

МЕТОД R-ФУНКЦІЙ У ЗАДАЧАХ ДОСЛІДЖЕНЬ ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК

Досліджуються вільні геометрично нелінійні коливання пластин і пологих оболонок, що опираються на план складної форми. Алгоритм побудовано на застосуванні теорії R-функцій і методу Бубнова – Гальоркіна, які дозволяють у випадку складної геометрії області оболонки та різних типів граничних умов звести рівняння руху до звичайного диференціального рівняння другого порядку. Наведено амплітудно-частотні характеристики пологих оболонок простої і складної у плані форми. Отримані результати порівнюються з існуючими в літературі.

У нелінійній теорії пластин і пологих оболонок важливе місце займають питання дослідження вільних коливань при великих амплітудах [5–9]. Найбільш суттєві результати у цій галузі належать В. В. Болотіну, А. С. Вольміру, Е. І. Григолюку, Я. М. Григоренку, В. І. Гуляеву, Є. С. Дехтярюку, С. Y. Chia, G. Hermann, A. W. Liessa, С. Y. Mei та ін. Однак питання про нелінійну динамічну поведінку пластин і пологих оболонок складної форми в плані та різних способів їх закріплення залишається недостатньо вивченим. Це можна пояснити складністю математичної постановки задачі, яка у загальному випадку зводиться до системи нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними в областях складної форми, що суттєво ускладнює їх розв'язання.

Метою цієї роботи є розробка методу та його чисельна реалізація для визначення амплітудно-частотних характеристик коливань гнучких пластин і пологих оболонок довільної форми в плані, на основі теорії R-функцій і варіаційних методів.

1. Постановка задачі. Згідно з основними гіпотезами нелінійної теорії тонких пружних оболонок [2–4] вважаємо, що видовження і зсуви є малими порівняно з одиницею, а прогини оболонки порівнюються з її товщиною, хоч і малі порівняно з іншими її розмірами. Розглянемо задачу про вільні коливання ізотропних пластин і пологих оболонок, що опираються на план довільної форми.

Для опису руху пластини або оболонки будемо використовувати рівняння руху класичної теорії, які в безрозмірних величинах матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{1}{12} \nabla^4 w - (k_x + \mu k_y) \frac{\partial u}{\partial x} - (\mu k_x + k_y) \frac{\partial u}{\partial y} + (k_x^2 + k_y^2 + 2\mu k_x k_y) w - \\ - \frac{k_x + \mu k_y}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{k_y + \mu k_x}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - (k_x + \right. \\ \left. + \mu k_y) w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - (1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} - (\mu k_x + k_y) w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$A\mathbf{U} = L_\kappa(w) + L(w) + P(\mathbf{U}), \quad (2)$$

$$A\mathbf{U} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix},$$

$$L(w) = - \left\| \begin{aligned} & \frac{1}{2}(w_{,x}^2 + \mu w_{,y}^2)_{,x} + \frac{1-\mu}{2}(w_{,x}w_{,y})_{,y} \\ & \frac{1-\mu}{2}(w_{,x}w_{,y})_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,y}^2 + \mu w_{,x}^2)_{,y} \end{aligned} \right\|,$$

$$L_k(w) = - \left\| \begin{aligned} & (k_x + \mu k_y) \frac{\partial w}{\partial x} \\ & (k_y + \mu k_x) \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\|, \quad P(\mathbf{U}) = \frac{h^2}{a^2} \left\| \begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} & 0 \\ & 0 & \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \end{aligned} \right\| \left\| \begin{aligned} & u \\ & v \end{aligned} \right\|,$$

де u, v, w – переміщення серединної поверхні оболонки у напрямках x, y, z ; k_x, k_y – кривини елемента оболонки; E – модуль пружності; h – товщина; a – довжина сторони форми плану оболонки; ρ – густина матеріалу; μ – коефіцієнт Пуассона. У наведених вище формулах безрозмірні параметри вводяться у такий спосіб:

$$x = \frac{X}{a}, \quad y = \frac{Y}{a}, \quad u = \frac{Ua}{h^2}, \quad v = \frac{Va}{h^2}, \quad w = \frac{W}{h},$$

$$k_x = \frac{a^2}{R_x h}, \quad k_y = \frac{a^2}{R_y h}, \quad \tau = \frac{\omega_L h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu^2)}} t.$$

Диференціальні рівняння (1), (2) доповнюються граничними умовами, вигляд яких визначається способом закріплення країв.

Початкові умови вважатимемо такими [2, 7]:

$$w = w_0(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0, \quad \tau = 0, \quad (3)$$

де $w_0(x, y)$ – початкове відхилення пластини або оболонки від положення рівноваги, максимальне значення якого дорівнює заданому значенню $\frac{A}{h}$.

2. Метод розв'язування. Оскільки система рівнянь (1), (2) є системою нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними, точні методи інтегрування якої для областей складної форми не розроблені, то для розв'язування сформульованої задачі використаємо варіаційний метод Бубнова – Гальоркіна. Для цього функцію прогину оболонки вибираємо у вигляді

$$w(x, y, \tau) = y_1(\tau)W_1(x, y), \quad (4)$$

де $W_1(x, y)$ – компонента власного вектора, що відповідає основній частоті ω_L лінійних коливань оболонки. Компоненти вектора переміщень у серединній поверхні оболонки $\mathbf{U}(u, v)$ вибираємо з міркувань, що функції $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$ повинні тотожно задовольняти систему рівнянь (2) і відповідні граничні умови. Якщо підставити вираз (4) у (2), отримаємо систему рівнянь, розв'язок якої можна подати як

$$\mathbf{U}(u, v) = y_1(t)\mathbf{U}_1(u_1, v_1) + y_1^2(t)\mathbf{U}_2(u_2, v_2). \quad (5)$$

У виразі (5) вектор \mathbf{U}_1 визначається компонентами власного вектора (u_1, v_1) , що відповідає основній частоті лінійної задачі. Компоненти вектора переміщень $\mathbf{U}_2 = (u_2, v_2)$ є розв'язком системи рівнянь (2) при відповідних граничних умовах у припущенні, що тангенціальними силами інерції можна знехтувати [6–8]. Зазначимо, що права частина отриманої системи $A\mathbf{U}_2 = L(W_1)$ є нелінійною відносно відомої функції прогину $W_1(x, y)$.

Після підстановки функцій u_1, v_1, u_2, v_2, W_1 у рівняння (1) і застосування процедури Бубнова – Гальоркіна задача про визначення переміщень оболонки зведеться до інтегрування звичайного диференціального рівняння

другого порядку

$$y_{1\tau}''(\tau) + y_1(\tau) + \gamma y_1^2(\tau) + \beta y_1^3(\tau) = 0, \quad (6)$$

коефіцієнти якого визначаються таким чином:

$$\begin{aligned} \gamma = & -\frac{1}{\lambda^2 \omega_L^2 \|W_1\|^2} \int_{\Omega} \{ (k_x + \mu k_y)(u_{2,x} + 0.5 \cdot W_{1,x}^2 - W_1 W_{1,xx}) + \\ & + (k_y + \mu k_x)(v_{2,y} + 0.5 \cdot W_{1,y}^2 - W_1 W_{1,yy}) - W_{1,xx}(u_{1,x} + \mu v_{1,y}) - \\ & - (1 - \mu)W_{1,xy}(u_{1,y} + \mu v_{1,x}) - W_{1,yy}(v_{1,y} + \mu u_{1,x}) \} W_1 d\Omega, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta = & -\frac{1}{\lambda^2 \omega_L^2 \|W_1\|^2} \int_{\Omega} \{ W_{1,xx} [u_{2,x} + \mu v_{2,y} + 0.5(W_{1,x}^2 + \mu W_{1,y}^2)] + \\ & + (1 - \mu)W_{1,xy}(W_{1,x}W_{1,y} + u_{2,y} + v_{2,x}) + \\ & + W_{1,yy} [v_{2,y} + \mu u_{2,x} + 0.5(W_{1,y}^2 + \mu W_{1,x}^2)] \} W_1 d\Omega. \quad (8) \end{aligned}$$

Інтегрування рівняння (6) було проведено декількома способами: методом Рунге – Кутта [10] і методом зведення до обчислення еліптичного інтеграла I-го роду. Інтегруючи отриманий еліптичний інтеграл, період T_{nl} визначатимемо за формулою [3, 4, 7, 8]

$$T_{nl} = 2 \int_{W_{\min}}^{W_{\max}} \frac{dy}{\sqrt{C - y_1^2 - \frac{2}{3}\gamma y_1^3 - \frac{1}{2}\beta y_1^4}}, \quad (9)$$

де C – стала інтегрування, яка визначається з початкових умов (3), а W_{\max} , W_{\min} – максимальне та мінімальне значення амплітуди за період коливань.

Задачу про знаходження власних частот і відповідних їм власних функцій, а також компонент вектора переміщень U_2 , яка є складною для оболонок і пластин складної геометрії в плані, в цій роботі запропоновано розв'язувати за допомогою теорії R -функцій (RFM) [8] і варіаційного методу Рітца.

3. Чисельні результати. Нижче наведено деякі результати чисельних досліджень для ілюстрації запропонованого методу. Тестування алгоритму було виконано для шарнірно опертих пологих оболонок з квадратним планом. Параметри оболонок, що досліджуються, було прийнято такими: $h/R_x = 0.001$, $a/R_x = 0.4$, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0.3$.

Приклад 1. Розглянемо пологу оболонку двоякої кривини, що опирається на план квадратної форми. Граничні умови оболонки відповідають шарнірному опираю на країв за наявності повного обмеження руху в тангенціальному напрямку [9–12]:

$$w = 0, \quad v_{\tau} = 0, \quad \sigma_n = 0, \quad M_n = 0, \quad (10)$$

де n , τ – відповідно нормаль і дотична до границі області.

Власну частоту і власний вектор, що їй відповідає, визначимо, розв'язуючи задачу про мінімум функціонала Лагранжа [6] на множині функцій, які становлять лінійну комбінацію координатних послідовностей $\{u_{1i}\}$, $\{v_{1i}\}$, $\{W_{1i}\}$, що задовольняють усі або тільки головні (кінематичні) граничні умови. Методика побудови послідовностей координатних функцій достатньо докладно описана в монографії [9]. Тоді розв'язок лінійної задачі про коливання оболонки можна подати у вигляді

$$u_1 \approx \sum_{i=1}^{N_1} a_i u_{1i}(x, y), \quad v_1 \approx \sum_{i=N_1+1}^{N_2} a_i v_{1i}(x, y), \quad W_1 \approx \sum_{i=N_2+1}^{N_3} a_i W_{1i}(x, y). \quad (11)$$

Послідовності координатних функцій для крайових умов вигляду (10) були вибрані такими:

$$u_{1i} = \omega_1 \varphi_{1i}, \quad v_{1i} = \omega_2 \varphi_{2i}, \quad W_{1i} = \omega \varphi_{3i}, \quad (12)$$

де $\{\varphi_{ji}\}$, $j = 1, 2, 3$, $i = 1, \dots, N_j$, – будь-яка повна послідовність координатних функцій (у роботі вибрано систему степеневих поліномів); $\omega = 0$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ – нормалізовані рівняння границі області та окремих її частин [9], причому для квадратної області $\omega_1 = (a^2 - x^2)/2a$, $\omega_2 = (b^2 - y^2)/2b$.

Знаючи власний вектор (u_1, v_1, W_1) , що відповідає основній частоті ω_L , функції u_2, v_2 будемо визначати із системи $AU_2 = L(W_1)$, до розв'язування якої також застосовуємо метод Рітца, замінюючи її варіаційною задачею про знаходження точки стаціонарності відповідного функціонала [7], який в розгорнутому вигляді з урахуванням граничних умов (10) матиме вигляд

$$\begin{aligned} I(U_2) = & \int_{\Omega} \left\{ u_{2,x}^2 + v_{2,y}^2 + 2\mu u_{2,x} v_{2,y} + \frac{1-\mu}{2} (u_{2,y} + v_{2,x})^2 - \right. \\ & - 2 \left[W_{1,x} W_{1,xx} + \frac{1+\mu}{2} W_{1,y} W_{1,xy} + \frac{1-\mu}{2} W_{1,x} W_{1,yy} \right] u_2 - \\ & - 2 \left[W_{1,y} W_{1,yy} + \frac{1+\mu}{2} W_{1,x} W_{1,xy} + \frac{1-\mu}{2} W_{1,y} W_{1,xx} \right] v_2 \left. \right\} d\Omega - \\ & - \int_{\partial\Omega} [u_{2n} (W_{1,n}^2 + \mu W_{1,\tau}^2) + (1-\mu)v_{2n} W_{1,n} W_{1,\tau}] dS, \quad (13) \end{aligned}$$

де $u_{2n} = u_2 l + v_2 m$, $v_{2n} = -u_2 m + v_2 l$. Напрявні косинуси l і m на границі області Ω відповідно є такими [9]: $l = -\omega_{,1}$, $m = -\omega_{,2}$. Дискретизація функціонала (13) також здійснюється на множині функцій вигляду (12).

Результати тестування амплітудно-частотних залежностей для положих оболонок різних типів кривини з квадратним планом наведено на рис. 1 (для циліндричних оболонок – на рис. 1а, для сферичних – на рис. 1б).

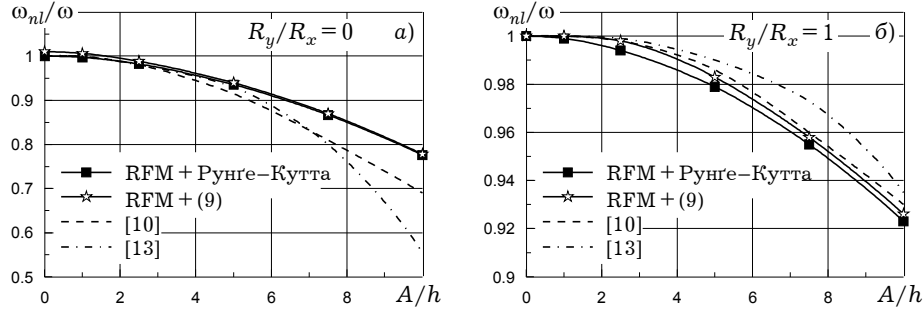


Рис. 1

Як показали проведені дослідження, результати, які отримано чисельним інтегруванням еліптичного інтеграла та за допомогою методу Рунге – Кутта, співпадають на всьому проміжку розглянутого діапазону амплітуд. Для підтвердження достовірності запропонованого методу отримані результати порівнювались із даними робіт [10, 13], де використано аналогічний підхід до розв'язування звичайного нелінійного диференціального рівняння типу (6). Порівняльний аналіз наведених амплітудно-частотних характеристик у діапазоні $A/h = 0 \div 7$ для циліндричної оболонки та в діапазоні $A/h = 0 \div 12$ для сферичної свідчить про достовірність вибраного підходу.

Досліджено вплив різних типів граничних умов на амплітудно-частотні характеристики вільних коливань пологих оболонок. Розглянуто випадок шарнірного закріплення країв оболонки при повній відсутності обмежень на переміщення в її площині (рухомий шарнір). Тоді граничні умови мають вигляд

$$w = 0, \quad \sigma_n = 0, \quad M_n = 0, \quad (14)$$

а послідовності координатних функцій відповідно є такими:

$$u_{1i} = \varphi_{1i}, \quad v_{1i} = \varphi_{2i}, \quad W_{1i} = \omega\varphi_{3i}. \quad (15)$$

Випадку шарнірно опертого краю, нерухомого в площині оболонки (нерухомий шарнір), відповідають такі граничні умови:

$$w = 0, \quad u = v = 0, \quad M_n = 0, \quad (16)$$

і послідовності координатних функцій такого вигляду:

$$u_{1i} = \omega\varphi_{1i}, \quad v_{1i} = \omega\varphi_{2i}, \quad W_{1i} = \omega\varphi_{3i}, \quad (17)$$

де $\omega = 0$ – нормалізоване рівняння усієї границі області.

Результати дослідження впливу типів граничних умов на амплітудно-частотні характеристики пологих оболонок з планом квадратної форми ($b/a = 1$) циліндричного типу кривини наведено на рис. 2а та сферичного типу кривини – на рис. 2б. Для випадку виконання граничних умов (10) наведено порівняння із результатами роботи [10].

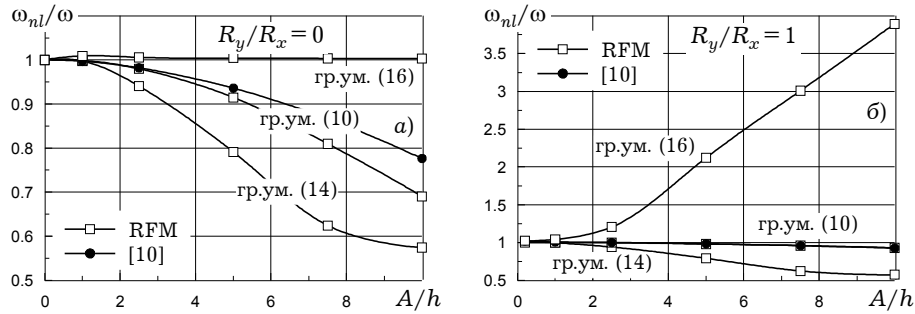


Рис. 2

З аналізу наведених на рис. 2 скелетних кривих випливає, що останні залежать від виду умов закріплення оболонки, тобто вид граничних умов впливає на тип скелетних кривих, змінюючи їх характер поведінки від м'якого типу (що відповідає найбільш жорсткому типу шарнірного закріплення – нерухомий шарнір, умови (16)), до жорсткого типу – у разі рухомого шарніру, умови (14).

Приклад 2. Розглянемо задачу про вільні коливання пологої ізотропної оболонки двоякої кривини складної форми в плані (рис. 3) з граничними умовами (10). У цьому випадку функції $\omega(x, y)$, $\omega_1(x, y)$ і $\omega_2(x, y)$, що входять у формули (12), мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \omega &= (F_1 \wedge_0 F_2) \wedge_0 (L_1 \vee_0 L_2 \vee_0 L_3) \wedge_0 (L_4 \vee_0 L_5 \vee_0 L_6), \\ \omega_1 &= F_1 \wedge_0 \varpi_1 \wedge_0 \varpi_2, \\ \omega_2 &= F_2 \wedge_0 \varpi_3 \wedge_0 \varpi_4 \wedge_0 \varpi_5 \wedge_0 \varpi_6, \end{aligned} \quad (18)$$

де

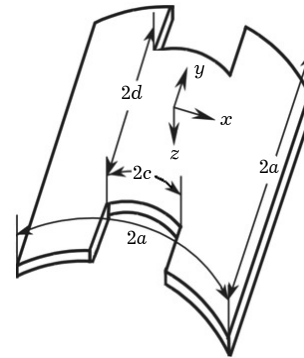


Рис. 3

$$\begin{aligned}\varpi_1 &= \sqrt{L_2 \cdot L_2 \vee_0 \Phi_2}, & \varpi_2 &= \sqrt{L_5 \cdot L_5 \vee_0 \Phi_5}, & \varpi_3 &= \sqrt{L_3 \cdot L_3 \vee_0 \Phi_3}, \\ \varpi_4 &= \sqrt{L_1 \cdot L_1 \vee_0 \Phi_1}, & \varpi_5 &= \sqrt{L_4 \cdot L_4 \vee_0 \Phi_4}, & \varpi_6 &= \sqrt{L_6 \cdot L_6 \vee_0 \Phi_6}.\end{aligned}\quad (19)$$

У виразах (18), (19) позначено:

$$F_1 = \frac{a^2 - x^2}{2a} \geq 0, \quad F_2 = \frac{a^2 - y^2}{2a} \geq 0, \quad L_{1,6} = x - c \geq 0,$$

$$L_2 = -(y - d) \geq 0, \quad L_{3,4} = -(x + c) \geq 0, \quad L_5 = y + d \geq 0,$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{a-d} \left((x-c)^2 + \left(y - \left(d + \frac{a-d}{2} \right) \right)^2 - \left(\frac{a-d}{2} \right)^2 \right) \geq 0,$$

$$\Phi_2 = \frac{x^2 + (y-d)^2 - c^2}{2c} \geq 0,$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{a-d} \left((x+c)^2 + \left(y - \left(d + \frac{a-d}{2} \right) \right)^2 - \left(\frac{a-d}{2} \right)^2 \right) \geq 0,$$

$$\Phi_4 = \frac{1}{a-d} \left((x+c)^2 + \left(y + \left(d + \frac{a-d}{2} \right) \right)^2 - \left(\frac{a-d}{2} \right)^2 \right) \geq 0,$$

$$\Phi_5 = \frac{x^2 + (y+d)^2 - c^2}{2c} \geq 0,$$

$$\Phi_6 = \frac{1}{a-d} \left((x-c)^2 + \left(y + \left(d + \frac{a-d}{2} \right) \right)^2 - \left(\frac{a-d}{2} \right)^2 \right) \geq 0,$$

\wedge_0, \vee_0 – R -кон'юнкція і R -диз'юнкція [8], що визначаються як

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \vee_0 y = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

У табл. 1 наведено порівняння безрозмірних частотних параметрів $\Omega_L = \sqrt{\rho \omega_L^2 (1 - \mu^2) R_x^2} / E$ для оболонок квадратної форми в плані та складної форми (див. рис. 3) у припущенні, що $d/a \rightarrow 1$, із відомими [13]. Відхилення результатів для циліндричної панелі ($R_x/R_y = 0$) складає $\approx 0.001\%$, для оболонки із $R_x/R_y = 1$ відхилення становить $\approx 0.0001\%$. Зазначимо, що зі збільшенням глибини вирізу частотний параметр зростає, що відповідає фізичному змісту задачі.

Таблиця 1

R_x/R_y	Ω_L				
	$d/a = 1$		$d/a = 0.998$	$d/a = 0.8$	$d/a = 0.6$
	[13]	<i>RFM</i>			
0	0.47555	0.47555	0.47607	0.49223	0.53906
1	0.94808	0.94809	0.9482	0.92369	0.87617

На рис. 4 зображено криві амплітудно-частотних характеристик для значень глибини вирізу $d/a = 0.6, 0.8, 0.998$ оболонки складної форми в плані, наведеної на рис. 3, при $c/a = 0.4$ (для випадку циліндричного типу кривини – на рис. 4а, сферичного типу кривини – на рис. 4б). Для отримання результатів використовувались обидва методи розв'язування звичайного диференціального рівняння (6).

Розрахунки проводили при загальній кількості координатних функцій (див. формулу (11)) $N_1 + N_2 + N_3 = 63$, що відповідає 7-му степеню апроксимуючих поліномів для u і v , та 10-му – для W при однаковій кількості координатних функцій для кожної з шуканих функцій. Кількість координатних функцій була встановлена в ході дослідження впливу різної кількості N_1, N_2, N_3 у формулах (11) на збіжність результатів. Для інтегрування використовували 10-вузлову формулу Гаусса.

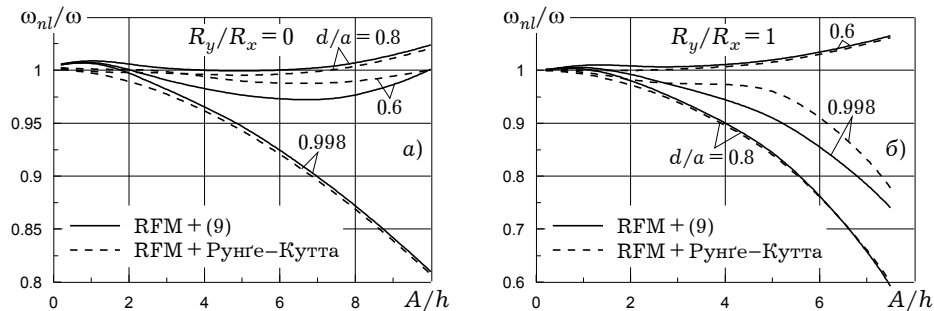


Рис. 4

Таким чином, у роботі запропоновано ефективний метод дослідження задач нелінійної динаміки пластин і пологих оболонок, що базується на застосуванні теорії R -функцій. Цей підхід дозволяє застосовувати розроблений алгоритм до дослідження оболонок і пластин, що опираються на план складної форми. Надалі цей метод можна успішно використовувати у дослідженнях вимушених коливань пологих оболонок і пластин довільної геометрії і способів закріплення.

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – Москва: БИНОМ, 2003. – 632 с.
2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – Москва: Наука, 1972. – 352 с.
3. Григолюк Э. И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек // Изв. АН СССР. ОТН. – 1955. – С. 285–292.
4. Григолюк Э. И. О колебаниях круговых цилиндрических панелей при конечных амплитудах // Прикл. математика и механика. – 1955. – **19**. – С. 376–382.
5. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С. Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (обзор) // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 8. – С. 3–31.
6. Курпа Л. В., Пильгун Г. В., Онуфриенко О. Г. Применение метода R -функций к задачам о свободных колебаниях консольных ортогогранных пологих оболочек с заданным планом // Вестн. нац. техн. ун-та «ХПИ». – 2002. – Вып. 8. – С. 125–131.
7. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – Москва: Наука, 1970. – 512 с.
8. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 561 с.
9. Рвачев В. Л., Курпа Л. В. R -функции в задачах теории пластин. – Киев: Наук. думка, 1987. – 174 с.
10. Chia C. Y. Nonlinear analysis of doubly curved symmetrically laminated shallow shells with rectangular planform // Ingenieur-Archiv. – 1988. – **58**. – P. 252–264.
11. Chu H. N., Hermann G. Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1956. – **23**. – P. 532–540.
12. Kobayashi Y., Leissa A. W. Large amplitude free vibration of thick shallow shells supported by shear diaphragms // Int. J. Non-Linear Mech. – 1995. – No. 1. – P. 57–66.
13. Leissa A. W., Kadi S. Curvature effects on shallow shell vibrations // J. Sound and Vibr. – 1971. – No. 2. – P. 173–187.
14. Reissner E. On the lateral vibrations of the thin shallow shells // Quart. Appl. Math. – 1955. – No. 3. – P. 42–49.

МЕТОД R-ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Исследуются свободные геометрически нелинейные колебания пологих оболочек, опирающихся на план сложной формы. Алгоритм построен на использовании теории R-функций и метода Бубнова – Галеркина, что позволяет в случае сложной геометрии области оболочки и разных типов граничных условий свести уравнения движения к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка. Представлены амплитудно-частотные характеристики пологих оболочек простой и сложной формы планов. Проведено сравнение полученных результатов с имеющимися в литературе.

R-FUNCTION METHOD IN PROBLEMS OF INVESTIGATIONS OF GEOMETRICALLY NON-LINEAR VIBRATIONS OF SHALLOW SHELLS

Free geometrically nonlinear vibrations of plates and shallow shells with complicated planforms are studied. The algorithm is based on the application of the R-function theory and the Bubnov – Galerkin procedure to the equations of motion of shallow shells, that allows to reduce them to the second-order ordinary differential equation in the case of complicated planforms shells and different types of boundary conditions. The backbone curves for shallow shells with simple and complex planforms are presented. The results obtained are compared with that available from other works.

Нац. техн. ун-т
«Харків. політехн. ін-т», Харків

Одержано
18.05.06