УДК 539.3

В. Г. Карнаухов[1], Я. В. Ткаченко[1], В. Ф. Зражевська[2]

ДОСЛІДЖЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ФІЗИЧНО НЕЛІНІЙНОГО П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

Досліджено процес гармонічних коливань тонкої сферичної оболонки з фізично нелінійного п'єзокерамічного матеріалу при дії періодичного електричного навантаження. Побудовано амплітудно-частотні характеристики для різних амплітуд електричного навантаження. Досліджено на стійкість точки амплітудно-частотних характеристик. Вивчено перехідні процеси виходу на усталені режими гармонічних коливань.

Вступ. При збуренні п'єзоелектричних тіл на резонансних частотах навіть у слабких електричних полях спостерігаються режими з такими типовими для нелінійних систем ефектами, як залежність резонансних частот від амплітуди коливань і неоднозначна залежність амплітуди від частоти та ін.

При коливаннях тонкостінних елементів спостерігаються нелінійності двох типів.

Перший тип нелінійності обумовлений впливом температури дисипативного розігріву через розсіяння електромеханічної енергії в теплову. Цей тип нелінійності породжується залежністю властивостей матеріалу від температури та нелінійною залежністю дисипативної функції від деформацій і температури. Він достатньо детально досліджений у роботах [3–7].

Другий тип нелінійності пов'язаний з залежністю характеристик матеріалу від амплітуд незалежних польових величин. Цей тип нелінійності вивчено недостатньо. У роботах [8–10] розглянуто деякі найпростіші задачі для п'єзокерамічних тіл із матеріалу з нелінійністю другого типу.

У зв'язку з тим, що тонкі п'єзоелектричні сферичні оболонки широко застосовуються у різноманітних галузях сучасної техніки, в пропонованій роботі за допомогою методу гармонічного балансу досліджуються гармонічні коливання в таких оболонках із матеріалів з нелінійністю другого типу. Побудовано амплітудно-частотні характеристики оболонки в залежності від рівня електричного навантаження. Показано, що для різних амплітуд навантаження ці характеристики можуть відрізнятися як кількісно, так і якісно. Вивчено також стійкість точок амплітудно-частотних характеристик залежно від амплітуди навантаження.

1. Постановка задачі. Нехай маємо поляризовану в радіальному напрямку тонку п'єзокерамічну сферичну оболонку товщини h з радіусом серединної поверхні R. На поверхнях цієї оболонки нанесено нескінченно тонкі електроди, до яких підведена різниця потенціалів $V_0(t)$.

Безмоментне рівняння руху такої оболонки має вигляд

$$\frac{2\sigma_\theta}{R} + \rho\ddot{w} = 0 . \qquad (1)$$

Її деформація визначається співвідношенням

$$\varepsilon_\theta = \frac{w}{R} . \qquad (2)$$

З рівнянь (1) і (2) маємо

$$\rho R^2 \ddot{\varepsilon}_\theta + 2\sigma_\theta = 0 . \qquad (3)$$

Тут ρ – густина матеріалу оболонки. Надалі індекс θ опускаємо. Визначальні співвідношення нелінійної електропружності мають вигляд [10]

$$\sigma = \frac{1}{1-\nu}\left(E_c^{(0)}\varepsilon + \beta E_c^{(0)}\dot{\varepsilon} + E_c^{(1)}\varepsilon^2 + E_c^{(2)}\varepsilon^3 - \gamma_0 E_r - \gamma_1 \varepsilon E_r - \gamma_2 \varepsilon^2 E_r\right),$$

$$D_r = \gamma_0\varepsilon + \frac{1}{2}\gamma_1\varepsilon^2 + \frac{1}{3}\gamma_2\varepsilon^3 + \nu_0 E_r. \qquad (4)$$

За умови, що матеріал поводить себе однаково при розтягу та стиску, співвідношення (4) спрощуються і набувають вигляду

$$\sigma = \frac{1}{1-\nu}\left(E_c^{(0)}\varepsilon + \beta E_c^{(0)}\dot{\varepsilon} + E_c^{(2)}\varepsilon^3 - \gamma_0 E_r - \gamma_2 \varepsilon^2 E_r\right),$$

$$D_r = \gamma_0\varepsilon + \frac{1}{3}\gamma_2\varepsilon^3 + \nu_0 E_r. \qquad (5)$$

Оскільки $\frac{\partial D_r}{\partial r} = 0$, то $D_r = C(t)$, де C – функція від часу і не залежить від радіальної координати. Інтегруючи друге з рівнянь (5) за товщиною оболонки, отримаємо

$$Ch = \gamma_0\varepsilon h + \frac{1}{3}\gamma_2\varepsilon^3 h - \nu_0 V_0(t)$$

або

$$D_r = C = \gamma_0\varepsilon + \frac{1}{3}\gamma_2\varepsilon^3 - \frac{\nu_0 V_0(t)}{h}. \qquad (6)$$

Підставляючи вираз (6) для D_r у друге з рівнянь (5), знаходимо

$$E_r = -\frac{V_0(t)}{h}.$$

Тоді згідно з першим рівнянням (5) запишемо вираз для σ:

$$\sigma = \frac{1}{1-\nu}\left(E_c^{(0)}\varepsilon + \beta E_c^{(0)}\dot{\varepsilon} + E_c^{(2)}\varepsilon^3 + \left(\gamma_0 + \gamma_2\varepsilon^2\right)\frac{V_0(t)}{h}\right). \qquad (7)$$

Підставивши співвідношення (7) у (3), будемо мати звичайне нелінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$\rho R^2\ddot{\varepsilon} + \frac{2}{1-\nu}\left(\beta E_c^{(0)}\dot{\varepsilon} + E_c^{(0)}\varepsilon + E_c^{(2)}\varepsilon^3 + \left(\gamma_2\varepsilon^2 + \gamma_0\right)\frac{V_0(t)}{h}\right) = 0. \qquad (8)$$

Числові значення та вирази для обчислення матеріальних констант, що входять у (8), наведено в роботі [10]:

$$\gamma_0 = E_c^{(0)} d_{31}^{(0)}, \qquad \gamma_2 = E_c^{(0)} d_{31}^{(2)} + E_c^{(2)} d_{31}^{(0)},$$

$$\rho = 7790 \text{ кг/м}^3, \quad E_c^{(0)} = 0.667\cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, \quad E_c^{(2)} = -1.4\cdot 10^{18} \text{ Н/м}^2,$$

$$d_{31}^{(0)} = -2.1\cdot 10^{-10} \text{ м/В}, \quad d_{31}^{(2)} = -0.03596 \text{ м/В}, \quad \beta = 3.165\cdot 10^{-6}.$$

Приймаємо, що коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.33$.

2. Розв'язок задачі та аналіз результатів. Перепишемо рівняння (8) у вигляді

$$\frac{1-\nu}{2}\rho R^2\ddot{\varepsilon} + \beta E_c^{(0)}\dot{\varepsilon} + E_c^{(0)}\varepsilon + \gamma_2\frac{V_0(t)}{h}\varepsilon^2 + E_c^{(2)}\varepsilon^3 + \gamma_0\frac{V_0(t)}{h} = 0. \qquad (9)$$

Позначимо

$$\omega_0^2 = \frac{2E_c^{(0)}}{(1-\nu)\rho R^2}. \qquad (10)$$

Введемо безрозмірний час

$$\tau = \omega_0 t. \qquad (11)$$

При цьому

$$\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}, \qquad \frac{d^2}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2}{d\tau^2}. \tag{12}$$

Надалі похідну за часом τ позначаємо штрихом.

Деформацію ε віднесемо до малої характерної величини μ:

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\mu. \tag{13}$$

Підставляючи рівності (10)–(13) у (9), отримаємо

$$\bar{\varepsilon}'' + \beta\omega_0\bar{\varepsilon}' + \bar{\varepsilon} + \bar{\gamma}_2 V_0\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right)\bar{\varepsilon}^2 + E_2\bar{\varepsilon}^3 = G_0 V_0\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right), \tag{14}$$

де

$$E_2 = \frac{2\mu^2 E_c^{(2)}}{(1-\nu)\rho R^2\omega_0^2}, \quad G_0 = -\frac{2\gamma_0}{(1-\nu)\mu h\rho R^2\omega_0^2}, \quad \bar{\gamma}_2 = \frac{2\mu\gamma_2}{(1-\nu)h\rho R^2\omega_0^2}. \tag{15}$$

Дослідимо процес гармонічних коливань та їхню амплітудно-частотну характеристику. Використаємо метод гармонічного балансу [2]. Покладемо

$$V_0\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right) = \mathscr{B}\sin\bar{\omega}\tau, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}, \tag{16}$$

де ω – частота електричного збурення. Нехтуючи субгармонічними та ультрагармонічними коливаннями, дослідимо процес гармонічних коливань При цьому апроксимацію періодичного розв'язку рівняння (14) будемо шукати у вигляді

$$\bar{\varepsilon} = A_1\cos\bar{\omega}\tau + A_2\sin\bar{\omega}\tau. \tag{17}$$

Підставляючи (17) у (14) і прирівнюючи коефіцієнти при $\cos\bar{\omega}\tau$, $\sin\bar{\omega}\tau$, отримаємо нелінійну систему алгебраїчних рівнянь

$$A_1 + \frac{3}{4}A_1E_2(A_1^2 + A_2^2) + \frac{1}{2}A_1A_2\mathscr{B}\bar{\gamma}_2 + A_2\omega_0\beta\bar{\omega} - A_1\bar{\omega}^2 = 0,$$

$$A_2 + \frac{3}{4}A_2E_2(A_1^2 + A_2^2) + \frac{1}{4}\mathscr{B}\bar{\gamma}_2(A_1^2 + 3A_2^2) - A_1\omega_0\beta\bar{\omega} - A_2\bar{\omega}^2 = \mathscr{B}G_0.$$

Звідси знаходимо

$$A_1 = \frac{4\omega_0\beta\bar{\omega}x}{-4\mathscr{B}G_0 + \mathscr{B}\bar{\gamma}_2 x}, \qquad A_2 = \frac{4(1-\bar{\omega}^2)x + 3E_2x^2}{4\mathscr{B}G_0 - 3\mathscr{B}\bar{\gamma}_2 x}, \tag{18}$$

де $x = A^2 = A_1^2 + A_2^2$ – квадрат амплітуди коливань.

Підносячи вирази (18) до квадрата, підсумовуючи їх, будемо мати рівняння для визначення квадрата амплітуди

$$\mathscr{B}^2 x = \left(\frac{4\omega_0\beta\bar{\omega}x}{-4G_0 + \bar{\gamma}_2 x}\right)^2 + \left(\frac{4(1-\bar{\omega}^2)x + 3E_2x^2}{4G_0 - 3\bar{\gamma}_2 x}\right)^2. \tag{19}$$

Нехтуючи тривіальним коренем цього рівняння, після елементарних перетворень отримаємо алгебраїчне рівняння п'ятого порядку відносно x:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 = 0, \tag{20}$$

де

$$a_0 = -16\mathscr{B}^2G_0^4, \quad a_1 = 16G_0^2\left(1 + 2\mathscr{B}^2G_0\bar{\gamma}_2 + (\omega_0^2\beta^2 - 2)\bar{\omega}^2 + \bar{\omega}^4\right),$$

$$a_2 = -2G_0\left\{12E_2G_0(\bar{\omega}^2 - 1) + \bar{\gamma}_2\left[11\mathscr{B}^2G_0\bar{\gamma}_2 + 4\left(1 + (3\omega_0^2\beta^2 - 2)\bar{\omega}^2 + \bar{\omega}^4\right)\right]\right\},$$

$$a_3 = 9E_2^2G_0^2 + 12E_2G_0\bar{\gamma}_2(\bar{\omega}^2 - 1) + \bar{\gamma}_2^2\left[1 + 6\mathscr{B}^2G_0\bar{\gamma}_2 + (9\omega_0^2\beta^2 - 2)\bar{\omega}^2 + \bar{\omega}^4\right],$$

$$a_4 = \frac{3}{16}\bar{\gamma}_2\left[24E_2^2G_0 + 3\mathscr{B}^2\bar{\gamma}_2^3 + 8E_2\bar{\gamma}_2(\bar{\omega}^2 - 1)\right], \quad a_5 = \frac{9}{16}E_2^2\bar{\gamma}_2^2.$$

Розв'язуючи рівняння (20) при фіксованій зовнішній частоті $\bar{\omega}$ і відкидаючи від'ємні та комплексні корені, отримаємо значення квадратів можливих амплітуд. Таким чином можемо побудувати амплітудно-частотну характеристику. На рис. 1 наведено амплітудно-частотні характеристики гармонічних коливань оболонки радіуса $R = 0.1$ м та товщини $h = 0.005$ м для різних значень амплітуди збурюючої різниці потенціалів при $\mu = 10^{-4}$. Кривим *1–3* відповідають значення амплітуди різниці потенціалів $\mathcal{B} = 277,\ 257,\ 227$ В. Крива *4* – це так звана скелетна крива [1], яка розраховується з рівняння (19), коли покласти $\mathcal{B} = \beta = 0$:

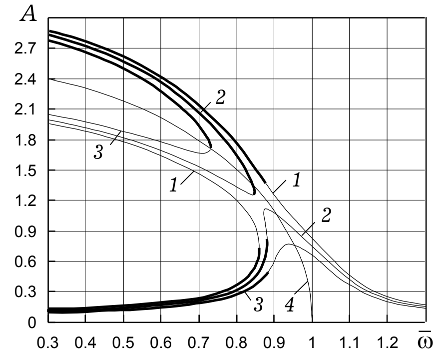

Рис. 1

$$x = \frac{4(1-\bar{\omega}^2)}{3E_2}.$$

Товсті криві показують стійкі точки амплітудно-частотних характеристик, а тонкі – нестійкі.

Згідно з роботою [2] у стійких точках амплітудно-частотної характеристики повинна виконуватись умова

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial X(A_1,A_2)}{\partial A_1} & \dfrac{\partial X(A_1,A_2)}{\partial A_2} \\ \dfrac{\partial Y(A_1,A_2)}{\partial A_1} & \dfrac{\partial Y(A_1,A_2)}{\partial A_2} \end{vmatrix} > 0. \tag{21}$$

У нерівності (21) функції $X(A_1,A_2)$, $Y(A_1,A_2)$ визначаються за формулами

$$X(A_1,A_2) =$$

$$= -\bar{\omega}^2 A_1 + \beta\omega_0\bar{\omega}A_2 + \frac{\bar{\omega}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi/\bar{\omega}} \left(\omega_0^2\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\gamma}_2\mathcal{B}\sin\bar{\omega}\tau\,\bar{\varepsilon}_0^2 + E_2\bar{\varepsilon}_0^3\right)\cos\bar{\omega}\tau\,d\tau,$$

$$Y(A_1,A_2) =$$

$$= -\beta\omega_0\bar{\omega}A_1 - \bar{\omega}^2 A_2 + \frac{\bar{\omega}}{\pi}\int\limits_0^{2\pi/\bar{\omega}} \left(\omega_0^2\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\gamma}_2\mathcal{B}\sin\bar{\omega}\tau\,\bar{\varepsilon}_0^2 + E_2\bar{\varepsilon}_0^3\right)\sin\bar{\omega}\tau\,d\tau,$$

де

$$\bar{\varepsilon}_0 = A_1\cos\bar{\omega}\tau + A_2\sin\bar{\omega}\tau.$$

Тут константи A_1 та A_2 визначені згідно з формулою (18), а квадрат амплітуди отримано з полінома (20).

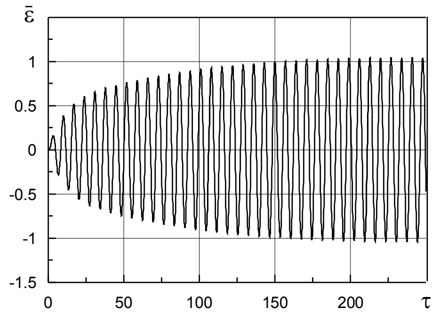

Рис. 2

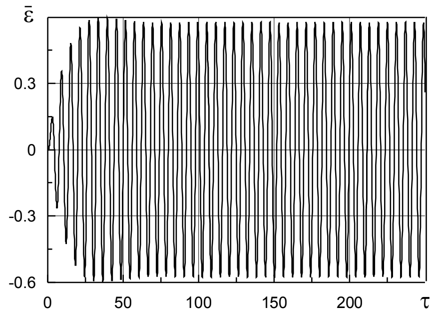

Рис. 3

На рис. 2 показано результати чисельного розв'язування рівняння (14) при $V_0\left(\frac{\tau}{\omega_0}\right) = \mathscr{B}\sin\bar{\omega}\tau$ з амплітудою $\mathscr{B} = 257$ В для частоти $\bar{\omega} = 0.9$. Аналогічна крива для частоти $\bar{\omega} = 1.05$ зображена на рис. 3. Наведені на цих рисунках криві ілюструють вихід нестаціонарного режиму коливань на стаціонарний режим, який добре узгоджується з відповідною (криві *2* на рис. 1) амплітудно-частотною характеристикою.

1. *Митропольский Ю. А.* Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах. – Киев: Изд-во АН УССР, 1955. – 284 с.
2. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. – Москва: Мир, 1968. – 432 с.
3. *Karnaukhov V. G.* On A. D. Kovalenko's research works on the thermomechanics of coupled field in materials and structural memebers and its further development // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 9. – P. 967–975.
4. *Karnaukhov V. G., Revenko Yu. V.* Dissipative heating of viscoelastic cylinder under load steadily moving over its surface // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 2. – P. 129–136.
5. *Karnaukhov V. G., Revenko Yu. V.* Vibrations and dissipative heating of a cylindrical panel under periodic moving load // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 4. – P. 426–434.
6. *Kirichok I. F.* Resonant flexural vibrations and dissipative heating of a piezoceramic ring plate with nonuniformly electroded surfaces // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No. 3. – P. 336–341.
7. *Kirichok I. F., Karnaukhova T. V.* Resonant vibrations and dissipative heating of an infinite piezoceramic cylinder // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 3. – P. 309–314.
8. *Wagner U.* Non linear longitudinal vibrations of non slender piezoceramic rods // Int. J. Non-linear Mech. – 2004. – **39.** – P. 677–688.
9. *Wagner U.* Non linear longitudinal vibrations of piezoceramics excited by weak electric fields // Int. J. Non-linear Mech. – 2003. – **38**. – P. 565–574.
10. *Wagner U., Hagedorn P.* Piezo-beam systems subjected to weak electric field: experiments and modeling of non-linearities // J. Sound and Vibration. – 2002. – **256**, No. 3. – P. 861–872.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Исследован процесс гармонических колебаний тонкой сферической оболочки из физически нелинейного пьезокерамического материала при действии периодической электрической нагрузки. Построены амплитудно-частотные характеристики для различных амплитуд электрической нагрузки. Точки амплитудно-частотных характеристик исследованы на устойчивость. Изучены переходные процессы выхода на установившиеся режимы гармонических колебаний.

INVESTIGATION OF HARMONIC VIBRATIONS OF SPHERICAL SHELL FROM PHYSICALLY NON-LINEAR PIEZOELECTRIC MATERIAL

The process of harmonic vibrations of thin piezoelectric ceramic spherical shell under electric periodic loading is investigated. The shell material is physically nonlinear. The amplitude-frequency characteristics are plotted for different amplitudes of electric loading. The stability of points of amplitude-frequency characteristics is investigated. Transients of setting up the steady-state harmonic vibrations are shown.

[1] Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ,
[2] Нац. техн. ун-т України «КПІ», Київ

Одержано 01.12.06