

### ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ВІДРИВУ У БІМАТЕРІАЛЬНОМУ ТІЛІ З ЕЛІПТИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ ПІД НЕСТАЦІОНАРНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

*Розглянуто симетричну задачу про нестационарне нормальне навантаження поверхонь еліптичної тріщини, розташованої перпендикулярно до міжматеріальної поверхні ідеально з'єднаних пружних півпросторів. З урахуванням умов контакту півпросторів та умов навантаження на тріщині задачу зведено до граничного інтегрального рівняння відносно функції розкриття дефекту в спектральній області зображень Фур'є за часом. Розв'язання рівняння проводиться за допомогою методу відображень і чисельного відтворення оригіналів. Для різних часових профілів навантажень, ексцентриситетів тріщини та співвідношень між модулями пружності складових частин тіла встановлено залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі тріщини від часу, а у випадку усталеного процесу – від хвильового числа.*

Актуальні для сучасної інженерії композитні тіла можуть містити дефекти типу тріщин технологічного чи експлуатаційного походження, біля яких виникають небезпечні напруження. Під час динамічного навантаження на їхній рівень значний вплив мають інерційні ефекти, пов'язані з наявністю дефекту в полі згенерованих на поверхні поділу матеріалів відбитих і заломлених хвиль. При цьому визначальну роль відіграють часові профілі навантаження, умови контакту складових частин композита, геометрія тріщин і глибина їх залягання відносно міжматеріальної поверхні.

Раніше методом граничних інтегральних рівнянь (ГІР) досліджувалось нестационарне навантаження тривимірного однорідного тіла з тріщинами різних форм [3, 4, 7–10], а також кусково-однорідного тіла з круговими [2, 6] і тунельними [5] тріщинами. Однак динамічна взаємодія тріщини зі змінною кривиною контуру з поверхнею поділу матеріалів не вивчалась.

Розглянемо два ідеально з'єднані пружні півпростори  $A$  і  $B$  з густинами  $\rho^A$  і  $\rho^B$ , модулями зсуву  $G^A$  і  $G^B$  та коефіцієнтами Пуассона  $\nu^A$  і  $\nu^B$  відповідно. Нехай у півпросторі  $A$  розміщена плоска еліптична тріщина  $S^{(1)}$  з півосями  $a$  і  $b$  ( $a \geq b$ ), мала піввісь якої розташована на перпендикулярі до міжматеріальної поверхні  $S^{(0)}$ . На протилежні поверхні  $S^{(1)\pm}$  дефекту діють нормальні самозрівноважені змінні в часі  $t$  зусилля з компонентою  $N_3^+(\mathbf{x}, t) = -N_3^-(\mathbf{x}, t) = N_3(\mathbf{x}, t)$ . Пов'яжемо з тріщиною декартову систему координат  $Ox_1x_2x_3$  так, щоб область тріщини  $S^{(1)}$  містилась у координатній площині  $x_1Ox_2$ , її центр  $O$  збігався з геометричним центром області  $S^{(1)}$ , мала піввісь еліпса лежала на осі  $Ox_2$ , спрямованій до міжматеріальної поверхні, а поверхням тріщини  $S^{(1)\pm}$  відповідали значення  $x_3 = \pm 0$ .

Вихідними для опису динамічного деформування такого тіла є рівняння руху Ляме, які у перетвореннях Фур'є за часом з урахуванням умов причинності та при нульових початкових умов на переміщення  $\mathbf{u}^A$  у півпросторі  $A$  і  $\mathbf{u}^B$  у півпросторі  $B$  будуть такими:

$$\omega_{1D}^{-2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{*D}) - \omega_{2D}^{-2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}^{*D}) + \mathbf{u}^{*D} = 0, \quad D = A, B. \quad (1)$$

Тут і надалі символом «\*» позначено трансформанти відповідних величин;  $\nabla$  – тривимірний набла-вектор;  $\omega_{1D} = \omega/c_1^D$ ,  $\omega_{2D} = \omega/c_2^D$ ,  $\omega$  – параметр

перетворення Фур'є;  $c_1^D$  і  $c_2^D$  – швидкості поширення в матеріалі  $D$  поздовжніх і поперечних хвиль відповідно.

У введених системі координат умови ідеального механічного контакту півпросторів і крайові умови прикладання зусиль до поверхонь тріщини відповідно будуть такими:

$$u_j^{*A}(\mathbf{x}, \omega) = u_j^{*B}(\mathbf{x}, \omega), \quad \sigma_{2j}^{*A}(\mathbf{x}, \omega) = \sigma_{2j}^{*B}(\mathbf{x}, \omega), \quad j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in S^{(0)}, \quad (2)$$

$$\sigma_{33}^{*A}(\mathbf{x}, \omega) = -N_3^*(\mathbf{x}, \omega), \quad \sigma_{j3}^{*A}(\mathbf{x}, \omega) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in S^{(1)}, \quad (3)$$

де  $u_j^{*D}$ ,  $\sigma_{ij}^{*D}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , – зображення компонент вектора переміщень і тензора напружень у півпросторі  $D$  відповідно.

Слід зауважити, що диференціальне рівняння (1) і граничні умови (2), (3) моделюють також задачу про усталене в часі навантаження тріщини в кусково-однорідному тілі, якщо трансформанти функцій замінити амплітудами відповідних величин, а параметр перетворення ототожнити з циклічною частотою коливань.

Суперпозиційна природа хвильового поля у розглянутому біматеріальному тілі виражається поданням векторів переміщень у формі

$$\mathbf{u}^{*A} = \nabla \varphi^{*A} + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}^{*A} + \mathbf{u}^{*A(1)}, \quad \mathbf{u}^{*B} = \nabla \varphi^{*B} + \nabla \times \boldsymbol{\Psi}^{*B}, \quad (4)$$

де складова  $\mathbf{u}^{*A(1)}$  відображає внесок у хвильову картину динамічного розкриття тріщини (інтегральні подання її компонент через стрибки нормальних переміщень  $\Delta u_3^{*A}$  на тріщині такі ж, що й в однорідному тілі з механічними сталими матеріалу півпростору  $A$  [3]), скалярні  $\varphi^D$  і векторні  $\boldsymbol{\Psi}^D$  ( $\varphi_1^D, \varphi_2^D, 0$ ),  $D = A, B$ , функції описують вплив на загальне поле переміщень у біматеріалі відбитих ( $\varphi^A, \boldsymbol{\Psi}^A$ ) і заломлених ( $\varphi^B, \boldsymbol{\Psi}^B$ ) на міжматеріальній поверхні хвиль.

Використавши як конструктивні у формулі (4) потенціали Гельмгольца та задовольнивши ними тотожно контактні умови (2) на поверхні  $S^{(0)}$  і граничні умови (3) на поверхні  $S^{(1)}$ , за схемою роботи [6] отримаємо ГР відносно функції динамічного розкриття дефекту:

$$\iint_{S^{(1)}} \Delta u_3^{*A}(\boldsymbol{\xi}, \omega) [\mathcal{R}_{\text{ho}}(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|, \omega) - \mathcal{R}_{\text{bi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega)] dS_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\omega_{2A}^2}{4G^A} N_3^*(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \in S^{(1)}, \quad (5)$$

де ядро  $\mathcal{R}_{\text{ho}}$  з особливістю потенціалу Гельмгольца таке ж, як і у випадку наявності тріщини в однорідному тілі:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{ho}}(r, \omega) = & \left[ 9 - 9i\omega_{1A}r + (\omega_{2A}^2 - 5\omega_{1A}^2)r^2 + i\omega_{1A}(2\omega_{1A}^2 - \omega_{2A}^2)r^3 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4}(2\omega_{1A}^2 - \omega_{2A}^2)^2 r^4 \right] \frac{\exp(i\omega_{1A}r)}{r^5} - \left[ 9 - 9i\omega_{2A}r - \right. \\ & \left. - 4\omega_{2A}^2 r^2 + i\omega_{2A}^3 r^3 \right] \frac{\exp(i\omega_{2A}r)}{r^5}, \end{aligned}$$

а регулярне ядро  $\mathcal{R}_{\text{bi}}$ , що описує взаємодію тріщини з міжматеріальною поверхнею, визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\text{bi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) = & \mathcal{R}_{\text{ho}}(|\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\xi}|, \omega) + \\ & + 2 \int_0^\infty \frac{\tau}{F_{\text{St}}(\tau)} \left\langle \Omega_1(|x_1 - \xi_1|, \omega, \tau) \exp[-(2d - x_2 - \xi_2)V_1^A(\tau)] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Omega_2(|x_1 - \xi_1|, \omega, \tau) \exp[-(2d - x_2 - \xi_2)V_2^A(\tau)] - \\
& - \Omega_3(|x_1 - \xi_1|, \omega, \tau) \{ \exp[-(d - x_2)V_2^A(\tau) - (d - \xi_2)V_1^A(\tau)] + \\
& + \exp[-(d - x_2)V_1^A(\tau) - (d - \xi_2)V_2^A(\tau)] \} d\tau. \quad (6)
\end{aligned}$$

У співвідношенні (6) точка  $\bar{\mathbf{x}}$  є симетричним відображенням точки  $\mathbf{x}$  у пів-простір  $B$ , тобто  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(x_1, 2d - x_2)$ ;  $d$  – відстань від геометричного центру тріщини до поверхні  $S^{(0)}$ ;  $F_{St}$  – функція Стоунлі [1],

$$\begin{aligned}
\Omega_1(r, \omega, \tau) &= \{ [G\omega_{2B}^2 - 2(G-1)\tau^2]^2 V_2^A(\tau) - 4(G-1)^2 \tau^2 V_2^A(\tau) V_1^B(\tau) V_2^B(\tau) + \\
& + G\omega_{2A}^2 \omega_{2B}^2 V_2^B(\tau) \} \left[ \frac{(v^A)^2 \omega_{2A}^4}{4(1-v^A)^2} J_0(\tau r) + \frac{v^A \omega_{2A}^2}{1-v^A} \frac{\tau}{r} J_1(\tau r) + \frac{3\tau^2}{r^2} J_2(\tau r) \right], \\
\Omega_2(r, \omega, \tau) &= \frac{1}{V_2^A(\tau) + G V_2^B(\tau)} \left\langle F_{St}(\tau) \left[ -\omega_{2A}^2 \frac{\tau}{r} J_1(\tau r) + \frac{3\tau^2}{r^2} J_2(\tau r) \right] + \right. \\
& + V_2^A(\tau) \{ [G^2 \omega_{2B}^2 (\omega_{2B}^2 - \omega_{2A}^2) - 4(G-1)(G\omega_{2B}^2 - \\
& - (G-1)\tau^2)(V_2^A(\tau))^2] V_1^A(\tau) + G[\omega_{2A}^2 (\omega_{2B}^2 - \omega_{2A}^2) - 4(G-1)(\omega_{2A}^2 + \\
& + (G-1)\tau^2)(V_2^B(\tau))^2] V_1^B(\tau) + G[G\omega_{2B}^2 - \omega_{2A}^2 - 2(G-1)\tau^2]^2 V_2^B(\tau) - \\
& \left. - 4(G-1)^2 V_1^A(\tau)(V_2^A(\tau))^2 V_1^B(\tau)V_2^B(\tau) \} \frac{3\tau^2}{r^2} J_2(\tau r) \right\rangle, \\
\Omega_3(r, \omega, \tau) &= V_2^A(\tau) \{ 2(G-1)[\omega_{2A}^2 + 2(G-1)\tau^2][\tau^2 - V_1^B(\tau)V_2^B(\tau)] + \\
& + G\omega_{2B}^2 [G\omega_{2B}^2 - \omega_{2A}^2 - 4(G-1)\tau^2] \} \left[ \frac{v^A \omega_{2A}^2}{2(1-v^A)} \frac{\tau}{r} J_1(\tau r) + \frac{3\tau^2}{r^2} J_2(\tau r) \right],
\end{aligned}$$

$$G = \frac{G^B}{G^A}, \quad V_j^D(\tau) = \sqrt{\tau^2 - \omega_{jD}^2} = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \omega_{jD}^2}, & \tau \geq \omega_{jD}, \\ -i \sqrt{\omega_{jD}^2 - \tau^2}, & \tau < \omega_{jD}, \end{cases} \quad D = A, B.$$

Співпадіння характеристичних частин ГІР задач динамічного навантаження безмежного моно- і біматеріального тіла з тріщиною дає змогу використати для побудови регулярного аналога рівняння (5) методику роботи [7]. Вона передбачає відображення області тріщини на кругову область  $\tilde{S}$  одиничного радіуса. Для цього виконаємо заміну змінних

$$\begin{cases} x_1 = ay_1, & \xi_1 = a\eta_1, \\ x_2 = by_2, & \xi_2 = b\eta_2, \end{cases} \quad (7)$$

де  $\mathbf{y}(y_1, y_2)$ ,  $\boldsymbol{\eta}(\eta_1, \eta_2)$  – нові змінні в області  $\tilde{S}$ .

Після заміни (7) ГІР (5) набуде вигляду

$$\iint_{\tilde{S}} \Delta \tilde{u}_3^{*A}(\boldsymbol{\eta}, \omega) \left[ \mathcal{R}_{ho} \left( \frac{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|}{\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})}, \omega \right) - \tilde{\mathcal{R}}_{bi}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}, \omega) \right] d\tilde{S}_{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\omega_{2A}^2}{4G^A} \tilde{N}_3^*(\mathbf{y}, \omega), \quad \mathbf{y} \in \tilde{S}. \quad (8)$$

У рівнянні (8) введено такі позначення для складних функцій:

$$\Delta \tilde{u}_3^{*A}(\mathbf{y}, \omega) = ab \Delta u_3^{*A}(\mathbf{x}, \omega) \Big|_{\substack{x_1=ay_1 \\ x_2=by_2}}, \quad \tilde{N}_3^*(\mathbf{y}, \omega) = N_3^*(\mathbf{x}, \omega) \Big|_{\substack{x_1=ay_1 \\ x_2=by_2}},$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\text{bi}}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}, \omega) = \mathcal{R}_{\text{bi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) \Big|_{\substack{x_1=ay_1, \xi_1=a\eta_1 \\ x_2=by_2, \xi_2=b\eta_2}}$$

функція  $\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$  характеризує відношення відстаней між точками  $\mathbf{y}$  і  $\boldsymbol{\eta}$  та їх прообразами, тобто

$$\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{a} \left[ 1 - q^2 \frac{(\eta_2 - y_2)^2}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^2} \right]^{-1/2}, \quad q = \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2}.$$

Рівняння (8) є гіперсингулярним, що впливає із асимптотичного розвинення ядра  $\mathcal{R}_{\text{ho}}$  в околі полюса  $\boldsymbol{\eta}$ :

$$\mathcal{R}_{\text{ho}} \left( \frac{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|}{\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})}, \omega \right) = \frac{\omega_{2A}^2}{4(1 - v^A)} \left[ \frac{\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})^3}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^3} + A\omega_{2A}^2 \frac{\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|} \right] + O(1), \quad (9)$$

де  $A = [7 - 12v^A + 8(v^A)^2] / [8(1 - v^A)]$ .

У ГІР (8) можна виділити особливі інтеграли, перетворивши це рівняння тотожно на підставі формули (9):

$$\begin{aligned} & \iint_{\tilde{S}} \Delta \tilde{u}_3^{*A}(\boldsymbol{\eta}, \omega) \frac{[\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})]^3}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^3} d\tilde{S}_{\boldsymbol{\eta}} + A\omega_{2A}^2 \iint_{\tilde{S}} \Delta \tilde{u}_3^{*A}(\boldsymbol{\eta}, \omega) \frac{\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|} d\tilde{S}_{\boldsymbol{\eta}} + \\ & + \iint_{\tilde{S}} \Delta \tilde{u}_3^{*A}(\boldsymbol{\eta}, \omega) \left\{ \frac{4(1 - v^A)}{\omega_{2A}^2} \left[ \mathcal{R}_{\text{ho}} \left( \frac{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|}{\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})}, \omega \right) - \tilde{\mathcal{R}}_{\text{bi}}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}, \omega) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{[\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})]^3}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|^3} - A\omega_{2A}^2 \frac{\beta(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}|} \right\} d\tilde{S}_{\boldsymbol{\eta}} = \frac{1 - v^A}{G^A} \tilde{N}_3^*(\mathbf{y}, \omega), \quad \mathbf{y} \in \tilde{S}. \quad (10) \end{aligned}$$

Тут два перші інтеграли мають особливість ньютонівського (статичного) потенціалу. Їх регуляризація [7] ґрунтується на поданні

$$\Delta \tilde{u}_3^{*A}(\mathbf{y}, \omega) = \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2} \tilde{\alpha}_3^{*A}(\mathbf{y}, \omega), \quad (11)$$

де  $\tilde{\alpha}_3^{*A}(\mathbf{y}, \omega)$  – невідома функція. Подання (11) узгоджується із фізичним змістом функції  $\Delta u_3^{*A}(\mathbf{x}, \omega)$  як стрибка нормальних переміщень на тріщині, що дорівнює нулеві на контурі дефекту.

Для дискретизації рівняння (10) область  $\tilde{S}$  розбиваємо на граничні елементи, в межах яких припускаємо сталість шуканої функції, далі рівняння задовольняємо у колокаційних точках посередині введених елементів. Так отримаємо систему  $Q$  ( $Q$  – кількість граничних елементів) лінійних алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами відносно значень трансформанти  $\tilde{\alpha}_3^{*A}$  у прообразах вузлових точок на крузі.

Для числового відтворення часових залежностей шуканих величин скористасмося оберненим перетворенням Фур'є. Зокрема, у випадку задання навантаження у канонічній формі  $N_3(\mathbf{x}, t) = N(\mathbf{x})T(t)$  для оригіналу коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) відриву  $K_1$  матимемо:

$$\begin{aligned} K_1(\varphi, t) = & -\frac{4G^A \sqrt{\pi}}{(1 - v^A)} \left( \frac{1}{ab} \right)^{3/2} (a^2 \sin^2 \tilde{\varphi} + \\ & + b^2 \cos^2 \tilde{\varphi})^{1/4} \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty \tilde{\alpha}_3^{*A}(\mathbf{y}, \omega) \Big|_{\substack{y_1=\cos \tilde{\varphi} \\ y_2=\sin \tilde{\varphi}}} T^*(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \right], \\ \tilde{\varphi} = & \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \right), \quad (12) \end{aligned}$$

де функція  $\tilde{\alpha}_3^{*A}$  є розв'язком рівняння (10) з правою частиною  $\tilde{N}_3^*(\mathbf{y}, \omega) = \tilde{N}(\mathbf{y})$  після підстановки в нього подання (11);  $\varphi$  – кутова координата точки контуру тріщини, відлік якої проводиться від осі  $Ox_1$ .

З урахуванням спадної поведінки підінтегрального виразу за зростання параметра інтегрування  $\omega$  під час обчислення інтеграла (12) використано заміну нескінченної верхньої межі інтегрування скінченною так, щоб відкинута частина не порушувала контрольованої точності результату (для розглянутих нижче прикладів один відсоткова відносна похибка на всьому часовому інтервалі забезпечувалась вибором верхньої межі інтегрування  $\omega = 16 c_2^A / b$ ).

Числові розрахунки виконано для біматеріалу, в якому густини та коефіцієнти Пуассона вибирали однаковими:  $\rho^A = \rho^B$ ,  $\nu^A = \nu^B = 0.3$ , а неоднорідність тіла забезпечувалась вибором різних значень параметра  $G$  ( $G = G^B / G^A$ ). За цих умов функція Стоунлі не має дійсних коренів [1]. На поверхні еліптичної тріщини діють динамічні навантаження, що описуються в часі функцією Гевісайда  $N_3(\mathbf{x}, t) = N_0 H(t)$  (рис. 1) і коливною функцією  $N_3(\mathbf{x}, t) = N_0 \exp(-i\omega t)$  з частотою  $\omega$  (рис. 2),  $N_0 = \text{const}$ . На рис. 1 зображено залежності нормованого КІН відриву  $\bar{K}_1 = K_1 / K_1^*$  від безрозмірного часу  $\bar{t} = tc_2^A / (2b)$  у найближчій до міжматеріальної поверхні точці контуру тріщини ( $\varphi = \pi/2$ ); на рис. 2 – залежності відносної амплітуди КІН відриву  $\tilde{K}_1 = |K_1| / K_1^*$  у цій самій точці від нормалізованого хвильового числа  $\vartheta = \omega_{2A} b$  для різних відношень модулів зсуву півпросторів (кривим 1–4 відповідають значення  $G = 0.125, 0.5, 2.0, 8.0$ ).

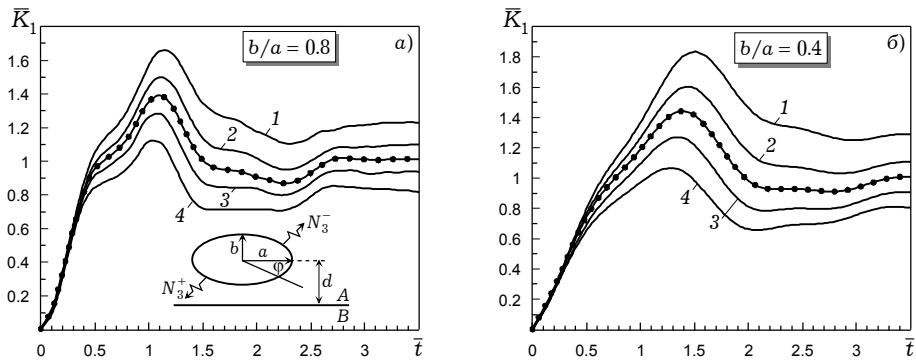


Рис. 1

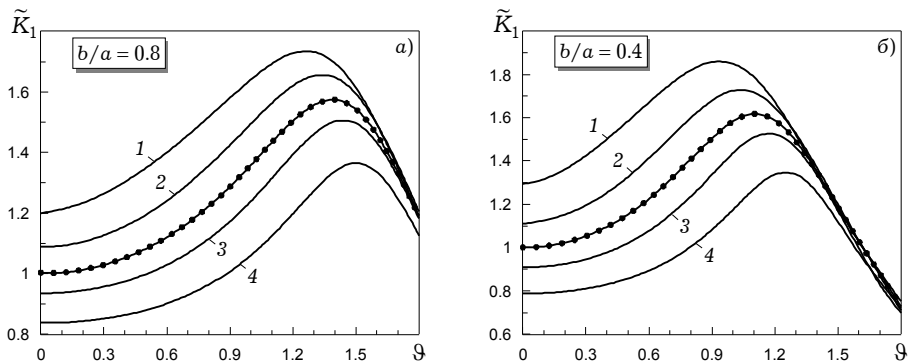


Рис. 2

Для порівняння результатів на всіх рисунках марковано криві, що відповідають однорідному середовищу з еліптичною тріщиною ( $G = 1.0$ ) під аналогічним навантаженням. За нормуючу вибрано величину статичного

КІН  $K_1^* = N_0 \sqrt{\pi b}/E(q)$  (тут  $E(q)$  – еліптичний інтеграл 2-го роду) у вершині малої півосі еліптичної тріщини під навантаженням  $N_0$  в однорідному тілі. Відстань  $d$  від центра тріщини до поверхні поділу матеріалів приймали рівною  $1.1b$ , співвідношення півосей задавали як  $b/a = 0.8$  (рис. 1а, 2а) і  $b/a = 0.4$  (рис. 1б, 2б).

**Висновки.** За імпульсного навантаження тріщини (рис. 1) її взаємодія з міжматеріальною поверхнею проявляється з моменту часу, необхідного поздовжній хвилі для пробігу двох відстаней між поверхнею поділу матеріалів і найближчою до неї точкою контуру дефекту. У разі розміщення тріщини в півпросторі з меншим (більшим) модулем зсуву, ніж у сусідньому півпросторі, дія відбитих від міжматеріальної поверхні хвиль зумовлює у найближчій до міжматеріальної поверхні точці контуру тріщини зменшення (збільшення) КІН порівняно з випадком однорідного тіла з дефектом. Розходження КІН для еліптичної тріщини в однорідному та кусково-однорідному тілі залежить від ексцентриситету дефекту. Зокрема, для розглянутої геометрії задачі таке розходження відносних величин збільшується зі збільшенням ексцентриситету тріщини. Зменшення відношення  $b/a$  півосей тріщини сповільнює також настання пікових КІН, однак збільшує їх відносне перевищення статичних показників, що досягаються в області великих значень часу.

У частотній області (рис. 2) амплітуди КІН зростають від статичних, коли хвильове число дорівнює нулеві, до максимальних (резонансних) значень, після чого монотонно спадають. У біматеріалі з параметром  $G < 1$  амплітуди КІН більші, ніж в однорідному тілі з аналогічною тріщиною, а при  $G > 1$  – менші. Вплив кривини контуру дефекту на вказане розходження, а також на перевищення резонансними КІН статичних показників, має такий самий характер, що й у попередньому випадку нестационарного навантаження.

This work is supported by INTAS (Project No. 05-1000008-7979).

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. думка, 1981. – 283 с.
2. Жбадинський І. Я., Михаськів В. В., Степанюк О. І. Задача усталеного деформування тривимірного кусково-однорідного тіла з компланарними тріщинами // Акуст. вісн. – 2003. – 6, № 4. – С. 27–32.
3. Kim G. S., Huh M. B., Mykhas'kiv V. V. Метод потенціалів у тривимірних статичних та динамічних задачах теорії тріщин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1996. – 32, № 1. – С. 22–32.
4. Ariza M. P., Dominguez J. General BE approach for three-dimensional dynamic fracture analysis // Engng. Anal. Boundary Elem. – 2002. – 26. – P. 639–651.
5. Lei J., Wang Y. S., Gross D. Dynamic interaction between a sub-interface crack and the interface in a bi-material: time-domain BEM analysis // Arch. Appl. Mech. – 2003. – 73. – P. 225–240.
6. Mykhas'kiv V. V., Stepanyuk O. I. Boundary integral analysis of the symmetric dynamic problem for an infinite bimaterial solid with an embedded crack // Meccanica. – 2001. – 36, No. 4. – P. 479–495.
7. Sladek J., Sladek V., Mykhas'kiv V. V., Stankevych V. Z. Application of mapping theory to boundary integral formulation of 3-D dynamic crack problems // Engng. Anal. Boundary Elem. – 2003. – 27, No. 3. – P. 203–213.
8. Wen P. H., Aliabadi M. H. Mixed-mode weight functions in three-dimensional fracture mechanics: dynamic // Engng. Fract. Mech. – 1998. – 59, No. 5. – P. 577–587.
9. Zhang Ch., Gross D. On wave propagation in elastic solids with cracks. – Southampton: Comput. Mech. Publ, 1998. – 248 p.
10. Zhang Ch., Savaidis A. 3-D transient dynamic crack analysis by a novel time-domain BEM // Comput. Modeling in Eng. Sci. – 2003. – 4, No. 5. – P. 603–618.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ  
ОТРЫВА В БИМАТЕРИАЛЬНОМ ТЕЛЕ С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ  
ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ**

*Рассмотрена симметричная задача нестационарного нормального нагружения поверхностей эллиптической трещины, расположенной перпендикулярно к межматериальной поверхности идеально соединенных упругих полупространств. С учетом условий сопряжения полупространств, а также условий нагружения на трещине задача сведена к граничному интегральному уравнению относительно функций динамического раскрытия дефекта в спектральной области преобразования Фурье по времени. Решение уравнения производится с помощью метода отображений и численного определения оригиналов. Для разных временных профилей нагружения, эксцентриситетов трещины и соотношений между модулями жесткости составляющих частей композита установлены зависимости коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности трещины от времени, а в случае установившегося процесса – от волнового числа.*

**DETERMINATION OF MODE-I STRESS INTENSITY FACTOR IN BIMATERIAL SOLID  
WITH ELLIPTIC CRACK UNDER NON-STATIONARY LOADING**

*The symmetric problem on the non-stationary normal loading of elliptic crack located perpendicularly to the interface of the perfectly connected half-spaces is considered. By means of satisfaction the interfacial contact conditions and crack surface load conditions, it is reduced to the boundary integral equation relative to the crack opening function in the Fourier time transform domain. The equation is solved by using the mapping method and numerical determination of originals. The temporal and frequency dependencies of mode-I stress intensity factor in the vicinity of the crack front points for different time types of loading, relations between the elastic modulus of the composite constituents and the crack eccentricities are revealed.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
11.10.06