УДК 539.3

В. З. Станкевич

ВЗАЄМОДІЯ ТРІЩИН У ПРУЖНОМУ ТІЛІ, ЩО ОМИВАЄТЬСЯ РІДИНОЮ, ЗА ГАРМОНІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Метод граничних інтегральних рівнянь застосовано до розв'язання динамічної задачі про взаємодію компланарних кругових тріщин у пружному півпросторі, що омивається рідиною. На поверхні тріщин діють усталені в часі розривні навантаження. Отримано та проаналізовано коефіцієнти інтенсивності напружень в околах контурів дефектів.

Напружено-деформований стан композитних тіл із тріщинами під дією динамічних навантажень у випадках плоскої та осесиметричної постановок задач досліджено в роботах [9–11]. Для розв'язування вказаних задач у тривимірній постановці використано метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР) [2, 3, 6, 8]. У цій роботі досліджено динамічну концентрацію напружень поблизу компланарних тріщин у біматеріальному тілі, однією із складових якого є рідина.

Розглянемо біматеріальне тіло, яке складається з нижнього пружного ізотропного півпростору з густиною ρ, модулем зсуву G, коефіцієнтом Пуассона μ і верхнього півпростору, який є ідеальною нестисливою рідиною з густиною ρ_p. Нижній півпростір містить K плоских компланарних кругових тріщин, що займають області S_k, $k = 1,\ldots,K$, і розміщені на однаковій глибині залягання $d = |O_0O_1|$ у площині, перпендикулярній до поверхні S_0 поділу середовищ. Протилежні поверхні $S_k^{\pm}$ тріщин зазнають дії самозрівноважених гармонічних розривних зусиль

$$N_{3k}^{+}(\mathbf{x}_k, t) = -N_{3k}^{-}(\mathbf{x}_k, t) = N_{3k}(\mathbf{x}_k)\exp(-i\omega t),$$

де ω – частота прикладеного навантаження; t – час; N_{3k}, $k = 1,\ldots,K$, – амплітудні значення зусиль; $i = \sqrt{-1}$. Приймаємо, що в процесі навантаження тіла тріщини не поширюються і контакт їх протилежних поверхонь відсутній. Виберемо локальні декартові системи координат $O_k x_{1k} x_{2k} x_{3k}$, $k = 0,1,\ldots,K$, так, щоб нижньому півпростору відповідала область $x_{30} \le 0$, а області S_k тріщин містились у координатних площинах $x_{1k}O_k x_{2k}$ (рис. 1).

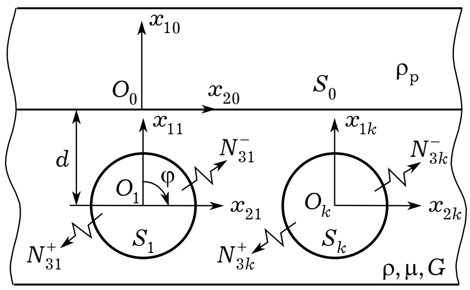

Рис. 1

Задача про визначення напружено-деформованого стану такого тіла з дефектами зводиться до розв'язування диференціальних рівнянь

$$\rho_p\omega^2\mathbf{u}_p - \operatorname{grad} p = 0, \qquad \mathbf{\Delta}_3\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\mu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{\rho\omega^2}{G}\mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$u_3(\mathbf{x}_0) = u_{3p}(\mathbf{x}_0), \quad \sigma_{33}(\mathbf{x}_0) = p(\mathbf{x}_0), \quad \sigma_{13}(\mathbf{x}_0) = \sigma_{23}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad \mathbf{x}_0 \in S_0,$$

$$\sigma_{33k}(\mathbf{x}_k) = -N_{3k}(\mathbf{x}_k), \qquad \mathbf{x}_k \in S_k, \qquad k = 1,\ldots,K,$$

$$N_{1k}(\mathbf{x}_k) = N_{2k}(\mathbf{x}_k) = 0, \qquad k = 1,\ldots,K. \tag{2}$$

Тут $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{u}_\text{p}(u_{1\text{p}}, u_{2\text{p}}, u_{3\text{p}})$ – відповідно амплітудні значення векторів переміщень у пружному півпросторі та рідині; p, σ_{j3k} – амплітудні значення гідростатичного тиску та компонентів тензора напружень; $\boldsymbol{\Delta}_3$ – тривимірний оператор Лапласа.

Переміщення у довільній точці нижнього півпростору, зумовлені переміщеннями u_{j0}, $j = 1, 2, 3$, межі S_0 і переміщеннями u_{jk} від взаємного розкриття протилежних поверхонь $S_k^{\pm}$ тріщин, будуть

$$u_j(x_0) = u_{j0}(x_0) + \sum_{k=1}^{K} \left[\delta_{j1} u_{2k}(x_{k0}) + \delta_{j2} u_{3k}(x_{k0}) + \delta_{j3} u_{1k}(x_{k0})\right].$$

Тут δ_{ji} – символ Кронекера; переміщення $u_{jk}(x_k)$ вибрано у вигляді інтегральних подань [3]

$$u_{jk}(x_k) = -\frac{\partial P_{3k}^{(1)}}{\partial x_{jk}} + (1 - \delta_{j3}) \left[2 \frac{\partial P_{3k}^{(2)}}{\partial x_{jk}} + \frac{\partial P_{jk}^{(2)}}{\partial x_{3k}}\right] + \frac{2}{\omega_2^2} \frac{\partial}{\partial x_{jk}} \sum_{m=1}^{3} \left[\delta_{m3} \Delta_k + \right.$$

$$\left. + (1 - \delta_{m3}) \frac{\partial^2}{\partial x_{j3} \partial x_{mk}}\right] \sum_{\ell=1}^{2} (-1)^{\ell+1} P_{mk}^{(\ell)}, \quad k = 0, \ldots, K, \tag{3}$$

де $P_{jk}^{(\ell)}(x_k) = \iint\limits_{S_k} \Delta u_{jk}(\xi) \Phi_\ell(x_k, \xi)\, dS_\xi$, $j = 1, 2, 3$, $\ell = 1, 2$, – потенціали Гельмгольца; $\Phi_\ell(x_k, \xi) = \dfrac{\exp(i\omega_\ell\, |x_k - \xi|)}{|x_k - \xi|}$; $|x_k - \xi| = \left[\sum\limits_{n=1}^{2} (x_{nk} - \xi_n)^2\right]^{1/2}$; $\Delta_k = \dfrac{\partial^2}{\partial x_{1k}^2} + $ $+ \dfrac{\partial^2}{\partial x_{1k}^2}$ – двовимірний оператор Лапласа. Координати x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, $k = 0, 1, \ldots, K$, точки x_k у k-й системі координат пов'язані з координатами $x_{1nk}, x_{2nk}, x_{3nk}$, $n = 0, 1, \ldots, K$, цієї ж точки x_{nk} в n-й системі координат співвідношеннями

$$x_{1nk} = x_{1k}, \quad x_{2nk} = d_{nk} \cos(d_{nk}, x_{2k}) + x_{2k},$$

$$d_{nk} = |O_n O_k|, \qquad n, k = 1, \ldots, K.$$

Переміщення у довільній точці $u_{j\text{p}}$, $j = 1, 2, 3$, рідини вибрано у вигляді

$$u_{j\text{p}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \iint\limits_{S_0} \Delta u_{j\text{p}}(\xi) \Phi_\text{p}(x_0, \xi)\, dS_\xi, \qquad \Phi_\text{p}(x_0, \xi) = \frac{\exp\left[i\omega_\text{p}\, |x_0 - \xi|\right]}{|x_0 - \xi|}.$$

Тут $\omega_\text{p} = \dfrac{\omega}{c_\text{p}}$, c_p – швидкість поширення пружної хвилі у рідині; $\omega_\ell = \dfrac{\omega}{c_\ell}$, $\ell = 1, 2$, де c_1 і c_2 – відповідно швидкості поширення в нижньому півпросторі поздовжньої і поперечної пружних хвиль.

Невідомі густини Δu_{jk}, $j = 1, 2, 3$, $k = 1, \ldots, K$, потенціалів $P_{jk}^{(\ell)}(x_k)$ характеризують зміщення точок протилежних поверхонь тріщин у напрямі $O_k x_{jk}$, густини Δu_{j0} і $\Delta u_{j\text{p}}$ характеризують зміщення точок поверхні S_0 відповідно нижнього півпростору та рідини. Для вказаного вище розташування і навантаження у тілі тріщин відмінними від нуля будуть лише розриви Δu_{3k}, $k = 1, \ldots, K$, нормальних зміщень.

Визначаючи за законом Гука напруження на місці розташування тріщин і задовольняючи крайові умови (2), задачу динамічної теорії пружності зводимо до розв'язування системи K двовимірних граничних інтегральних рівнянь типу потенціалу Гельмгольца відносно невідомих густин Δu_{3k} [3]:

$$\iint_{S_k} \frac{\Delta u_{3k}(\xi)}{|x_k-\xi|^5} \mathcal{E}(x_k,\xi)\, dS_\xi + \sum_{n=1}^{K}(1-\delta_{nk}) \iint_{S_k} \frac{\Delta u_{3n}(\xi)}{|x_{nk}-\xi|^5} \mathcal{E}(x_{nk},\xi)\, dS_\xi +$$

$$+2\sum_{n=1}^{K} \sum_{m,\ell=1}^{2} \iint_{S_n} \Delta u_{3n}(\xi) \int_0^\infty \frac{\tau}{R(\tau)} \left[A_{m\ell}(\tau) + \omega_2^2 \frac{\rho_p}{\rho} \frac{R_1(R_3-R_1R_2)}{R_p F_{St}(\tau)} B_{m\ell}(\tau) \right] \times$$

$$\times \Omega_{m\ell}(x_{nk},\xi,\tau) \frac{\exp\left[-|b_1|R_m - |b_2|R_\ell\right]}{R_m R_\ell} d\tau\, dS_\xi =$$

$$= \frac{\omega_2^2}{4G} N_{3k}(x_k), \qquad x_k \in S_k, \tag{4}$$

де $|x_{nk}-\xi| = \left[(2d_{nk}-x_{1nk}-\xi_1)^2 + (x_{2nk}-\xi_2)^2\right]^{1/2}$; $R_j = \sqrt{\tau^2-\omega_j^2}$, $j=1,2$; $R_3 = \tau^2 - \dfrac{\omega_2^2}{2}$; $R_p = \sqrt{\tau^2-\omega_p^2}$; $F_{St}(\tau) = R(\tau) + \dfrac{\rho_p}{\rho}\dfrac{\omega_2^4}{4}\dfrac{R_1}{R_p}$ − функція Стоунлі, $R(\tau) = R_3^2 - \tau^2 R_1 R_2$ − функція Релея.

Ядра $\mathcal{E}(x_{nk},\xi)$, $\Omega_{m\ell}(x_{nk},\xi,\tau)$ мають вигляд

$$\mathcal{E}(x_{nk},\xi) = \sum_{m=1}^{2}(-1)^{m+1} V_m\left(|x_{nk}-\xi|\right)\exp\left(i\omega_m |x_{nk}-\xi|\right),$$

$$V_m(z) = 9 - 9i\omega_m z - \left(5\omega_2^2-\omega_m^2\right)z^2 + i\omega_m\left(2\omega_m^2-\omega_2^2\right)z^3 +$$

$$+\delta_{1m}\left(2\omega_1^2-\omega_2^2\right)^2 \frac{z^4}{4},$$

$$\Omega_{m\ell}(x_{nk},\xi,\tau) = (-1)^{m+1}\left[\delta_{1m}\delta_{1\ell}\Omega_0 + (1-\delta_{m\ell})\Omega_1 + \delta_{2m}\delta_{2\ell}\Omega_2\right],$$

$$\Omega_k = \left[\frac{\mu\omega_2^2}{2(1-\mu)}\right]^{2-k} \left(\frac{\tau}{b_3}\right)^k J_k(\tau b_3), \qquad k=0,1,2.$$

Тут $b_1 = |d-x_{1nk}|$, $b_2 = |d-\xi_1|$, $b_3 = |x_{2nk}-\xi_2|$; $J_k(y)$ − функція Бесселя k-го порядку дійсного аргументу. Функції $A_{m\ell}(\tau)$, $B_{m\ell}(\tau)$ мають вигляд

$$A_{11}(\tau) = -R_1(R_3^2 + \tau^2 R_1 R_2), \qquad A_{12}(\tau) = A_{21} = 2R_1R_2^2R_3,$$

$$A_{22}(\tau) = -R_2(R(\tau) + 2R_1R_2^3), \qquad B_{11}(\tau) = \tau^2 R_1 R_3,$$

$$B_{12}(\tau) = -\tau^2 R_1 R_2^2, \qquad B_{21}(\tau) = -R_2R_3^2, \qquad B_{22}(\tau) = R_2^3 R_3.$$

Коли $\dfrac{\rho_p}{\rho} \to 0$, рівняння (4) переходять у рівняння задачі про вільний півпростір з тріщинами [4].

Відомо [3], що ГІР (4) належать до класу гіперсингулярних рівнянь з огляду на наявність сильної особливості $|x_k-\xi|^{-3}$ у ядрі. Для числового розв'язування рівнянь їх розв'язки подамо у вигляді

$$\Delta u_{3k}(\xi) = \sqrt{a_k^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}\,\Psi_{3k}(\xi), \qquad k = 1, \ldots, K,$$

де $\Psi_{3k}(\xi)$ − невідомі неперервно диференційовні в областях S_k функції; a_k − радіуси тріщин.

Після проведення регуляризації [7] ГІР (4) зводили до розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь відносно невідомих дискретних значень функцій $\Psi_{3k}(\xi)$. Кругові області S_k тріщин дискретизували в полярних системах координат $O_k r\varphi$ чотирикутними граничними елементами, в межах кожного з яких значення $\Psi_{3k}(\xi)$ приймали сталими.

Як приклад розглядали випадок двох кругових тріщин радіусів a, що зазнають дії розривних зусиль сталої амплітуди $N_{3k}(x_k) = N_0$, $k = 1, 2$. Для дискретизації областей тріщин вибирали 11 точок розбиття за радіальною координатою r і 16 точок за кутовою координатою φ. Коефіцієнт Пуассона μ матеріалу нижнього півпростору покладали рівним 0.3.

За допомогою розв'язків $\Psi_{3k}(r, \varphi)$ на контурах тріщин визначали коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) відриву

$$K_{Ik}(\varphi, t) = -\frac{2G\pi\sqrt{\pi a}}{1-\mu}\Psi_{3k}(a, \varphi)\exp(-i\omega t), \qquad k = 1, 2.$$

Розрахунки виконано для відносних амплітуд $\tilde{K}_I = \dfrac{|K_I|}{K_I^s}$, де $K_I^s = 2N_0\sqrt{\dfrac{a}{\pi}}$ − статичний КІН відриву для тріщини у безмежному тілі з пружними характеристиками нижнього півпростору під дією зусиль N_0. На рис. 2−4 зображено залежності відносних амплітуд $\tilde{K}_I$ від циклічної частоти $\omega_2 a$. Криві на рис. 2 відповідають значенням кутової координати φ точки контуру тріщини $\varphi = 0,\ 90,\ 180,\ 270°$ при $d = 1.2a$, $d_{12} = 3.0a$, $\rho/\rho_p = 2.8$. На рис. 3 кривим відповідають значення глибини d залягання тріщин $d = 1.2a, 1.3a, 1.4a$ при $\varphi = 0°$, $d_{12} = 3.0a$, $\rho/\rho_p = 2.8$.

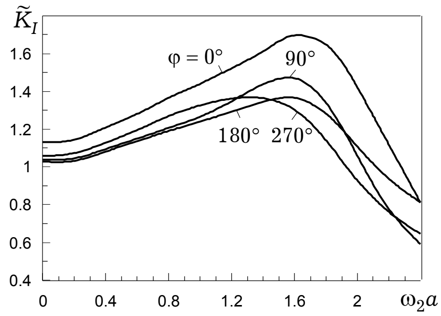

Рис. 2

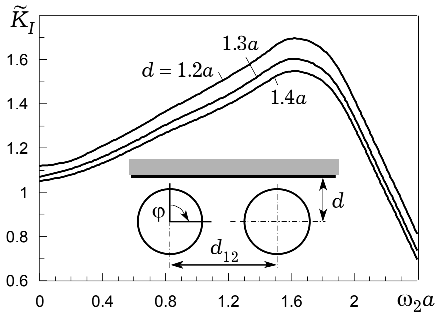

Рис. 3

Криві на рис. 4 відповідають значенням відношення між густинами складових тіла $\rho/\rho_p = 2.8, 3.0, 4.0$ при $\varphi = 0°$, $d = 1.15a$, $d_{12} = 3.0a$. Бачимо, що в розглянутому діапазоні зміни параметра $\omega_2 a$ амплітуди $\tilde{K}_I$ монотонно зростають від своїх статичних значень для $\omega_2 a = 0$ до максимумів, а потім монотонно спадають. За фіксованої відстані d_{12} між тріщинами у найближчих до поверхні поділу середовищ точках контурів тріщин збільшення глибини d залягання дефектів (рис. 3) і співвідношення ρ/ρ_p густин середовищ (рис. 4) призводить до зменшення значень $\tilde{K}_I$ і прямування їх до аналогічних залежностей у випадку вільного півпростору [4].

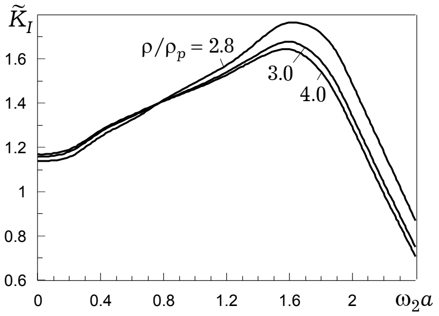

Рис. 4

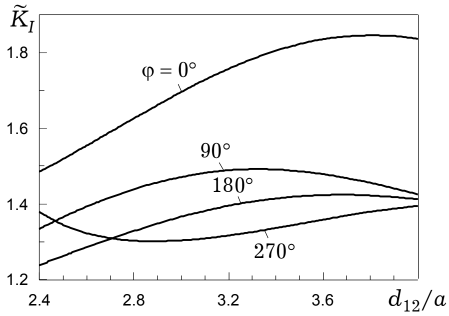

Рис. 5

На рис. 5 зображено залежності амплітуди $\tilde{K}_I$ у різних точках контуру тріщини від відстані d_{12}/a між дефектами за фіксованих значень $d = 1.2a$, $\rho/\rho_p = 2.8$, $\omega_2 a = 1.6$. Кривим відповідають значення точок контуру з кутовими координатами $\varphi = 0,\ 90,\ 180,\ 270°$. Видно, що вказані залежності мають хвилеподібний характер. Подібне явище раніше зауважено для випадку безмежного [1, 7] і напівбезмежного [4, 5] тіл.

This work is supported by INTAS (Project No. 05-1000008-7979).

1. *Гузь А. Н., Зозуля В. В.* Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. – Киев: Наук. думка, 1993. – 236 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. – Т. 4.)
2. *Михаськив В. В., Сладек Я., Сладек В., Степанюк А. И.* О концентрации напряжений возле эллиптической трещины на границе раздела упругих тел при установившихся колебаниях // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 6. – С. 81–89.
3. *Станкевич В. З.* Напруження біля тріщини в півпросторі, що контактує з рідиною, під гармонічним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 3. – С. 96–100.
4. *Станкевич В. З., Стасюк Б. М.* Трехмерная динамическая задача о взаимодействии трещин в полупространстве // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 34. – С. 125–131.
5. *Станкевич В. З., Стасюк Б. М., Хай О. М.* Решение динамической задачи о взаимодействии компланарных трещин в полупространстве с защемленной поверхностью посредством граничных интегральных уравнений // Прикл. механика и техн. физика. – 2005. – **46**, № 1. – С. 153–159.
6 *Хай М. В., Станкевич В. З., Стасюк Б. М.* О решении трехмерной динамической задачи для биматериального тела с трещиной методом граничных интегральных уравнений // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 38. – С. 130–134.
7. *Kit H. S., Khaj M. V., Mykhas'kiv V. V.* Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM // Engng. Fract. Mech. – 1996. – **55,** No. 2. – P. 191–207.
8. *Mykhas'kiv V. V., Stepanyuk O. I.* Boundary integral analysis of the symmetric dynamic problem for an infinite bimaterial solid with an embedded crack // Meccanica. – 2001. – **36,** No. 4. – P. 479–495.
9. *Sih G. C., Chen E. P.* Axisymmetric elastodynamic response from normal and radial impact of layered composites with embedded penny-chaped crack // Int. J. Solids and Struct. – 1980. – **16**. – P. 1093–1107.
10. *Sih G. C., Chen E. P.* Normal and shear impact of layered composite with a crack dynamic stress intensification // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1980. – **47**. – P. 351–358.
11. *Takei M., Shindo Y., Atsumi A.* Diffraction of transient horizontal shear waves by a finite crack at the interface of two bonded dissimilar elastic solids // Engng Fract. Mech. – 1982. – **16**. – P. 799–807.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕЩИН В УПРУГОМ ТЕЛЕ, ОМЫВАЕМОМ ЖИДКОСТЬЮ, ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Метод граничных интегральных уравнений использован для решения динамической задачи о взаимодействии компланарных круговых трещин в упругом полупространстве, омываемом жидкостью. Поверхности трещин находятся под воздействием установившихся во времени разрывных нагрузок. Получены и проанализированы коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности дефектов.

CRACKS INTERACTION IN ELASTIC SOLID CONTACTING WITH FLUID UNDER TIME-HARMONIC LOADING

The boundary integral equation method is applied to solving the multiple crack problem for elastic half-space contacting with a fluid. The crack faces are subjected to time-harmonic loading. The stress intensity factors in the vicinities of defects are obtained and analyzed.

Львів. філія Дніпропетр. нац. ун-ту
залізн. транспорту ім. акад. В. Лазаряна, Львів

Одержано
05.10.06