infty = \\ & = -\frac{2h^2 \mu_1 \mu_2}{A_2} \{ \Phi_\Pi^+(x) + \bar{\Phi}_\Pi^-(x) - g(\Phi_\Pi^-(x) + \bar{\Phi}_\Pi^+(x)) \}. \end{aligned} \quad (28)$$

Додавши (16) до (22), отримаємо

$$\begin{aligned} & \Phi_\Pi^+(x) - \bar{\Phi}_\Pi^-(x) - g(\Phi_\Pi^-(x) - \bar{\Phi}_\Pi^+(x)) + \\ & + \theta_3^+(x) - \bar{\theta}_3^-(x) - \tilde{g}(\theta_3^-(x) - \bar{\theta}_3^+(x)) = 2iQ. \end{aligned} \quad (29)$$

Підставляючи (27) у (28) і (29), одержимо

$$\begin{aligned} & \beta_{11}\Phi_\Pi^+(x) + \beta_{12}\Phi_\Pi^-(x) + \beta_{13}\theta_3^+(x) + \beta_{14}\theta_3^-(x) = f_1(x), \quad x \in L, \\ & \beta_{21}\Phi_\Pi^+(x) + \beta_{22}\Phi_\Pi^-(x) + \beta_{23}\theta_3^+(x) + \beta_{24}\theta_3^-(x) = f_2(x), \quad x \in L, \end{aligned} \quad (30)$$

де $\beta_{11} = -\tilde{g}a_{21} + m^* - m^*ga_{11}$, $\beta_{12} = a_{21} + m^*a_{11} - m^*g$,

$\beta_{13} = 1 - \tilde{g}a_{22} - m^*ga_{12}$, $\beta_{14} = a_{22} - \tilde{g} + m^*a_{12}$, $\beta_{21} = 1 + ga_{11} + \tilde{g}a_{21}$,

$\beta_{22} = -a_{11} - g - a_{21}$, $\beta_{23} = ga_{12} + 1 + a_{22}\tilde{g}$, $\beta_{24} = -a_{12} - a_{22} - \tilde{g}$,

$f_1(x) = -\frac{4h\tilde{A}_2}{\tilde{\alpha}_2} M_y^\infty - a_{23}\rho^-(x) + \tilde{g}a_{23}\rho^+(x) - m^*a_{13}\rho^-(x) + m^*ga_{13}\rho^+(x)$,

$f_2(x) = 2iQ + a_{13}\rho^-(x) - ga_{13}\rho^+(x) + a_{23}\rho^-(x) - \tilde{g}a_{23}\rho^+(x)$, $m^* = \frac{8h^3\tilde{A}_2\mu_1\mu_2}{\tilde{\alpha}_2 A_2}$.

На основі (30) отримуємо такі задачі лінійного спряження:

$$[\Phi_\Pi(x) + a_j\theta_3(x)]^+ - g_j[\Phi_\Pi(x) + a_j\theta_3(x)]^- = q_j(x), \quad j = 1, 2, \quad x \in L. \quad (31)$$

Тут $a_j = \frac{\delta_j\beta_{13} + \beta_{23}}{\beta_{21} + \delta_j\beta_{11}}$, $g_j = -\frac{\beta_{22} + \delta_j\beta_{12}}{\beta_{21} + \delta_j\beta_{11}}$, $q_j(x) = \frac{f_2(x) + \delta_j f_1(x)}{\beta_{21} + \delta_j\beta_{11}}$,

$$\delta_{1,2} = (-1)^{j+1} \sqrt{\frac{\beta_{21}\beta_{24} - \beta_{23}\beta_{22}}{\beta_{13}\beta_{12} - \beta_{14}\beta_{11}}}.$$

Розв'язавши задачі лінійного спряження (31), отримаємо

$$\Phi_\Pi(z) + a_j\theta_3(z) = \frac{X_j(z)}{2\pi i} \int_L \frac{q_j(x)}{X_j^+(x)(x-z)} dx, \quad (32)$$

де $X_j(z) = \frac{(z-\ell)^{\gamma_j-1}}{(z+\ell)^{\gamma_j}}$; $\gamma_j = \frac{\ln g_j}{2\pi i} = \frac{\ln |g_j|}{2\pi i} + \frac{\theta_j}{2\pi}$; θ_j - аргумент числа g_j ;

$$\begin{aligned} q_j(x) = d_{1j} + \frac{d_{2j}x}{\sqrt{x^2 - \ell^2}}; \quad d_{1j} = & \left\{ [2iQ + (a_{13}(1-g) + a_{23}(1-\tilde{g}))P] + \right. \\ & \left. + \delta_j \left[-\frac{4h\tilde{A}_2}{\tilde{\alpha}_2} M_y^\infty + \left((\tilde{g}-1)a_{23} + \frac{8h^3\tilde{A}_2\mu_1\mu_2}{\tilde{\alpha}_2 A_2} a_{13}(g-1) \right) P \right] \right\} \frac{1}{\beta_{21} + \delta_j\beta_{11}}; \end{aligned}$$

$$d_{2j} = \left[a_{13}(1+g) + a_{23}(1+\tilde{g}) + \delta_j \left((1+\tilde{g})a_{23} + \frac{8h^3\tilde{A}_2\mu_1\mu_2}{\tilde{\alpha}_2 A_2} a_{13}(1+g) \right) \right] \frac{P}{\beta_{21} + \delta_j\beta_{11}}.$$

Після обчислення інтегралів у правій частині (32) можемо записати

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{II}}(z) &= \tilde{q}_3(a_2 X_1(z) I_1 - a_1 X_2(z) I_2), \\ \theta_3(z) &= -\tilde{q}_3(X_1(z) I_1 - X_2(z) I_2).\end{aligned}\quad (33)$$

Тут

$$\begin{aligned}\tilde{q}_3 &= -\frac{1}{2\pi i(a_1 - a_2)}, \\ I_j(z) &= \frac{2\pi i}{1 - g_j} \left\{ d_{1j} \left(\frac{1}{X_j(z)} - z - (2\gamma_j - 1)\ell \right) + \right. \\ &\quad \left. + d_{2j} \frac{1 - g_j}{1 + g_j} \left(\frac{z}{X_j(z)\sqrt{z^2 - \ell^2}} - z - (2\gamma_j - 1)\ell \right) \right\}.\end{aligned}$$

З умови однозначності прогину при обході контуру тріщини

$$\operatorname{Re} \int_{-\ell}^{\ell} x (\theta_3^+(x) - \theta_3^-(x)) dx = 0$$

отримаємо, що $c = 0$. Тому $d_{1j} = -\frac{4h\tilde{A}_2\delta_j}{\tilde{x}_2} \frac{M_y^\infty}{\beta_{21} + \delta_j\beta_{11}}$, $d_{2j} = 0$.

Тепер співвідношення (33) можна записати так:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{II}}(z) &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \tilde{d}_{1j} a_{3-j} (1 - zX_j(z) - (2\gamma_j - 1)\ell X_j(z)), \\ \theta_3(z) &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \tilde{d}_{1j} (1 - zX_j(z) - (2\gamma_j - 1)\ell X_j(z)), \\ \tilde{d}_{1j} &= \frac{d_{1j}}{(a_1 - a_2)(1 - g_j)}.\end{aligned}$$

Контактний тиск між берегами тріщини знайдемо за формулою

$$N = \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \tilde{d}_{1j} a_{3-j} \left[(1 - r_j(x)) - g \left(1 - r_j(x) \frac{1}{g_j} \right) \right],$$

де

$$r_j(x) = e^{-b_j\pi} (\ell^2 - x^2)^{1/2} \left[x \sin \left(b_j \ln \left(\frac{\ell - x}{\ell + x} \right) \right) - 2b_j\ell \cos \left(b_j \ln \left(\frac{\ell - x}{\ell + x} \right) \right) \right].$$

Розподіл напружень в околі вершин тріщини для плоскої задачі матиме вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{(k)} &= \sqrt{\frac{\ell}{2r}} \sum_{j=1}^2 \left\{ K_1^j \left(\frac{1}{A_k} e^{-\theta b_j} [-\cos(\gamma_j^*) - \sin(\theta) \sin(\gamma_j^* - \theta) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2b_j \sin(\theta) \cos(\gamma_j^* - \theta) \right] - \frac{1}{A_{3-k}} e^{\theta b_1} \cos(\alpha_j) \right) - K_2^j \left(\frac{1}{A_k} e^{-\theta b_j} [\sin(\gamma_j^*) - \right. \\ &\quad \left. - \sin(\theta) \cos(\gamma_j^* - \theta) - 2b_j \sin(\theta) \sin(\gamma_j^* - \theta)] + \frac{1}{A_{3-k}} e^{\theta b_j} \sin(\alpha_j) \right) \left. \right\}, \\ \sigma_{xx}^{(k)} &= \sqrt{\frac{\ell}{2r}} \sum_{j=1}^2 \left\{ K_1^j \left(\frac{1}{A_k} e^{-\theta b_j} [-3\cos(\gamma_j^*) + \sin(\theta) \sin(\gamma_j^* - \theta) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2b_j \sin(\theta) \cos(\gamma_j^* - \theta) \right] + \frac{1}{A_{3-k}} e^{\theta b_1} \cos(\alpha_j) \right) - K_2^j \left(\frac{1}{A_k} e^{-\theta b_j} [3\sin(\gamma_j^*) + \right. \\ &\quad \left. + \sin(\theta) \cos(\gamma_j^* - \theta) + 2b_j \sin(\theta) \sin(\gamma_j^* - \theta) \right] - \frac{1}{A_{3-k}} e^{\theta b_j} \sin(\alpha_j) \right) \left. \right\},\end{aligned}$$

$$\sigma_{xy}^{(k)} = -\sqrt{\frac{\ell}{2r}} \sum_{j=1}^2 \left\{ K_1^j \left(\frac{1}{A_k} e^{-\theta b_j} [-\sin(\gamma_j^*) - \sin(\theta) \cos(\gamma_j^* - \theta) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2b_j \sin(\theta) \sin(\gamma_j^* - \theta)] - \frac{1}{A_{3-k}} e^{\theta b_1} \sin(\alpha_j) \right) - K_2^j \left(\frac{1}{A_k} e^{-\theta b_j} [-\cos(\gamma_j^*) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin(\theta) \cos(\gamma_j^* - \theta) - 2b_j \sin(\theta) \sin(\gamma_j^* - \theta)] - \frac{1}{A_{3-k}} e^{\theta b_j} \cos(\alpha_j) \right) \right\},$$

де $K_1^j = 2\mu_1\mu_2 a_j \tilde{d}_{1j}$, $K_2^j = 2b_j K_1^j$, $\alpha_j = b_j \ln \frac{r}{2\ell} + \frac{\theta}{2}$, $\gamma_j^* = b_j \ln \frac{r}{2\ell} - \frac{\theta}{2}$, $j, k = 1, 2$.

Аналогічно знайдемо розподіл моментів в околі вершини тріщини для задачі згину:

$$M_y^{(k)} = \sqrt{\frac{\ell}{2r}} \sum_{j=1}^2 \left\{ \tilde{K}_1^j \left(\frac{1}{\tilde{A}_k} e^{-\theta b_j} [-\tilde{\alpha}_k \cos(\gamma_j^*) + \sin(\theta) \sin(\gamma_j^* - \theta) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2b_j \sin(\theta) \cos(\gamma_j^* - \theta)] - \frac{1}{\tilde{A}_{3-k}} \tilde{\alpha}_{3-k} e^{\theta b_j} \cos(\alpha_j) \right) - \right. \\ \left. - \tilde{K}_2^j \left(\frac{1}{\tilde{A}_k} e^{-\theta b_j} [\tilde{\alpha}_k \sin(\gamma_j^*) + \sin(\theta) \cos(\gamma_j^* - \theta) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2b_j \sin(\theta) \sin(\gamma_j^* - \theta)] + \frac{1}{\tilde{A}_{3-k}} \tilde{\alpha}_{3-k} e^{\theta b_j} \sin(\alpha_j) \right) \right\}, \\ M_x^{(k)} = -\sqrt{\frac{\ell}{2r}} \sum_{j=1}^2 \left\{ \tilde{K}_1^j \left(e^{-\theta b_j} \tilde{A}_k^{-1} \left[\frac{3\nu_k + 1}{1 - \nu_k} \cos(\gamma_j^*) + \sin(\theta) \sin(\gamma_j^* - \theta) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 2b_j \sin(\theta) \cos(\gamma_j^* - \theta) \right] - \frac{1}{\tilde{A}_{3-k}} \tilde{\alpha}_{3-k} e^{\theta b_j} \cos(\alpha_j) \right) - \\ \left. - \tilde{K}_2^j \left(\frac{1}{\tilde{A}_k} e^{-\theta b_j} \left[-\frac{3\nu_k + 1}{1 - \nu_k} \sin(\gamma_j^*) + \sin(\theta) \cos(\gamma_j^* - \theta) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 2b_j \sin(\theta) \sin(\gamma_j^* - \theta) \right] + \frac{1}{\tilde{A}_{3-k}} \tilde{\alpha}_{3-k} e^{\theta b_j} \sin(\alpha_j) \right) \right\},$$

де $\tilde{K}_1^j = \frac{1}{2h} \tilde{d}_{1j}$, $\tilde{K}_2^j = 2b_j \tilde{K}_1^j$, $b_j = -\frac{1}{2\pi} \ln |g_j|$, $j, k = 1, 2$.

Як впливає з аналізу наведених результатів, урахування контакту берегів тріщини на прямолінійній межі поділу матеріалів, як і без його врахування, призводить до того, що напруження в околі вершини тріщини мають коливний характер.

Числовий аналіз задачі та висновки. Числовий аналіз проведено для матеріалів з коефіцієнтами Пуассона

$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ при $M_{x1}^\infty = 0$ і $M_{x2}^\infty / M_y^\infty = -\nu_1 \eta + \nu_2$. На рис. 2 наведено розподіл контактної тиску Nh / M_y^∞ між берегами тріщини для різних значень параметра E_2 / E_1 - відношення модулів Юнга з'єднаних пластин. Коли матеріали однакові, $E_2 / E_1 = 1$, контактний тиск берегів є сталим, що співпадає з результатами статті [14]. Зауважимо, що, чим матеріали сильніше відрізняються за модулями Юнга, тим менший буде контактний тиск.

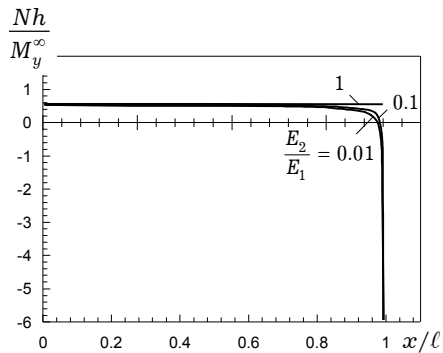


Рис. 2

Рис. 3 і 4 ілюструють відповідно розподіли нормальних $h^2\sigma_{yy}/M_y^\infty$ і дотичних $h^2\sigma_{xy}/M_y^\infty$ міжфазних напружень на верхній основі пластини при значеннях $E_2/E_1 = 0.01, 0.1, 1$.

Для дотичних напружень у вершині тріщини є стрибок напружень за винятком випадку, коли $E_2/E_1 = 1$ (напруження нульові як на тріщині, так і на межі поділу матеріалів). При віддаленні від тріщини величина міжфазних напружень спадає, причому тим швидше, чим E_2/E_1 ближче до 1.

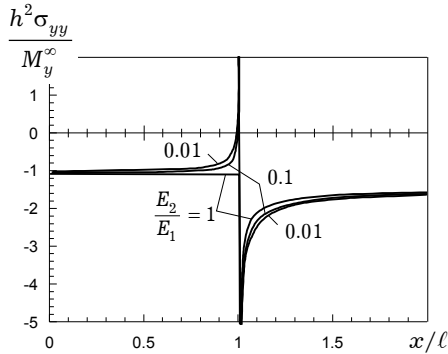


Рис. 3

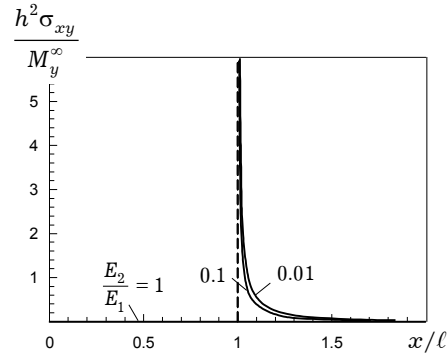


Рис. 4

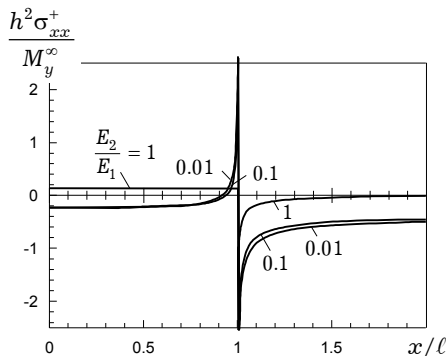


Рис. 5

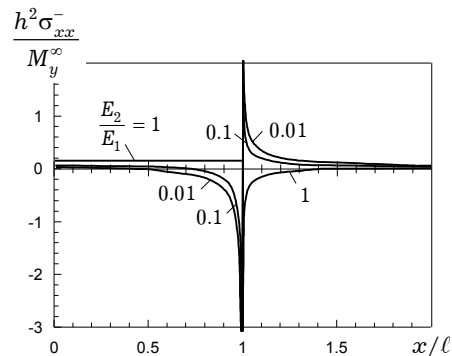


Рис. 6

На рис. 5 і 6 показано відповідно залежності напружень $h^2\sigma_{xx}^+/M_y^\infty$ і $h^2\sigma_{xx}^-/M_y^\infty$ на межі поділу матеріалів і тріщині при різних значеннях E_2/E_1 .

На границі поділу матеріалу напруження $h^2\sigma_{xx}^+/M_y^\infty$ є завжди від'ємними. Також варто зауважити, що при $E_2/E_1 = 1$ напруження $h^2\sigma_{xx}^+/M_y^\infty$ і $h^2\sigma_{xx}^-/M_y^\infty$ співпадають.

1. Мартиняк Р. М. Термічне розкриття початково закритої міжфазної тріщини за неідеального теплового контакту берегів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – 35, № 5. – С. 14–22.
2. Мартиняк Р. М., Гончар Х. І., Нагалка С. П. Моделювання термомеханічного закриття початково розкритої міжфазної тріщини, наділеної термоопором // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 5. – С. 59–66.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
4. Лобода В. В., Харун І. В. Міжфазні тріщини з зонами контакту в анізотропному середовищі у полі віддаленого термомеханічного навантаження, зосереджених сил і теплових джерел // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 1. – С. 32–46.

5. Опанасович В. К., Звизло И. С. Изгиб кусочно-однородной изотропной пластины с прямолинейной трещиной, параллельной линии спая, с учетом контакта ее берегов // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – № 34. – С. 88–93.
6. Опанасович В. К., Звизло И. С. Згин кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною, перпендикулярною до лінії поділу матеріалів, з врахуванням контакту берегів // Системні технології. – 2002. – № 4 (21) – С. 124–129.
7. Опанасович В., Селіверстов Р. Згин пластини з двома паралельними не зсунутими тріщинами різної довжини за теорією Рейснера // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2000. – Т. 2. – С. 55–58.
8. Опанасович В. К., Слободян М. С. Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 3. – С. 106–119.
9. Острик В. І., Улітко А. Ф. Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 2. – С. 119–126.
10. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорус. унта, 1975. – 256 с.
11. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
12. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. – Т. 2).
13. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / Под ред. Ю. М. Мураками: В 2 т. – Москва: Мир, 1990. – Т. 1. – 448 с.; Т. 2. – 568 с.
14. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 7. – С. 49–51.
15. Cotrinou M. The interface crack in a shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1978. – 45. – P. 287–290.
16. Williams M. L. The bending stress distribution at the base of a stationary crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1961. – 28. – P. 78–82.

ИЗГИБ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ НА ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ЛИНИИ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ

Исследована задача о двустороннем изгибе кусочно-однородной изотропной пластины с трещиной на прямолинейной линии раздела материала с учетом контакта ее берегов. С использованием методов теории функций комплексной переменной и комплексных потенциалов решение задачи сведено к задачам линейного сопряжения, на основании которых определены комплексные потенциалы. Проведен численный анализ контактного давления между берегами трещины и напряжений на границе раздела материалов.

BENDING OF PIECE-HOMOGENEOUS PLATE WITH CRACK ON THE INTERFACE OF MATERIALS WITH ALLOWANCE FOR CONTACT OF ITS FACES

In the work bending of a piece-homogeneous isotropic plate which has a crack on the interface of materials with allowance for contact of its faces has been studied. The solution to the problem is constructed with application of the theory of functions of complex variable and complex potentials and their explicit form is found. The numerical analysis of contact pressure between the crack faces and stresses on the interface of materials has been made.

¹ Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,
² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.08.05