УДК 539.3

Я. І. Кунець, В. В. Матус, В. В. Пороховський

ДИНАМІЧНА КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ В ОКОЛІ ЗАГЛИБЛЕНОГО ТОНКОГО ПРЯМОЛІНІЙНОГО ВКЛЮЧЕННЯ НИЗЬКОЇ ЖОРСТКОСТІ В УМОВАХ АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Досліджуються нестаціонарні напруження поблизу країв прямолінійного тонкого тунельного включення змінної товщини та низької жорсткості, що знаходиться у пружному півпросторі паралельно до поверхні. Пружна система перебуває в умовах поздовжнього зсуву при дії на неї імпульсу SH-хвиль. Методика дослідження ґрунтується на використанні інтегрального перетворення Фур'є за часом, методу сингулярних інтегральних рівнянь і методу ортогональних многочленів.

У роботі [2] досліджено особливості поведінки напружень поблизу країв тонкого пружного тунельного включення у півпросторі за умов поздовжнього зсуву та усталених коливань композиту. У цій статті запропонований там алгоритм у поєднанні з методом інтегрального перетворення Фур'є за часом застосовується для вивчення концентрації напружень в околі тонких неоднорідностей у півпросторі при дії на них імпульсів SH-хвиль різної форми. Вивчається також випадок приповерхневих дефектів, що має важливе практичне і теоретичне значення внаслідок наявності резонансних частот у спектрах розсіяних сигналів [1, 6]. У подібних постановках задачі дифракції пружних хвиль на тонких недосконалостях розглядались раніше в [2–5, 7].

Розглянемо однорідне напівобмежене середовище $x_2 \le H$, $|x_1| \le \infty$ з модулем зсуву μ і густиною ρ, у якому знаходиться тонке пружне тунельне включення з параметрами μ_0, ρ_0, що в довільному поперечному перетині займає область $W_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : |x_1| \le a,\ 2|x_2| \le h(x_1)\}$ (тут $h(x)$ і $2a$ – товщина та довжина неоднорідності; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – прямокутна система координат). Між включенням і зовнішнім середовищем має місце ідеальний механічний контакт. Припускаємо, що пружна система знаходиться в умовах поздовжнього зсуву при неусталених її коливаннях. У такому випадку відмінна від нуля компонента вектора зміщень задовольняє рівняння

$$\mu \Delta u(\mathbf{x}, t) - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{x}, t) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus W_\varepsilon,$$

$$\mu_0 \Delta u^0(\mathbf{x}, t) - \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^0(\mathbf{x}, t) = 0, \qquad \mathbf{x} \in W_\varepsilon, \tag{1}$$

та умови контакту

$$u(\mathbf{x}, t) = u^0(\mathbf{x}, t),$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial n^0} = \gamma \frac{\partial u^0(\mathbf{x}, t)}{\partial n^0}, \qquad \mathbf{x} \in \partial W_\varepsilon, \qquad \gamma = \mu_0/\mu, \tag{2}$$

де $u(\mathbf{x})$ – повне поле зміщень в матриці; $u^0(\mathbf{x})$ – зміщення у включенні; t – час; n^0 – зовнішня нормаль до ∂W_ε.

Припускаємо, що поверхня півпростору вільна від напружень:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} = 0, \qquad |x_1| < \infty, \qquad x_2 = H. \tag{3}$$

На включення набігає імпульс SH-хвиль

$$u^{\text{in}}(\mathbf{x},t) = u_0 f\left[\tau - (x_1 \cos\theta_{\text{in}} + x_2 \sin\theta_{\text{in}})/a\right], \tag{4}$$

де $f(\tau)$ – модуляція імпульсу в часі, $f(\tau) = 0$ при $\tau < 0$; $\tau = ct/a$; θ_{in} – кут падіння хвилі; c – швидкість поперечних хвиль у матриці.

Повне поле зміщень в матриці доцільно подати у вигляді

$$u(\mathbf{x},\tau) = u^{\text{in}}(\mathbf{x},\tau) + u^{\text{r}}(\mathbf{x},\tau) + u^{\text{s}}(\mathbf{x},\tau),$$

$$u^{\text{r}}(\mathbf{x},\tau) = u_0 f\left[\tau - (x_1 \cos\theta_{\text{in}} - (x_2 - 2H)\sin\theta_{\text{in}})/a\right], \tag{5}$$

де $u^{\text{r}}(\mathbf{x},\tau)$ – імпульс хвиль, відбитий від поверхні півпростору без включення, складова $u^{\text{s}}(\mathbf{x},\tau)$ враховує наявність дефекту та задовольняє нульові граничні умови на поверхні матриці.

Використовуючи перетворення Фур'є за часом

$$g(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\exp(i\omega\tau)\,d\tau, \qquad g(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\exp(-i\omega\tau)\,d\omega,$$

для визначення Фур'є-густини $u^{\text{s}}(\mathbf{x},\omega)$ розв'язку задачі (1)–(5) отримуємо відповідну стаціонарну задачу, вивчену в [2]. Причому

$$u^{\text{in}}(\mathbf{x},\omega) = u_0 f(\omega)\exp\left[i\omega\,(x_1\cos\theta_{\text{in}} + x_2\sin\theta_{\text{in}})/a\right],$$

$$u^{\text{r}}(\mathbf{x},\omega) = u_0 f(\omega)\exp\left[i\omega\,(x_1\cos\theta_{\text{in}} - (x_2 - 2H)\sin\theta_{\text{in}})/a\right],$$

де $u^{\text{in}}(\mathbf{x},\omega)$, $u^{\text{r}}(\mathbf{x},\omega)$ та $f(\omega)$ – Фур'є-густини величин $u^{\text{in}}(\mathbf{x},\tau)$, $u^{\text{r}}(\mathbf{x},\tau)$ та $f(\tau)$ відповідно.

Числові розрахунки проводимо для динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень $K^{\pm}(\tau)$ при сталій товщині включення $h = \varepsilon a$:

$$K^{\pm}(\tau) = \frac{1}{u_0}\lim_{x_1 \to \pm a}\frac{1}{\sqrt{1 \mp x_1/a}}\,\Phi(x_1,\tau),$$

$$\Phi(x_1) = u(x_1,+0) - u(x_1,-0), \qquad |x_1| < a, \qquad x_2 = 0.$$

Алгоритм обчислення величин $K^{\pm}(\omega)$ подано у [2].

У подальшому модуляцію імпульсу за часом приймаємо у такому вигляді ($n_* \ge 0$):

– *квазімонохроматичний імпульс*

$$f(\tau) = \sin(\omega_*\tau), \qquad \tau < \tau_*, \qquad f(\tau) = 0, \qquad \tau > \tau_*;$$

– *імпульс у формі слабої ударної хвилі*

$$f(\tau) = p_*\tau^{n_*}\exp(-\alpha_*\tau), \qquad \tau > 0.$$

На рис. 1, 2 показано часові залежності коефіцієнта інтенсивності напружень $K_0 = K^{\pm}(\tau)$ при $\theta_{\text{in}} = 90°$, $h_0 = H/a = 1.5$ для квазімонохроматичного імпульсу ($\omega_* = 6$, $\tau_* = 1.05$) та імпульсу у формі слабої ударної хвилі ($\alpha_* = 10$, $n_* = 2$, $p_* = 185$) відповідно. При цьому порівнюються випадки $\gamma_1 = \gamma/\varepsilon = 0$ (тріщина) та $\gamma_1 = 2$. З ілюстрацій бачимо, що наведені результати для різних форм набігаючих на неоднорідність імпульсів $u^{\text{in}}(\mathbf{x},\tau)$ можна проаналізувати за часами затримки сигналів, що приходять на краї неоднорідності. Збільшення модуля амплітуди K_0, що починається при $\tau = 0$, відповідає приходу в кінець включення збурювального імпульсу u^{in}.

При $\tau = 2$ на край дефекту приходить імпульс, дифрагований протилежним його кінцем, а при $\tau = 3$ та $\tau = 6$ приходять імпульси, дифраговані краями дефекту та перевідбиті поверхнею півпростору. Причому з ростом жорсткості матеріалу спостерігається швидке затухання перших імпульсів, що не характерно для другого класу складових часових залежностей. Спостерігається також зменшення максимального рівня амплітуд коефіцієнта інтенсивності при збільшенні параметра γ_1.

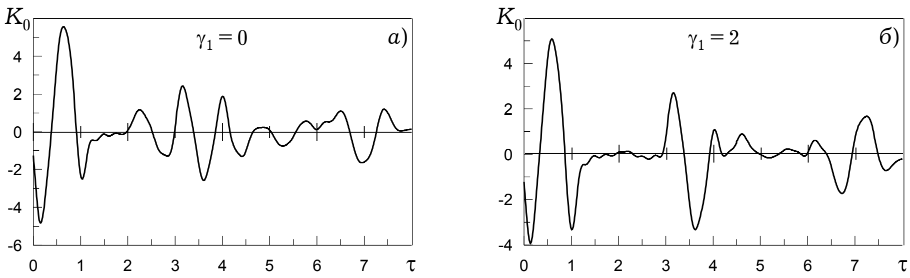

Рис. 1

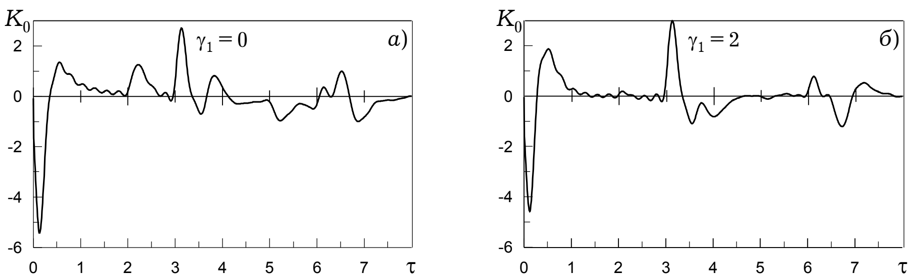

Рис. 2

На рис. 3, 4 наведено часові залежності коефіцієнта K_0 для приповерхневих включень ($\theta_{\text{in}} = 90°$, $h_0 = H/a = 0.1$) при $\gamma_1 = 0$ та $\gamma_1 = 1$ відповідно.

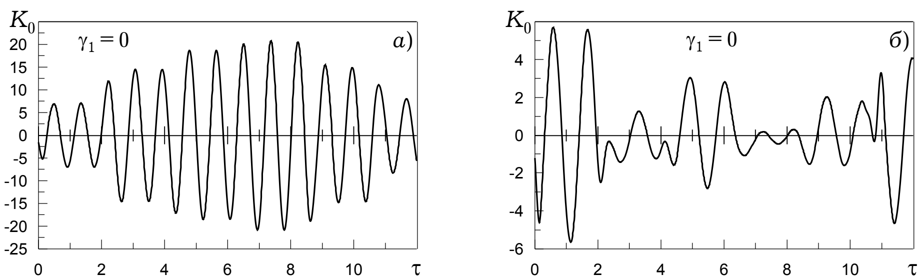

Рис. 3

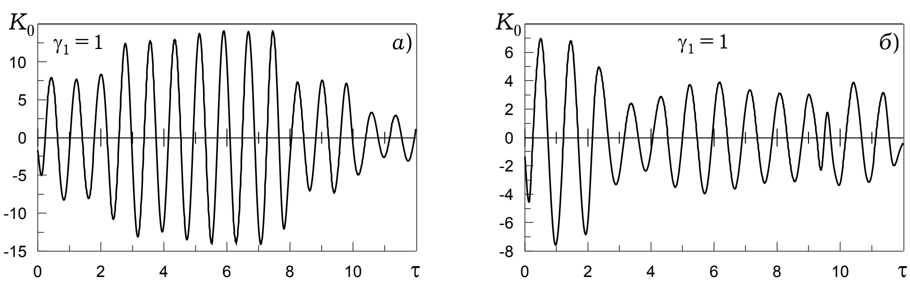

Рис. 4

Припускається, що на дефект набігає квазімонохроматичний імпульс великої тривалості посилки τ_*. Несуча частота імпульсу ω_* вибиралась на максимумах ($\omega_* = 7.3$, $\tau_* = 8.0$ – рис. 3*а*; $\omega_* = 8.05$, $\tau_* = 7.8$ – рис. 4*а*) та мінімумах ($\omega_* = 5.8$, $\tau_* = 10.8$ – рис. 3*б*; $\omega_* = 6.65$, $\tau_* = 9.5$ – рис. 4*б*) амплітуд відповідних спектральних залежностей. Спостерігається різке збільшення амплітуд коефіцієнтів інтенсивності напружень для приповерхневих дефектів, коли ω_* співпадає з резонансними частотами коливань (рис. 3*а*, рис. 4*а*) тонкого прошарку між включенням та поверхнею півпростору [2], що може призвести до швидкого руйнування композиту. Подібні явища описані, наприклад, у [1, 6]. При виборі ω_* на нерезонансних частотах різкого збільшення величини K_0 не спостерігається (рис. 3*б*, рис. 4*б*). При цьому наведені результати також можна проаналізувати за часами затримки сигналів, що приходять на краї неоднорідності.

1. *Бабешко В. А., Ворович И. И., Образцов И. Ф.* Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 3. – С. 74–83.
2. *Грилицький М. Д., Кунець Я. І., Матус В. В., Пороховський В. В.* Дифракція SH-хвиль тонким прямолінійним тунельним включенням низької жорсткості в півпросторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49,** № 4. – С. 92–96.
3. *Кіт Г. С., Кунець Я. І., Міщенко В. О.* Взаємодія імпульсів SH-хвиль з тонкими пружними м'якими неоднорідностями // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. – 2002. – № 1. – С. 109–113.
4. *Мойсеєнок О. П., Попов В. Г.* Концентрація напружень поблизу тонкого пружного включення під дією нестаціонарної хвилі поздовжнього зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 4. – С. 172–177.
5. *Попов В. Г.* Исследование полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 139–146.
6. *Keer L. M., Lin W., Achenbach J. D.* Resonance effects for a crack near a free surface // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1984. – **51**, No. 1. – P. 65–70.
7. *Mykhas'kiv V.* Transient response of plane rigid inclusion to an incident wave in an elastic solid // Wave Motion. – 2005. – **41**. – P. 133–144.

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ УГЛУБЛЕННОГО ТОНКОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ МАЛОЙ ЖЕСТКОСТИ В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Исследуются нестационарные напряжения возле краев прямолинейного тонкого туннельного включения переменной толщины и малой жесткости, которое находится в упругом полупространстве параллельно к поверхности. Упругая система находится в условиях антиплоского сдвига при воздействии на нее импульса SH-волн. Методика базируется на использовании интегрального преобразования Фурье по времени, метода сингулярных интегральных уравнений и метода ортогональных многочленов.

DYNAMIC STRESS CONCENTRATION IN THE VICINITY OF SUBMERGED THIN PLANE INCLUSION OF LOW RIGIDITY UNDER ANTIPLANE STRAIN

The transient stresses near the edges of a thin plane tunnel inclusion of variable thickness and low rigidity that is in elastic half-space in a parallel way to the surface are studied. The elastic system is under the conditions of antiplane shear and under the pulse of SH-wave. The procedure is based on application the integral Fourier time transform, the method of singular integral equations, and method of orthogonal polynomials.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
16.09.06