

АСИМПТОТИКИ ПОЛІВ НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ У КЛИНОВИХ СИСТЕМАХ ПРИ ПЛОСКОМУ НАПРУЖЕНОМУ СТАНІ

Наведено методичку обчислення порядку сингулярності та побудови асимптотик напружень і переміщень у клиновій системі за плоского напруженого стану. Побудовано асимптотики напружень та рівняння для обчислення порядку сингулярності в околі вершини тонкого півбезмежного дефекту типу тріщини та абсолютно жорсткого включення, розташованих на ламаній межі поділу матеріалів. Чисельно досліджено залежності порядку сингулярності напружень від відношень модулів зсуву матеріалів і від кута зламу межі їх поділу.

Вступ. При аналізі крихкого руйнування пружних матеріалів важливу роль відіграє з'ясування розподілу поля напружень і порядок його сингулярності в околі вершини дефекту типу тріщини чи абсолютно жорсткого включення та в околі нерегулярних точок межі поділу матеріалів у композитах. Давно відомо [1, 2], що у випадку неоднорідного матеріалу порядок сингулярності поля напружень може відрізнятися від $r^{-1/2}$. Це призводить до того, що при дослідженні напружено-деформованого стану систем, які містять у собі дефекти типу тріщини або абсолютно жорсткого включення, що виходять на лінію поділу матеріалів, або ж складаються з декількох елементів зі спільною точкою контакту, однією з основних проблем є визначення порядку сингулярності поля напружень в околі нерегулярних точок.

Відомо також [9], що розв'язки задач теорії пружності в околі кутової точки можна подати у вигляді суми нескінченного асимптотичного ряду, членами якого є розв'язки однорідних крайових задач для простих модельних областей, зокрема, для клинових систем (у випадку ламаної лінії), і безмежно диференційовної функції. Ці розв'язки залежать лише від локальних характеристик (величин кутів розхилу клинів, їх матеріалів і типу однорідних крайових умов). Величини ж коефіцієнтів при складових ряду залежать від задачі в цілому.

Широкий спектр задач про тонкий дефект на ламаній межі поділу матеріалів чи такий, що виходить у точку зламу такої межі, може бути змодельований системою, складеною з відповідної кількості пружних клинів із півбезмежним дефектом на одній із ліній зчеплення клинів. Так може бути змодельована задача про клин, впаяний у пружну ізотропну матрицю [6], про тріщину, розміщену на ламаній лінії спаю, або таку, що виходить під кутом на межу поділу двох матеріалів [2, 4, 5]. Вищесказане стосується і випадку дефекту у вигляді тонкого абсолютно жорсткого включення.

Сингулярність напруженого стану в околі особливих точок пружного клина, клинового композиту, простору, послабленого розрізами з особливими точками, досліджувались у працях А. Ф. Улітка [13, 14], М. П. Саврука [11, 12], І. Т. Денисюка [6], І. П. Бутвинника [4, 5], Д. Б. Боджі [1, 2] за допомогою класичних підходів механіки твердого деформівного тіла з використанням комплексних потенціалів Колосова – Мусхелішвілі та функції Ері. Такі методи побудови характеристичного рівняння призводять до необхідності записувати визначник матриці порядку $4n$ (n – кількість клинів) і до громіздких аналітичних перетворень, які утруднюють можливість записати остаточний аналітичний вираз для обчислення порядку сингулярності поля напружень. З тих самих причин непростою є і побудова асимптотик напружень і переміщень. Вони розглянуті лише для випадку однорідного матеріалу [3, 9] і для випадку тріщини, розміщеної на прямолінійній межі поділу матеріалів [10, 12].

У цій праці запропоновано методику визначення порядку сингулярності та побудови асимптотик напружень і переміщень в околі нерегулярної точки багатоклинової системи. Вона ґрунтується на визначальних співвідношеннях теорії пружності однорідного тіла, правомірності подання фізико-механічних характеристик системи у вигляді кусково-неперервних функцій від полярного кута та застосуванні апарату теорії узагальнених функцій [8]. Таким чином, задача дослідження порядку сингулярності напруженого стану в околі точки сходження клинів чи в околі вершини кутового вирізу незалежно від кількості клинів системи у випадку плоскої задачі теорії пружності зводиться до обчислення власних значень однорідної системи лінійних алгебричних рівнянь четвертого порядку.

Формулювання задачі. Розглянемо напружено-деформований стан в околі кутової точки O системи (рис. 1), що складається з кутового вирізу з розхилом кута $\alpha_{n+1} \geq 0$ і довільної кількості n клинів S_i , $i = 1, 2, \dots, n$, з різними сталими Ляме λ_i, μ_i та з кутами розхилу α_i , $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = 2\pi$, біля вістря. Система перебуває за умов плоскої задачі теорії пружності: $u = u(r, \varphi)$, $v = v(r, \varphi)$. На берегах вирізу задаємо однорідні крайові умови.

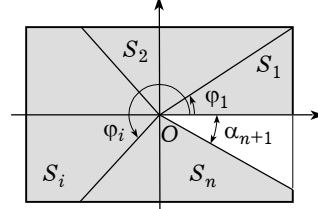


Рис. 1

Математична модель задачі в загальній постановці лінійної теорії пружності має такий вигляд [3, 9]:

– співвідношення Коші

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^i &= \frac{\partial u_i}{\partial r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi}^i &= \frac{u_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi}, & \varepsilon_{r\varphi}^i &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{v_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} \right), \\ \varepsilon_{zz}^i &= \varepsilon_{\varphi z}^i = \varepsilon_{rz}^i = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

– закон Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= \lambda_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{u_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} \right) + 2\mu_i \frac{\partial u_i}{\partial r}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^i &= \lambda_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{u_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} \right) + 2\mu_i \left(\frac{u_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{zz}^i &= \lambda_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{u_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{r\varphi}^i &= \mu_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{v_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} \right), & \sigma_{\varphi z}^i &= \sigma_{rz}^i = 0; \end{aligned} \quad (2)$$

– рівняння Ляме

$$\begin{aligned} (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} + \frac{u_i}{r} \right) - \mu_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} + \frac{v_i}{r} \right) &= 0, \\ (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} + \frac{u_i}{r} \right) - \mu_i \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} + \frac{v_i}{r} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

– умови ідеального механічного контакту на поверхнях зчеплення клинів

$$\begin{aligned} \mu_{i+1} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi_i} &= -(\mu_{i+1} - \mu_i) \left(\frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{v_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi_i}, \\ \frac{\lambda_{i+1} + 2\mu_{i+1}}{r} \left(\frac{\partial v_{i+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi_i} &= -(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \left(\frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{u_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi_i} - \\ &- 2(\mu_{i+1} - \mu_i) \left(\frac{u_i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi_i}, \end{aligned}$$

$$(u_{i+1} - u_i)|_{\varphi_i} = 0, \quad (v_{i+1} - v_i)|_{\varphi_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1; \quad (4)$$

– одна із чотирьох груп однорідних крайових умов на берегах вирізу:

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^1|_{\varphi_0} &= \sigma_\varphi^{n+1}|_{\varphi_n} = \tau_{r\varphi}^i|_{\varphi_0} = \tau_{r\varphi}^{n+1}|_{\varphi_n} = 0, \\ u_1|_{\varphi_0} &= u_{n+1}|_{\varphi_n} = v_1|_{\varphi_0} = v_{n+1}|_{\varphi_n} = 0, \\ \sigma_\varphi^1|_{\varphi_0} &= \tau_{r\varphi}^i|_{\varphi_0} = 0, \quad u_{n+1}|_{\varphi_n} = v_{n+1}|_{\varphi_n} = 0, \\ u_1|_{\varphi_0} &= v_1|_{\varphi_0} = 0, \quad \sigma_\varphi^{n+1}|_{\varphi_n} = \sigma_{r\varphi}^{n+1}|_{\varphi_n} = 0, \quad \varphi_0 = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Постановка узагальненої задачі спряження для кусково-однорідного тіла. Згідно з методикою, викладеною у працях [7, 8], продовжимо функції переміщень $u_i(r, \varphi)$, $v_i(r, \varphi)$ і сталі в областях S_i коефіцієнти μ_i , λ_i на всю зайняту клинвою системою область у вигляді

$$\begin{aligned} p(\varphi) &= p_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (p_{i+1} - p_i) S_+(\varphi - \varphi_i), \\ p(\varphi) &\sim \{u, v, \lambda, \mu\}, \quad \varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i, \quad S_+ = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

В результаті цього, скориставшись для продовження диференціальних операторів на всю зайняту клинами область зв'язком між узагальненими та класичними похідними [8], замість системи рівнянь (3), (4) отримаємо уніфіковану форму рівнянь Ляме для кусково-однорідної клинвої системи

$$\begin{aligned} \frac{r(\lambda + 2\mu)}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{v}{r} \right) &= \\ = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n-1} C_{ui} \delta_+(\varphi - \varphi_i), \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} + \frac{u_i}{r} \right) - \frac{\mu r}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} + \frac{v_i}{r} \right) &= \\ = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{n-1} C_{vi} \delta_+(\varphi - \varphi_i), \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} C_{ui} &= -\frac{r}{\mu_{i+1}} (\mu_{i+1} - \mu_i) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi_i-0}, \\ C_{vi} &= -\frac{r}{\lambda_{i+1} - 2\mu_{i+1}} \left[(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi_i-0} + \right. \\ &\quad \left. + 2(\mu_{i+1} - \mu_i) \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi_i-0} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Система рівнянь (7) із однією з груп однорідних крайових умов

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi|_{\varphi_0} &= \sigma_\varphi|_{\varphi_n} = \tau_{r\varphi}|_{\varphi_0} = \tau_{r\varphi}|_{\varphi_n} = 0, \\ u|_{\varphi_0} &= u|_{\varphi_n} = v|_{\varphi_0} = v|_{\varphi_n} = 0, \\ \sigma_\varphi|_{\varphi_0} &= \tau_{r\varphi}|_{\varphi_0} = 0, \quad u|_{\varphi_n} = v|_{\varphi_n} = 0, \\ u|_{\varphi_0} &= v|_{\varphi_0} = 0, \quad \sigma|_{\varphi_n} = \tau_{r\varphi}|_{\varphi_n} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

згідно з [7, 8] називається узагальненою задачею спряження.

Побудова розв'язку. Розв'язок системи рівнянь (7) шукатимемо у вигляді кусково-однорідної неперервної функції типу (6), де функції u_i, v_i задовольняють рівняння (3) та мають такий вигляд [9]:

$$\begin{aligned} u_i(r, \varphi) &= r^q f_i(\varphi), & v_i(r, \varphi) &= r^q g_i(\varphi), \\ f_i &= A_i \cos[(1+q)\varphi] + B_i \sin[(1+q)\varphi] + \\ &\quad + C_i \cos[(1-q)\varphi] + D_i \sin[(1-q)\varphi], \\ g_i &= -A_i \sin[(1+q)\varphi] + B_i \cos[(1+q)\varphi] - \\ &\quad - v_i^* C_i \sin[(1-q)\varphi] + v_i^* D_i \cos[(1-q)\varphi], \\ v_i^* &= \frac{3+q-4v_i}{3-q-4v_i}, & v_i &= \frac{\lambda_i}{2(\lambda_i + \mu_i)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Враховуючи подання (6) і (10), отримаємо вирази для переміщень

$$\begin{aligned} u &= r^q \left[A_1 \cos[(1+q)\varphi] + B_1 \sin[(1+q)\varphi] + C_1 \cos[(1-q)\varphi] + \right. \\ &\quad + D_1 \sin[(1-q)\varphi] + \sum_{i=2}^n \{ A_i^* \cos[(1+q)\varphi] + B_i^* \sin[(1+q)\varphi] + \\ &\quad + C_i^* \cos[(1-q)\varphi] + D_i^* \sin[(1-q)\varphi] \} S_+(\varphi - \varphi_i) \Big], \\ v &= r^q \left[-A_1 \sin[(1+q)\varphi] + B_1 \cos[(1+q)\varphi] - v_1^* C_1 \sin[(1-q)\varphi] + \right. \\ &\quad + v_1^* D_1 \cos[(1-q)\varphi] + \sum_{i=1}^{n-1} \{ A_i^* \sin[(1+q)\varphi] + B_i^* \cos[(1+q)\varphi] - \\ &\quad - v_{i+1}^* C_i^* \sin[(1-q)\varphi] + v_{i+1}^* D_i^* \cos[(1-q)\varphi] - C_{i-1} (v_{i+1}^* - v_i^*) \times \\ &\quad \times \sin[(1-q)\varphi] + D_{i-1} (v_{i+1}^* - v_i^*) \cos[(1-q)\varphi] \} S_+(\varphi - \varphi_i) \Big], \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} A_i^* &= A_{i-1} - A_i, & B_i^* &= B_{i-1} - B_i, & C_i^* &= C_{i-1} - C_i, \\ D_i^* &= D_{i-1} - D_i, & i &= 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (12)$$

Коефіцієнти $A_i^*, B_i^*, C_i^*, D_i^*, i = 2, \dots, n$, вибираємо так, щоб виконувалися співвідношення

$$\begin{aligned} (u_{i+1} - u_i) \Big|_{\varphi_i} &= 0, & (v_{i+1} - v_i) \Big|_{\varphi_i} &= 0, \\ \left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi_i} &= C_{ui}(r), & \left(\frac{\partial v_{i+1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi_i} &= C_{vi}(r). \end{aligned}$$

Враховуючи подання (11), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів $A_i^*, B_i^*, C_i^*, D_i^*$, розв'язок якої має вигляд

$$\begin{aligned} A_{i+1}^* &= \frac{(C_{vi} + R_{2i}) \cos[(1+q)\varphi_i] - (C_{ui} v_{i-1}^* - (1-q)R_{1i}) \sin[(1+q)\varphi_i]}{(1+q) - (1-q)v_{i+1}^*} - \frac{(C_{ui} v_{i-1}^* - (1-q)R_{1i}) \sin[(1+q)\varphi_i]}{(q+1)v_{i+1}^* - (1-q)}, \\ B_{i+1}^* &= \frac{(C_{ui} v_{i+1}^* - (1-q)R_{1i}) \cos[(1+q)\varphi_i] - (C_{vi} + R_{2i}) \sin[(1+q)\varphi_i]}{(q+1)v_{i+1}^* - (1-q)} - \frac{(C_{vi} + R_{2i}) \sin[(1+q)\varphi_i]}{(1+q) - (1-q)v_{i+1}^*}, \\ C_{i+1}^* &= \frac{(C_{vi} + R_{2i}) \cos[(1-q)\varphi_i]}{(1+q) - (1-q)v_{i+1}^*} + \frac{(C_{ui} - (1+q)R_{1i}) \sin[(1-q)\varphi_i]}{(1+q) - (1-q)v_{i+1}^*}, \\ D_{i+1}^* &= \frac{(R_{1i+1}(1+q) - C_{ui}) \cos[(1-q)\varphi_i]}{(1+q) - (1-q)v_{i+1}^*} + \frac{(C_{vi} + R_{2i+1}) \sin[(1-q)\varphi_i]}{(1+q) - (1-q)v_{i+1}^*}, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} R_{1i} &= (v_{i+1}^* - v_i^*)(C_i \sin[(1-q)\varphi_i] - D_i \cos[(1-q)\varphi_i]), \\ R_{2i} &= (v_{i+1}^* - v_i^*)(1-q)(C_i \cos[(1-q)\varphi_i] - D_i \sin[(1-q)\varphi_i]), \\ & i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Отримане на основі (12) рекурентне співвідношення $M_i = M_1 + M_2^* + M_3^* + \dots + M_i^*$, $i = 2, 3, \dots, n$, $M \sim \{A, B, C, D\}$, після визначення з (13) M_i^* уможливорює запис виразів для переміщень (11) залежними лише від чотирьох невідомих коефіцієнтів A_1, B_1, C_1, D_1 . Згідно з законом Гука аналогічні вирази вдається отримати і для напружень. Задовольняючи ті чи інші крайові умови, отримуємо однорідну систему чотирьох лінійних алгебричних рівнянь стосовно A_1, B_1, C_1, D_1 . Через громіздкість їх тут не подаємо.

Необхідною умовою існування нетривіальних коренів однорідної системи лінійних алгебричних рівнянь є рівність визначника цієї системи нулеві. Ця вимога уможливорює побудову рівняння для визначення власних значень q_j . Зазначимо, що, оскільки нас цікавлять лише ті значення q_j , які призводять до появи у розв'язку сингулярності, з усієї можливої множини розв'язків записаного рівняння вибираємо ті, які належать інтервалу $(0, 1)$ [1, 6, 9].

За таких умов система зводиться до двох рівнянь з чотирма невідомими. Залежно від крайових умов розв'язок цієї системи матиме вигляд

$$A_1 = -C_1(1+q)/\Delta, \quad B_1 = D_1(1-q)/\Delta, \quad \Delta = q - 3 + 4v_1, \quad (14)$$

для першої основної крайової задачі теорії пружності та

$$A_1 = -C_1, \quad B_1 = D_1(3+q-4v_1)/\Delta \quad (15)$$

для другої основної крайової задачі теорії пружності.

У цьому випадку невідомі C_1, D_1 відіграють роль параметрів, що визначаються на основі загального напруженого стану системи. Їх обчислення є окремою задачею і описане в праці [9].

Двоклинова система. Для прикладу конкретизуємо запропонованим способом асимптотики напружень і деформацій та дослідимо порядок сингулярності напружень у системі, складеній із двох клинів S_1 і S_2 з кутами розхилу при вершині α_1, α_2 ($\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$) за наявності дефекту типу півбезмежної тріщини або півбезмежного абсолютно жорсткого включення, розміщених на ламаній межі поділу матеріалів (рис. 2). Вільна від навантажень півбезмежна тріщина моделюється умовами

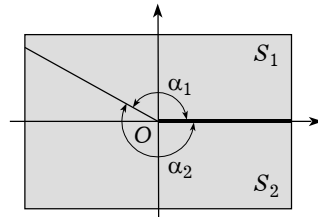


Рис. 2

$$\sigma_{\varphi\varphi}|_{\varphi=0} = \sigma_{\varphi r}|_{\varphi=0} = \sigma_{\varphi\varphi}|_{\varphi=2\pi} = \sigma_{\varphi r}|_{\varphi=2\pi} = 0,$$

а нерухоме жорстке включення –

$$u|_{\varphi=0} = v|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=2\pi} = v|_{\varphi=2\pi} = 0.$$

За допомогою викладеного вище методу побудовано такі рівняння для визначення значень q_i :

– для тріщини на ламаній межі поділу матеріалів

$$\begin{aligned} & -1 - (k - \gamma)^2 + (2 - k_1^2)\gamma^2 + (1 - k_1 - k_2)\gamma - 8q^4(\gamma - 1)^2 \sin^4 \varphi_1 + [1 + k_2^2 - \\ & - (k_1 - 1)(k_2 - 1)\gamma - 2k_1\gamma^2] \cos 2q\varphi_1 + (k_2 + \gamma)(1 + k_1\gamma) \cos 4\pi q - \\ & - [k_2(2 + (k_1 - 1)\gamma) - \gamma(k_1 - 1 + \gamma + k_1^2\gamma)] \cos [2q(2\pi - \varphi_1)] + \\ & + (\gamma - 1)(k_1\gamma - k_2) \cos [4q(\pi - \varphi_1)] - q^2[2(6\gamma - 3 - k_2^2 - (3 + k_1^2)\gamma^2 + \end{aligned}$$

$$+ 2k_1k_2\gamma) + 4(\gamma - 1)((k_2 + \gamma) \cos [2q(2\pi - \varphi_1)] - (1 + k_1\gamma) \cos 2q\varphi_1)] \sin^2 \varphi_1 = 0; \quad (16)$$

– для жорсткого включення

$$q\{-k_1(1+k_1)(1+k_2)\gamma - [2k_2^2 + (1-k_1)(1-k_2)k_2\gamma + k_1\gamma^2(1+k_2^2)] \cos 2q\varphi_1 + k_1 \cos 2\varphi_1[(k_1-1)k_2\gamma - 2k_2(\gamma-1)(k_2+\gamma) \cos [2q(\varphi_1-2\pi)] + (1+k_1-\gamma)\gamma - k_2^2(2+(\gamma-2)\gamma)] + k_2(\gamma-1)(k_1\gamma - k_2) \cos 4q(\varphi_1-\pi) + k_2(k_2+\gamma)(1+k_1\gamma) \cos 4\pi q\} + 2q^2(1+k_1)[1-k_1(1+2\gamma) - \gamma(1+\gamma)] \sin^2 \varphi_1 - [(1+k_1\gamma) \cos 2q\varphi_1 - k_1(\gamma-1) \cos 2\varphi_1]4q^3(\gamma-1) \sin^2 \varphi_1 - 2(1+k_1)k_2[k_2(1+k_1(\gamma-1)) - k_1\gamma] \sin^2[q(\varphi_1-2\pi)] = 0, \quad (17)$$

де $\gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1}$; $k_i = 3 - 4\nu_i$ – у випадку плоскої деформації; $k_i = \frac{3 - \nu_i}{1 + \nu}$ – у випадку плоского напруженого стану.

Слід зазначити, що рівняння (16), (17) можуть мати не лише дійсні, а й комплексні корені, що призводить до того, що в розв'язку задачі пружності появляються осцилюючі складові. Так, якщо в рівняннях (16), (17) покласти $\varphi_1 = \pi$, то внаслідок спрощення одержимо характеристичне рівняння для півбезмежної тріщини, розміщеної на лінії розділу середовищ [1, 2, 10].

Обчисливши корені характеристичних рівнянь (16), (17), вибираємо найменший з $q_i \in (0, 1)$, оскільки він породжує максимальну енергетично допустиму сингулярність $\lambda_{\max}^* = 1 - q_{\min}$, і множник при $r^{\lambda_{\max}^*}$ визначатиме напружено-деформований стан в околі вістря клинної системи. Підставивши відповідне значення $q_{\min} = \min q_i \in (0, 1)$ у співвідношення (13), (14), (15) та здійснивши необхідні перетворення, отримаємо асимптотики напружень і переміщень в околі вістря дефекту в такому вигляді:

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases} = \frac{\tilde{K}_1}{r^{\lambda^*-1}} \begin{cases} f_{11}(\varphi) \\ f_{21}(\varphi) \end{cases} + \frac{\tilde{K}_2}{r^{\lambda^*-1}} \begin{cases} f_{12}(\varphi) \\ f_{22}(\varphi) \end{cases},$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{r\varphi} \end{cases} = \frac{\tilde{K}_1}{r^{\lambda^*}} \begin{cases} g_{11}(\varphi) \\ g_{21}(\varphi) \\ g_{31}(\varphi) \\ g_{41}(\varphi) \end{cases} + \frac{\tilde{K}_2}{r^{\lambda^*}} \begin{cases} g_{12}(\varphi) \\ g_{22}(\varphi) \\ g_{32}(\varphi) \\ g_{42}(\varphi) \end{cases}, \quad (18)$$

$$g_{11}(\varphi) = 2(\lambda + \mu)f_{11}(\varphi) + \lambda f'_{21}(\varphi), \quad g_{12}(\varphi) = 2(\lambda + \mu)f_{12}(\varphi) + \lambda f'_{22}(\varphi),$$

$$g_{21}(\varphi) = 2(\lambda + \mu)f_{11}(\varphi) + (\lambda + 2\mu)f'_{21}(\varphi), \quad g_{31}(\varphi) = \lambda(2f_{11}(\varphi) + f'_{21}(\varphi)),$$

$$g_{22}(\varphi) = 2(\lambda + \mu)f_{12}(\varphi) + (\lambda + 2\mu)f'_{22}(\varphi), \quad g_{32}(\varphi) = \lambda(2f_{12}(\varphi) + f'_{22}(\varphi)),$$

$$g_{41}(\varphi) = \mu f'_{11}(\varphi), \quad g_{42}(\varphi) = \mu f'_{12}(\varphi).$$

У цих поданнях $\tilde{K}_1 = C_1$, $\tilde{K}_2 = D_1$ є аналогами узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень для лінійного дефекту в однорідному матеріалі [3].

Функції $f_{11}(\varphi)$, $f_{12}(\varphi)$, $f_{21}(\varphi)$, $f_{22}(\varphi)$ мають такий вигляд для тріщини:

$$f_{11}(\varphi) = \Delta \left\langle ab\mu_2 \cos 2\pi q + \{[k_1\mu_2 + cq(2l-1) + k_2(\mu_1 - cl)] \times \cos[2q(\varphi_1 - \pi)] - [cq + k_1\mu_2 l - k_2(c + \mu_1 l)] \cos 2\pi q - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - clq \cos[2l(\varphi_1 - \pi)] + q(\mu_1 e - \mu_2 d) \cos[2(\varphi_1 - \pi q)] + \\
& + cq(b - l) \cos[2(\varphi_1 m + \pi q)] \} S_+(\varphi - \varphi_1) \rangle, \\
f_{12}(\varphi) = & \Delta \langle db\mu_2 \sin 2\pi q + \{[(d - e)\mu_2 + acq - 2cq^2] \sin[2q(\varphi_1 - \pi)] + \\
& + [\mu_2(l - b) - eq\mu_1 + k_1\mu_2 l] \sin 2\pi q + (\mu_1 e - \mu_2 d)q \sin[2(\varphi_1 - \pi q)] - \\
& - cqm \sin[2(\varphi_1 l - \pi q)] + cq(b - l) \sin[2(\varphi_1 m + \pi q)] \} S_+(\varphi - \varphi_1) \rangle, \\
f_{21}(\varphi) = & \Delta \langle - db\mu_2 \sin 2\pi q + \{[(e - d)\mu_2 + acq + 2cq^2] \sin[2q(\varphi_1 - \pi)] + \\
& + [\mu_2(b - l) + eq\mu_1 + k_1\mu_2 m] \sin 2\pi q + (\mu_1 e - \mu_2 d)q \sin[2(\varphi_1 - \pi q)] + \\
& + cql \sin[2(\varphi_1 l - \pi q)] + cq(b - m) \sin[2(\varphi_1 m + \pi q)] \} S_+(\varphi - \varphi_1) \rangle, \\
f_{22}(\varphi) = & \Delta \langle b\mu_2 \cos 2\pi q + \{[k_1\mu_2 - cq(2m - 1) - k_2(ctm + \mu_1)] \times \\
& \times \cos[2q(\varphi_1 - \pi)] - [k_1\mu_2 m - cq + k_2(c + \mu_1 m)] \cos 2\pi q - \\
& - ctmq \cos[2l(\varphi_1 - \pi)] + q(\mu_2 d - \mu_1 e) \cos 2(\varphi_1 - \pi q) + \\
& + cq(b - m) \cos[2(\varphi_1 m + \pi q)] \} S_+(\varphi - \varphi_1) \rangle, \tag{19} \\
a = 1 + k_1, \quad b = 1 + k_2, \quad c = \mu_1 - \mu_2, \quad d = 1 - k_1, \\
e = 1 - k_2, \quad l = 1 + q, \quad m = 1 - q, \quad \Delta = \frac{1}{\mu_2(1 + k_2)(k_1 - q)},
\end{aligned}$$

і такий для жорсткого включення:

$$\begin{aligned}
f_{11}(\varphi) = & \Delta \{ [k_2\mu_1 d - k_1\mu_2 e + (a - e)cq - 2cq^2] \cos[2q(\varphi_1 - \pi)] + \\
& + [k_1\mu_2 l + cq + k_2(k_1 c - \mu_1 l)] \cos 2\pi q + q(d\mu_2 - e\mu_1) \cos[2(\varphi_1 + \pi q)] + \\
& + cq(l - b) \cos 2(\varphi_1 m + \pi q) + cq(l - a) \cos[2(\pi q - \varphi_1 a)] \} S_+(\varphi - \varphi_1), \\
f_{12}(\varphi) = & \Delta \langle \{ [k_1\mu_2 l + cq - k_2(k_1 c + \mu_1 l)] \sin 2\pi q + cq(a - m) \times \\
& \times \sin[2(\varphi_1 l - \pi q)] + [k_2\mu_1 a - k_1\mu_2 b - qc(a - b) - \\
& - 2cq^2] \sin[2q(\varphi_1 - \pi)] + q(\mu_1 e - \mu_2 d) \sin[2(\varphi_1 - \pi q)] + \\
& + cq(b - l) \sin 2(\varphi_1 m + \pi q) \} S_+(\varphi - \varphi_1) - 2k_1\mu_2 b \sin 2\pi q \rangle, \\
f_{21}(\varphi) = & \Delta \langle \{ [cq - k_1\mu_2 m + k_2(\mu_1 m + k_1 c)] \sin 2\pi q + cq(a - l) \times \\
& \times \sin[2(\varphi_1 l - \pi q)] + [2cq^2 - k_2\mu_1 a + k_1\mu_2 b + \\
& + cq(b - a)] \sin[2q(\varphi_1 - \pi)] + q(\mu_1 e - \mu_2 d) \sin[2(\varphi_1 - \pi q)] + \\
& + cq(b - m) \sin 2(\varphi_1 m + \pi q) \} S_+(\varphi - \varphi_1) + 2k_1\mu_2 b \sin 2\pi q \rangle, \\
f_{22}(\varphi) = & \Delta \{ [k_2\mu_1 d - k_1\mu_2 e - (a - e)cq - 2cq^2] \cos 2q(\varphi_1 - \pi) + \\
& + [k_1\mu_2 l - cq + k_2(k_1 c - \mu_1 m)] \cos 2\pi q + q(e\mu_1 - d\mu_2) \cos[2(\varphi_1 + \pi q)] + \\
& + cq(b - m) \cos 2(\varphi_1 m + \pi q) + \\
& + cq(a - m) \cos[2(\pi q - \varphi_1 a)] \} S_+(\varphi - \varphi_1). \tag{20}
\end{aligned}$$

Поклавши у співвідношеннях (19), (20) $k_2 = k_1$, $\gamma = 1$, отримаємо з (18) відомі співвідношення для півбезмежних тріщини та абсолютно жорсткого включення в однорідному матеріалі [3, 9].

На рис. 3, 4 наведено результати обчислень порядку сингулярності $\lambda_{\max}^* = 1 - q_{\min}$ залежно від кута розхилу $0 < \varphi_1 = \alpha_1 < 2\pi$ для різних значень відношення модулів зсуву $\gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ у випадку півбезмежної тріщини на ламаній межі матеріалів (рис. 3) та у випадку півбезмежного абсолютно жорсткого включення на ламаній межі матеріалів (рис. 4) відповідно при фіксованих сталих $\nu_1 = 0.33$ і $\nu_2 = 0.25$.

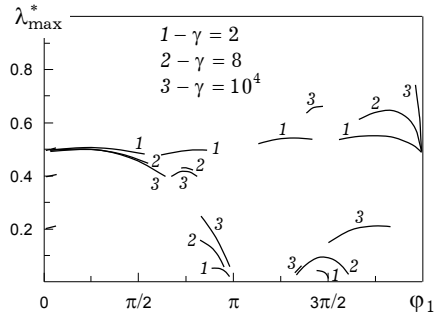


Рис. 3

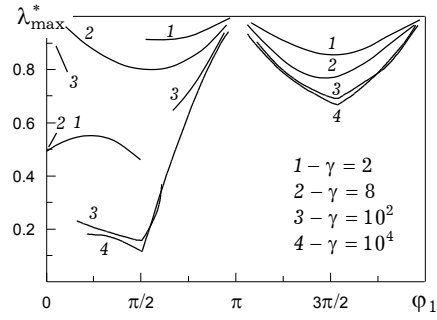


Рис. 4

Аналіз результатів. Зауважимо, що коренів q_i характеристичних рівнянь (16), (17), як правило, є більше ніж один, а в загальному випадку є також і комплексні корені, які в цій праці не досліджуємо. Цим, зокрема, можна пояснити розриви та стрибки в графіках найбільшого значення порядку сингулярності (рис. 3, 4).

Для випадку тріщини, розміщеної на ламаній межі поділу (рис. 3) матеріалів, характерним є те, що при $\gamma > 1$ для значень кута $\phi_1 \in (0, 60^\circ)$ максимальний порядок сингулярності близький до значення $0.5: 0.495 < \lambda_{\max}^* < 0.5$, і спадає зі зростанням кута; для $\phi_1 \in (60^\circ, 170^\circ)$ значення порядку сингулярності відрізняються не більше ніж на $\delta = 0.02$. У випадку $\gamma > 10$ і $240^\circ < \phi_1 < 300^\circ$ зберігається близькість значень порядку сингулярності для однакових значень кута ϕ_1 , лише при $300^\circ < \phi_1 < 340^\circ$ розкид значень збільшується до $\delta = 0.2$. Якщо $\phi_1 \in (60^\circ, 150^\circ)$ і $\gamma < 10$, то порядок сингулярності більший, ніж у випадку $\gamma \geq 10$, а його значення є тим більшим, чим меншим є γ . При значеннях $\gamma < 5$ порядок сингулярності є в межах $0.4 < \lambda_{\max}^* < 0.55$, за винятком окремих областей значень кута ϕ_1 , у яких порядок наближається до нуля. Слід зазначити, що в області $170^\circ < \phi_1 < 240^\circ$ для $\gamma > 10$ відсутні дійсні значення порядку сингулярності, а сама область зменшується зі зменшенням γ . На графіках (рис. 3) можна простежити й інші області, у яких відсутні дійсні значення порядку сингулярності.

У випадку, коли на ламаній межі поділу матеріалів розміщене абсолютне жорстке півбезмежне включення (рис. 4), якісна картина дещо інша. Якщо $\phi_1 > 180^\circ$, то порядок сингулярності є вищим, ніж у випадку півбезмежної тріщини, а його значення тим більше, чим менше відношення модулів зсуву. При значенні $\gamma > 10$ розкид значень порядку сингулярності не більший ніж $\delta = 0.02$. Для значень кута $\phi_1 < 180^\circ$ якісна картина сильніше залежить від відношення модулів зсуву. Наприклад, при $\gamma < 5$ маємо $\lambda_{\max}^* = 0.5 \pm 0.1$ для кутів $0^\circ < \phi_1 < 90^\circ$ і $\lambda_{\max}^* = 0.95 \pm 0.05$ для $90^\circ < \phi_1 < 180^\circ$; при $5 < \gamma < 10$ маємо $\lambda_{\max}^* = 0.5 \pm 0.05$ для $0^\circ < \phi_1 < 20^\circ$ і $\lambda_{\max}^* = 0.9 \pm 0.1$ для $20^\circ < \phi_1 < 180^\circ$, а значення порядку сингулярності тим менше, чим більше γ . Якщо $10 < \gamma < 1000$, то для $0^\circ < \phi_1 < 20^\circ$ отримуємо $\lambda_{\max}^* = 0.9 \pm 0.1$. Для $\gamma > 1000$ дійсні значення порядку сингулярності на проміжку значень кута розхилу $0^\circ < \phi_1 < 40^\circ$ відсутні. Для $\gamma > 10$ і кута розхилу $40^\circ < \phi_1 < 90^\circ$ порядок сингулярності лежить в межах $0.1 < \lambda_{\max}^* < 0.25$ і на проміжку $90^\circ < \phi_1 < 180^\circ$ прямує до 1, причому для різних значень відношення модулів зсуву різниця значень порядку сингулярності не перевищує $\delta = 0.05$ і меншому значенню γ відповідає більше значення λ_{\max}^* . В околі $\phi_1 = 180^\circ$ для всіх значень γ відсутні дійсні значення порядку сингулярності.

1. Боджи Д. Б. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных по граням упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора // Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Прикл. механика. – 1971. – **38**, № 2. – С. 87–96.
2. Боджи Д. Б. Плоская задача о нагруженной трещине, заканчивающейся на границе раздела материалов // Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Прикл. механика. – 1971. – **38**, № 4. – С. 196–198.
3. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1994. – 945 с.
4. Бутвинник И. П. К теории дефектов типа трещин вблизи линий раздела сред // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1989. – **25**, № 4. – С. 102–104.
5. Бутвинник И. П., Бережницкий Л. Т., Похмурский В. И. О порядке сингулярности напряжений в композитах при антиплоской деформации // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1983. – **19**, № 2. – С. 96–97.
6. Денисюк І. Т. Сингулярні напруження в ізотропній матриці з пружним клином // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, № 4. – С. 76–81.
7. Коляно Ю. М., Кулик А. Н., Кушнир Р. М. О постановке обобщенной задачи сопряжения для уравнений термоупругости кусочно-однородных тел // Доп. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 2. – С. 44–49.
8. Кушнир Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
9. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
10. Райс С. Плоские задачи о трещинах, расположенных на границе раздела двух различных сред // Тр. Амер. о-ва инж.-механиков. Прикл. механика. – 1965. – **32**, № 2. – С. 186–192.
11. Саврук М. П. Поздовжній зсув пружного клина з тріщинами та вирізами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 5. – С. 57–65.
12. Саврук М. П. Про сингулярність напружень у вершині кутового вирізу в нелінійному матеріалі // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій. – 1999. – Т. 2. – С. 205–208.
13. Улітко А. Ф., Ловейкін А. В. Задача про рівновагу простору з двома розрізами – по півплощині та клиноподібним у плані, які лежать в одній площині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 1. – С. 109–114.
14. Улітко А. Ф., Ловейкін А. В. Рівновага пружного простору, послабленого плоским, клиноподібним в плані, розрізом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 2. – С. 108–114.

АСИМПТОТИКИ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В КЛИНЬЕВЫХ СИСТЕМАХ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Приведена методика определения порядка сингулярности и построения асимптотик напряжений и перемещений в клинневой системе при условиях плоского напряженного состояния. Построены асимптотики напряжений и уравнения для определения порядка сингулярности в окрестности вершины тонкого полубесконечного дефекта типа трещины или абсолютно жесткого включения, расположенных на ломаной линии раздела двух различных сред. Численно исследованы зависимости порядка сингулярности от отношения модулей сдвига материалов и от угла излома границы их раздела.

ASYMPTOTICS OF STRAINS AND DISPLACEMENTS FIELDS IN WEDGE SYSTEMS UNDER PLANE STRAINED CONDITION

We present the method for singularity order determination and the technique of strains and displacements asymptotic formation in a wedge system under plane strained condition. We have constructed our strain asymptotics and equations for determination the singularity order near the tip of a thin semi-indefinite defect similar to the crack or absolutely rigid inclusion located on the broken interface of two different environments. Also we performed computational investigation of the singularity order dependence on material shifts modules' ratio and on break angle of their interface.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано
19.06.06

² Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів