УДК 519.6:535.4

П. О. Савенко, М. Д. Ткач

СИНТЕЗ ВИПРОМІНЮЮЧИХ СИСТЕМ ЗА ЗАДАНОЮ АМПЛІТУДНОЮ ДІАГРАМОЮ НАПРЯМЛЕНОСТІ ЗА НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ НА ДЖЕРЕЛА ВИПРОМІНЮВАННЯ

Розвивається метод розв'язування одного класу нелінійних задач синтезу випромінюючих систем за наявності обмежень на джерела випромінювання. На загальному (операторному) рівні подано варіаційне формулювання задач, одержано основні рівняння синтезу, доведено теорему існування розв'язків. Побудовано й обґрунтовано ітераційний процес для знаходження числових розв'язків. Застосування запропонованого методу проілюстровано на задачі синтезу лінійної антени за заданою амплітудною діаграмою напрямленості.

1. Вступ. У багатьох практичних застосуваннях на етапі оптимального проектування випромінюючих систем (ВС) ставляться вимоги лише до енергетичних характеристик поля, що випромінюється, зокрема, до амплітудної діаграми напрямленості (ДН) або до ДН за потужністю [1, 2, 11, 12], а відсутність вимог до фазової ДН використовується як додатковий ступінь свободи для покращення показників синтезу. Водночас відсутність у початкових умовах задач синтезу апріорної інформації про фазову ДН відносить їх до нелінійних суттєво некоректних обернених задач математичної фізики, яким притаманні неєдиність, галуження або біфуркація розв'язків. Дослідження властивостей розв'язків таких класів задач для лінійних і плоских антен та антенних решіток наведено, зокрема, в роботах [1, 9]. На відміну від [1, 9], у цій роботі розглядаються задачі синтезу ВС, у яких вводяться відповідні обмеження на джерела збудження випромінюваних полів, а саме: поряд із заданою ДН вводиться обмеження на відхилення синтезованого амплітудно-фазового розподілу (АФР) у випромінюючій системі від деякого наперед заданого АФР, який надалі називатимемо базовим. Такі обмеження зумовлені необхідністю спрощення практичної реалізації результатів синтезу [5].

2. Основні рівняння синтезу. Відомо [1], що ДН випромінюючої системи f може бути подана як результат дії лінійного оператора A:

$$f = AI\,, \tag{1}$$

який здійснює відображення з деякого гільбертового простору $H_I = L_2(V)$, якому належать функції, що описують АФР струмів у випромінюючій системі, у гільбертів простір $H_f = L_2(G)$, до якого належать функції, що описують ДН випромінюючої системи. Вигляд і властивості оператора A визначаються типом і геометрією випромінюючої системи.

Покладемо, що відомий базовий АФР струмів збудження $I_* \in H_I$. Задачу синтезу ВС за заданою амплітудною ДН F сформулюємо як задачу мінімізації функціонала

$$\sigma_{F_\alpha}(I) = \| F - |AI| \|^2_{H_I} + \alpha \| I - I_* \|^2_{H_I} \equiv \| F - |f| \|^2_{H_I} + \alpha \| I - I_* \|^2_{H_I} \tag{2}$$

на гільбертовому просторі H_I, у якому перший доданок описує середньоквадратичне відхилення модулів заданої й синтезованої ДН в області G, другий доданок характеризує відхилення оптимального АФР від базового, α − ваговий множник. Наявність у першому доданку (2) модуля від функції свідчить про те, що він є неопуклим. Існування принаймні однієї точки мінімуму функціонала (2) стверджує

Теорема 1. *Нехай лінійний оператор* $A : H_I \to H_f$ *є цілком неперервним, а задана амплітудна діаграма напрямленості* F *− дійсна додатна (невід'ємна) й інтеґровна з квадратом функція.*

Тоді в просторі H_I *існує хоч би одна точка абсолютного мінімуму функціонала* $\sigma_{F_\alpha}(I)$ *і з будь-якої мінімізуючої послідовності можна виділити підпослідовність, яка слабко збігається до однієї з точок абсолютного мінімуму.*

Д о в е д е н н я. Оскільки гільбертів простір $H_I = L_2(V)$ є рефлексивним банаховим простором, то для доведення теореми згідно з [3, теорема 10.2] достатньо показати виконання таких умов:

(***i***) $\sigma_{F_\alpha}(I)$ – слабко півнеперервний знизу на H_I функціонал,

(***ii***) $\lim\limits_{\|I\|_{H_I} \to \infty} \sigma_{F_\alpha}(I) = +\infty$.

Спочатку покажемо, що $\sigma^{(1)}_{F_\alpha}(I) = \| F - |AI| \|^2_{H_I} \equiv \left(F - |AI|, F - |AI|\right)_{H_I}$ − слабко півнеперервний знизу на H_I функціонал. Нехай $\{I_n\} \in H_I$ − довільна слабко збіжна до $I_0 \in H_I$ послідовність. Оскільки лінійний оператор $A : H_I \to H_f$ є цілком неперервним, то він є також підсилено неперервним [4]. Із означення підсиленої неперервності оператора випливає, що A перетворює будь-яку слабко збіжну послідовність $\{I_n\} \to I_0$ (при $n \to \infty$) простору H_I у послідовність $\{AI_n\} = \{f_n\} \in H_f$, сильно збіжну до $f_0 = AI_0 \in H_f$ у метриці простору H_f, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f_0 \|_{H_f} = 0 . \tag{3}$$

Оцінимо величину

$$\left|\sigma^{(1)}_{F_\alpha}(I_n) - \sigma^{(1)}_{F_\alpha}(I_0)\right| = \left| -2\left[(F, |f_n|)_{H_f} - (F, |f_0|)_{H_f} \right] + \| f_n \|^2_{H_f} - \| f_0 \|^2_{H_f} \right| \le$$

$$\le \left| 2(F, |f_n| - |f_0|)_{H_f} \right| + \left| \| f_n \|^2_{H_f} - \| f_0 \|^2_{H_f} \right| . \tag{4}$$

На підставі нерівності

$$\big| |f_n| - |f_0| \big| \le |f_n - f_0| ,$$

рівності (3) та нерівності Коші − Буняковського для першого доданка в правій частині нерівності (4) одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} \left| 2(F, |f_n| - |f_0|)_{H_f} \right| \le \| F \|_{H_f} \lim_{n\to\infty} \big\| |f_n| - |f_0| \big\|_{H_f} \le$$

$$\le \| F \|_{H_f} \lim_{n\to\infty} \big\| |f_n - f_0| \big\|_{H_f} \le \| F \|_{H_f} \lim_{n\to\infty} \| f_n - f_0 \|_{H_f} \to 0 . \tag{5}$$

Для другого доданка в нерівності (4) на підставі нерівності Коші − Буняковського та рівності (3) маємо

$$\lim_{n\to\infty} \left| \| f_n \|^2_{H_f} - \| f_0 \|^2_{H_f} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| (f_n, f_n)_{H_f} - (f_0, f_0)_{H_f} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| (f_n, f_n)_{H_f} - (f_n, f_0)_{H_f} + (f_n, f_0)_{H_f} - (f_0, f_0)_{H_f} \right| \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \left(\left| (f_n, f_n - f_0)_{H_f} \right| + \left| (f_n - f_0, f_0)_{H_f} \right| \right) \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \left[\| f_n \|_{H_f} + \| f_0 \|_{H_f} \right] \| f_n(s) - f_0(s) \|_{H_f} = 0 , \tag{6}$$

оскільки $\| f_n \|_{C^{(2)}_{(\bar{G})}}$, $\| f_0 \|_{C^{(2)}_{(\bar{G})}}$ − обмежені величини як норми елементів збіжної послідовності.

Отже, на підставі нерівностей (4)−(6) одержуємо, що

$$\lim_{n\to\infty} \sigma^{(1)}_{F_\alpha}(I_n) = \lim_{n\to\infty} \sigma^{(1)}_{F_\alpha}(I_0),$$

тобто $\sigma^{(1)}_{F_\alpha}(I)$ − слабко неперервний функціонал. Оскільки за означенням [3] слабко неперервний функціонал є слабко півнеперервним знизу та зверху функціоналом, то $\sigma^{(1)}_{F_\alpha}(I)$ − слабко півнеперервний знизу функціонал.

Покажемо, що $\sigma^{(2)}_{F_\alpha}(I) = \| I - I_* \|^2_{H_I} = (I - I_*, I - I_*)_{H_I}$ − слабко півнеперервний знизу функціонал. Диференціюючи $\sigma^{(2)}_{F_\alpha}(I)$ за Гато, знаходимо

$$D\sigma^{(2)}_{F_\alpha}(I,\psi) = 2\,\mathrm{Re}\,(I - I_*, \psi)_{H_I},$$

де ψ − довільний елемент простору H_I. Легко переконатися, що

$$D\sigma^{(2)}_{F_\alpha}(I, I-\tilde{I}) - D\sigma^{(2)}_{F_\alpha}(\tilde{I}, I-\tilde{I}) = 2\left\| I - \tilde{I} \right\|^2_{H_I} \ge 0 \tag{7}$$

для довільних $I, \tilde{I} \in \omega$, де ω − деяка опукла множина простору H_I, причому рівність (7) виконується лише при $I = \tilde{I}$. Звідси випливає, що функціонал $\sigma^{(2)}_{F_\alpha}(I)$ є строго опуклим і задовольняє умови леми 8.3 і теореми 8.3 з [3], згідно з якими він є слабко півнеперервним знизу функціоналом.

Тим самим доведено, що кожний із доданків у виразі (2) є слабко півнеперервним знизу функціоналом. Отже, $\sigma_{F_\alpha}(I)$ − слабко півнеперервний знизу функціонал.

Розглянемо

$$\lim_{\|I\|\to\infty} \| I - I_* \|^2_{H_I} = \lim_{\|I\|\to\infty} \left(\| I \|^2_{H_I} - 2\,\mathrm{Re}\,(I, I_*)_{H_I} + \| I_* \|^2_{H_I} \right) \ge$$
$$\ge \lim_{\|I\|\to\infty} \left(\| I \|^2_{H_I} - 2 \| I \|_{H_I} \| I_* \|_{H_I} + \| I_* \|^2_{H_I} \right) = +\infty.$$

Оскільки обидва доданки у функціоналі (2) є додатними, то з цієї нерівності випливає, що $\lim\limits_{\|I\|_{H_I}\to\infty} \sigma_{F_\alpha}(I) = +\infty$, тобто виконується умова (***ii***).

Теорему доведено. ◊

У подальшому чисельне знаходження екстремальних точок функціонала $\sigma_{F_\alpha}(I)$, дослідження їх кількості та якісних характеристик ґрунтується на чисельному розв'язуванні й дослідженні рівняння, яке отримуємо з необхідної умови мінімуму функціонала. Диференціюючи $\sigma_{F_\alpha}(I)$ за Гато і прирівнюючи до нуля його градієнт, одержуємо рівняння

$$\alpha(I - I_*) = -A^* A I + A^*(F \exp(i \arg(AI))) \tag{8}$$

відносно оптимального АФР у просторі H_I.

Покладемо, що множина нулів оператора A складається лише з нульового елемента. Подіявши оператором A на обидві частини рівності (8) і враховуючи рівність (1), одержуємо рівняння відносно синтезованої ДН

$$\alpha(f - f_*) = -AA^* f + AA^*(F \exp(i \arg f)). \tag{9}$$

Із теореми 1 і властивості (***ii***) функціонала $\sigma_{F_\alpha}(I)$ випливає

Наслідок 1. *Оскільки функціонал* $\sigma_{F_\alpha}(I)$ *диференційовний на* H_I *за Гато, є зростаючим і згідно з теоремою* 1 *має хоч би одну точку безумовного мінімуму, то рівняння* (8) *у просторі* H_I *і рівняння* (9) *у просторі* H_f *мають принаймні по одному розв'язку.*

Для рівнянь (8), (9) справджується

Лема 1. *За умов теореми* 1 *між розв'язками рівнянь існує взаємно однозначна відповідність, тобто кожному розв'язку* $\tilde{I}$ *рівняння* (8) *відповідає розв'язок* $\tilde{f} = A\tilde{I}$ *рівняння* (9), *і навпаки.*

Д о в е д е н н я. Нехай $\tilde{I}$ − розв'язок рівняння (8). Тоді[1]

$$\alpha(\tilde{I} - I_*) - A^*(F\exp(i\arg(A\tilde{I}))) + A^*A\tilde{I} \equiv \theta.$$

Подіявши на цю рівність лінійним оператором A, одержуємо

$$\alpha(A\tilde{I} - AI_*) - AA^*(F\exp(i\arg(A\tilde{I}))) + AA^*A\tilde{I} \equiv \theta.$$

Оскільки оператор A діє з простору $H_I = L_2(V)$ у простір $H_f = L_2(G)$, а множина його нулів за припущенням складається лише з нульового елемента θ, то з останньої рівності випливає, що $\tilde{f} = A\tilde{I} \in H_f$ є розв'язком рівняння (9).

Навпаки, нехай $\tilde{f} \in H_f$ − розв'язок рівняння (9). Оскільки спряжений оператор A^* діє зі спряженого простору $H_f^* = L_2^*(G)$ у спряжений простір $H_I^* = L_2^*(V)$, а гільбертів простір L_2^* співпадає з простором L_2 (див. [6, с. 191]), то звідси випливає, що A^* діє з простору $H_f = L_2(G)$ у простір $H_I = L_2(V)$.

Тотожність, у яку перетворюється рівняння (9) на розв'язку $\tilde{f}$, запишемо у вигляді

$$\alpha(\tilde{f} - f_*) \equiv A(A^*(F\exp(i\arg\tilde{f}) - \tilde{f})). \tag{10}$$

Із того, що F і $\tilde{f}$ − інтеґровні з квадратом функції, випливає, що функція $\left(F\,\mathrm{e}^{i\arg\tilde{f}} - \tilde{f}\right) \in H_f$ є також інтеґровною з квадратом на області G. Внаслідок цього у просторі H_I існує елемент $\Delta\tilde{I} = \tilde{I} - I_*$, який є результатом дії спряженого оператора A^* на функцію $F\exp(i\arg\tilde{f}) - \tilde{f}$. Отже, права частина тотожності (10) є результатом дії оператора A на елемент $\Delta\tilde{I}$. На підставі цього ліву частину тотожності (10) подамо також як результат дії оператора A на елемент $\Delta\tilde{I}$:

$$\alpha\Delta\tilde{f} = \alpha(A\tilde{I} - AI_*) = \alpha(\tilde{f} - f_*). \tag{11}$$

Підставляючи (11) у (10), одержуємо

$$A\left[\alpha(\tilde{I} - I_*) - \left(A^*(F\exp(i\arg(A\tilde{I})) - A\tilde{I})\right)\right] \equiv \theta. \tag{12}$$

Оскільки множина нулів оператора A складається лише з нульового елемента, то з (12) випливає тотожність

$$\alpha(\tilde{I} - I_*) \equiv -A^*A\tilde{I} + A^*(F\exp(i\arg(A\tilde{I}))),$$

тобто $\tilde{I}$ є розв'язком рівняння (8).

Лему доведено. ◊

---

[1] Розуміється, що ця тотожність виконується за аргументом функції $\tilde{I}$.

Тим самим встановлено взаємно однозначну відповідність між розв'язками рівнянь (8) та (9). При цьому за розв'язками рівняння (8) розв'язки рівняння (9) визначаються як $\tilde{f} = A\tilde{I}$. Навпаки, за розв'язками рівняння (9) розв'язки рівняння (8) визначаються за рівністю

$$\tilde{I} = I_* - \frac{1}{\alpha}\left(A^*\tilde{f} - A^*(F\exp(i\arg\tilde{f}))\right). \tag{13}$$

Отже, на підставі властивостей розв'язків одного з рівнянь властивості розв'язків другого рівняння визначаються за відомими співвідношеннями. Із рівності (13) випливає, що на розв'язках $\tilde{I}$ і $\tilde{f} = A\tilde{I}$ відповідно рівнянь (8) і (9) функціонал $\sigma_{F_\alpha}(I)$ набуває одного й того ж значення, тобто рівняння (8), (9) є еквівалентними відносно функціонала $\sigma_{F_\alpha}(I)$.

3. Чисельне розв'язування основних рівнянь синтезу. В основу побудови ітераційних процесів розв'язування нелінійних операторних рівнянь (8), (9) покладемо неявну схему методу послідовних наближень. У загальному випадку ітераційний процес для розв'язування рівняння (8) має вигляд

$$(E + \alpha^{-1}A^*A)\, I_{n+1} = \alpha^{-1}A^*(F\exp(i\arg(AI_n))) + I_*, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{14}$$

де E – тотожний оператор, що діє у просторі $H_I = L_2(V)$.

Аналогічної до (14) форми набуває неявна схема ітераційного процесу для рівняння (9) відносно синтезованої ДН f:

$$(E + \alpha^{-1}AA^*)\, f_{n+1} = \alpha^{-1}AA^*(F\exp(i\arg(f_n))) + f_*, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{15}$$

Неявні схеми (14), (15) характерні тим, що на кожному кроці ітерації розв'язується лінійне операторне рівняння типу

$$x = Ux + y \tag{16}$$

у банаховому просторі X, де U – лінійний компактний оператор. Згідно з [6] для того щоб рівняння (16) мало розв'язок при довільному $y \in X$, необхідно й достатньо, щоб однорідне рівняння $x = Ux$ мало єдиний розв'язок (очевидно, $x = 0$). Покажемо, що лінійні рівняння (14), (15) задовольняють цю умову. Легко впевнитися, що оператори A^*A і AA^* є самоспряженими і додатно напіввизначеними. Дійсно,

$$(A^*AI, I)_{H_I} = (AI, AI)_{H_f} = \| AI \|^2_{H_f} = (I, A^*AI)_{H_I} \ge 0$$

для будь-якого $I \in H_I$ і

$$(AA^*f, f)_{H_f} = (A^*f, A^*f)_{H_I} = (f, AA^*I)_{H_f} \ge 0$$

для будь-якого $f \in H_f$. Оскільки A – цілком неперервний оператор, то A^*A і AA^* є також цілком неперервними операторами [7], які діють у банахових просторах. Звідси випливає, що власні значення операторів A^*A та AA^* є дійсними й невід'ємними. Отже, відповідні (8), (9) однорідні операторні рівняння

$$-\alpha I_{n+1} = A^*AI_{n+1}, \qquad -\alpha f_{n+1} = AA^*f_{n+1}, \tag{17}$$

мають лише тривіальні розв'язки. Звідси випливає існування і єдиність розв'язків рівнянь (14), (15) у просторах H_I і H_f відповідно[2]. У цьому випадку

[2] **Примітка 1.** Зокрема, якщо (14), (15) є інтеґральними рівняннями другого роду зі симетричними фредгольмівськими ядрами, а число $-\alpha$ не є власним значенням відповідних однорідних інтеґральних рівнянь, то рівняння (14), (15) при довільних правих частинах (що належать до просторів H_I і H_f відповідно) мають по одному й тільки по одному розв'язку [7].

при $0 < \alpha < \infty$ існує обернений оператор $(E + \alpha^{-1}A^*A)^{-1}$, причому [9]

$$\left\| (E + \alpha^{-1}A^*A)^{-1} \right\|_{H_I} \le 1.$$

Розглянемо необхідний надалі допоміжний функціонал

$$\sigma_{F_{\alpha n}}(I) = \| F \|_{H_f}^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(F \exp(i \arg f_n), AI \right)_{H_f} +$$

$$+ \| AI \|_{H_f}^2 + \alpha \| I - I_* \|_{H_I}^2,$$

де $\arg f_n$ – задана функція, яку отримуємо на n-му кроці ітераційного процесу (14). Для функціонала $\sigma_{F_{\alpha n}}(I)$ справджується

Лема 2. *За умов теореми* 1 *при* $0 < \alpha < \infty$ *функціонал* $\sigma_{F_{\alpha n}}(I)$ *на просторі* $H_I = L_2(\bar{V})$ *має єдину точку мінімуму, яка є розв'язком лінійного операторного рівняння*

$$\alpha(I - I_*) = -A^*AI + A^*(F \exp(i \arg f_n)). \tag{18}$$

Зазначимо, що рівняння (18) одержано з необхідної умови мінімуму функціонала: $\mathrm{grad}\sigma_{F_{\alpha n}}(I) = 0$. Оскільки $H_I = L_2(\bar{V})$ є рефлексивним банаховим простором, то для д о в е д е н н я леми, як і при доведенні теореми 1, достатньо довести виконання умов (***i***), (***ii***). ◊

Із леми 2 випливає, що у просторі H_I існує точка $\tilde{I}^{(n)}$, на якій функціонал $\sigma_{F_{\alpha n}}$ набуває мінімального значення. З огляду на умову (***ii***) $\tilde{I}^{(n)}$ є внутрішньою точкою деякої слабко замкненої опуклої множини $\omega \in H_I$. Звідси випливає виконання умови $\mathrm{grad}\,\sigma_{F_{\alpha n}}(\tilde{I}^{(n)}) = 0$. Як уже йшлося, рівняння (17) при $0 < \alpha < +\infty$ мають лише тривіальні розв'язки. Звідси випливає існування і єдиність розв'язку рівняння (18), якщо $A^*(F \exp(i \arg f_n)) \in H_I$.

Запишемо еквівалентну схему ітераційного процесу (14) у вигляді

$$I_{n+1} = (E + \alpha^{-1}A^*A)^{-1}\left[\alpha^{-1}A^*(F \exp(i \arg(AI_n))) + I_*\right],$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

а рівняння (18) запишемо так:

$$(E + \alpha^{-1}A^*A)^{-1} I = \alpha^{-1}A^*(F \exp(i \arg(AI_n))) + I_*.$$

Оскільки існує оператор $(E + \alpha^{-1}A^*A)^{-1}$, то для довільної функції $\arg f_n$ такої, що $A^*(F \exp(i \arg f_n)) \in H_I$, єдиним розв'язком рівняння (18) є функція

$$\tilde{I}^{(n)} = (E + \alpha^{-1}A^*A)^{-1}\left[\alpha^{-1}A^*(F \exp(i \arg f_n)) + I_*\right],$$

на якій функціонал $\sigma_{F_{\alpha n}}(I)$ набуває мінімального значення. З цієї рівності і рівності (19) випливає, що $\tilde{I}^{(n)} = I_{n+1}$, а також нерівність $\sigma_{F_{\alpha n}}(I_{n+1}) \le \sigma_{F_{\alpha n}}(I)$, яка виконується для будь-якого $I \in H_I$, у тому числі й для $I = I_n$:

$$\sigma_{F_{\alpha n}}(I_{n+1}) \le \sigma_{F_{\alpha n}}(I_n).$$

Для послідовності $\{I_n\}$, яка одержується в результаті ітераційного процесу (19), справджується

Теорема 2. *Нехай* $A : L_2(\bar{V}) \to L_2(\bar{G})$ – *цілком неперервний оператор,* F – *інтеґровна з квадратом дійсна невід'ємна на* $\bar{G}$ *функція і при* $0 < \alpha < \infty$ *існує обернений оператор* $(E + \alpha^{-1} A^* A)^{-1}$, *крім того, розмірність простору нулів* $N(A) = 0$.

Тоді послідовність $\{I_n\}$, *що ґенерується ітераційним процесом* (19), *є релаксаційною для функціонала* $\sigma_{F_\alpha}(I)$ *і мінімізуючою для функціонала*

$$\left\| \mathrm{grad}\sigma_{F_\alpha}(I) \right\|_{H_I} = \left\| A^* F(\exp(i \arg AI)) - A^* AI - \alpha I + \alpha I_* \right\|_{H_I}$$

на просторі H_I.

Д о в е д е н н я теореми з використанням леми 2 проводиться аналогічно, як у [10], тому тут воно опущено. ◊

Позначимо оператор, що міститься у правій частині рівності (19), через $D(I)$:

$$D(I) = (E + \alpha^{-1} A^* A)^{-1} \left[\alpha^{-1} A^* (F \exp(i \arg(AI))) + I_* \right].$$

Для оператора $D(I)$ справджується

Лема 3. *Нехай* $A : H_I \to H_f$ – *цілком неперервний оператор. Тоді оператор* $D(I)$ *є компактним і переводить будь-яку обмежену множину* $U_r = \{I : \| I \|_{H_I} \le r\}$ *у свою відносно компактну частину при* $r = \alpha^{-1} \left\| A^* \right\| \| F \|_{H_f} + \| I_* \|_{H_I}$.

Д о в е д е н н я. Оскільки A – цілком неперервний оператор, то A^* також є цілком неперервним оператором [7]. Через те що $(E + \alpha^{-1} A^* A)^{-1}$ – лінійний оператор і $\left\| (E + \alpha^{-1} A^* A)^{-1} \right\| \le 1$, то $(E + \alpha^{-1} A^* A)^{-1} A^*$ – цілком неперервний оператор як суперпозиція обмеженого й цілком неперервного операторів. Отже, для доведення леми достатньо показати, що $\Phi(I) = F \exp(i \arg(AI))$ – обмежений на H_I оператор. Дійсно,

$$\| \Phi(I) \| = \| F \exp(i \arg(AI)) \| \le \| F \|_{H_f}.$$

Тоді на підставі умов леми отримуємо

$$\| D(I) \|_{H_I} = \left\| (E + \alpha^{-1} A^* A)^{-1} \alpha^{-1} A^* (F \exp(i \arg(AI))) + I_* \right\| \le$$
$$\le \alpha^{-1} \left\| A^* \right\| \| F \|_{H_f} + I_*,$$

тобто

$$D(U_r) \subset U_r. \tag{20}$$

Лему доведено. ◊

Таким чином, оператор D переводить обмежену множину U_r у свою відносно компактну частину, яку позначимо через ω. Приєднуючи всі її граничні точки до ω, отримуємо компактну множину $\bar{\omega}$ з радіусом.

Оскільки рівняння (8) має принаймні один розв'язок, який є нерухомою точкою оператора D, то зі співвідношення (20) випливає, що всі нерухомі точки оператора D належать множині $\bar{\omega} \subset U_r$. Якщо початкове наближення $I_0 \in U_r$, то $\bar{\omega} \bigcup I_0 \subset U_r$ – компактна множина [8]. Отже, послідовність $\{I_n\}$ належить компактній множині. На підставі цього з послідовності $\{I_n\}$ можна виділити фундаментальну підпослідовність $\{I_{n_k}\}$, яка збігається до деякої точки $\tilde{I} \in \bar{\omega} \subset U_r$. Якщо $\mathrm{grad}\, \sigma_\alpha(I)$ є неперервним оператором у деякому околі точки $\tilde{I}$, то

$$\lim_{n_k\to\infty}\left\| \operatorname{grad}\sigma_{F_\alpha}(I_{n_k})\right\|_{H_I} = \left\| \operatorname{grad}\sigma_{F_\alpha}\left(\lim_{n_k\to\infty} I_{n_k}\right)\right\|_{H_I} =$$

$$= \left\| \operatorname{grad}\sigma_{F_\alpha}(\tilde{I})\right\|_{H_I} = 0 .$$

Відповідно

$$\operatorname{grad}\sigma_{F_\alpha}(\tilde{I}) = 0 ,$$

тобто $\tilde{I} \in U_r$ є розв'язком рівняння (8). Залежно від вибору початкового наближення послідовні наближення можуть збігатися до розв'язків різних типів [8]. Таким чином, показано, що справджується

Наслідок 2. *Якщо* $\operatorname{grad}\sigma_\alpha(I)$ *є неперервним оператором у деякому околі* $\tilde{U} \subset H_I$ *точки* $\tilde{I}$, *то з теореми* 1 *і леми* 3 *випливає, що підпослідовність* $\{I_{n_k}\}$ *збігається до деякого розв'язку рівняння* (8) *за нормою простору* H_I, *якщо* $I_0 \in \tilde{U}$.

4. Синтез лінійної антени. Розглянемо застосування запропонованого підходу до синтезу лінійної антени. Діаграма напрямленості лінійної антени довжини $2a$, яка напрямлена вздовж осі OZ, подається формулою [1]

$$f(s) = AI \equiv \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_{-1}^{1} I(z)e^{iczs}\,dz ,$$

де $s = \sin\vartheta/\sin\alpha$ – узагальнена кутова координата; $c = ka\sin\alpha$ – фізичний параметр, у якому $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число, 2α – величина кута, де задано відмінну від тотожного нуля необхідну амплітудну діаграму $F(s)$. Із фізичних міркувань покладаємо, що $F(s)$ – неперервна функція при $s \in [-1,1]$.

Приймаємо, що $H_I = L_2[-1,1]$, $H_f = L_2[-1,1]$, а скалярні добутки і норми у цих просторах означимо так:

$$(I_1, I_2)_{H_I} = \int_{-1}^{1} I_1(s)\overline{I_2(s)}\,ds, \qquad \| I \|_{H_I} = (I, I)_{H_I}^{1/2},$$

$$(f_1, f_2)_{H_f} = \int_{-1}^{1} f_1(s)\overline{f_2(s)}\,ds, \qquad \| f \|_{H_f} = (f, f)_{H_f}^{1/2}.$$

Оператор $A : H_I \to H_f$, який визначає ДН антени, є цілком неперервним як інтеґральний оператор з неперервним ядром [6]. Покладемо, що базовий АФР струму в антені задано функцією $I_*(z)$. Спряжений оператор A^* визначаємо на підставі рівності $(f, AI)_{H_f} = (A^* f, I)_{H_I}$:

$$A^* f = \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \int_{-1}^{1} f(s)e^{-iczs}\,ds .$$

Беручи до уваги введені означення операторів A, A^* та просторів H_I, H_f, одержуємо розгорнуту форму функціонала (2):

$$\sigma_{F_\alpha}(I) = \int_{-1}^{1} \left[F(s) - |f(s)|\right]^2 ds + \alpha \int_{-1}^{1} |I(z) - I_*(z)|^2\,dz .$$

Рівняння (8) відносно оптимального АФР струмів в антені набуває вигляду

$$\alpha(I(z)-I_*(z)) = -\int_{-1}^{1} \frac{\sin\left(c(z-z')\right)}{\pi(z-z')} I(z')\,dz' +$$

$$+\sqrt{\frac{c}{2\pi}}\int_{-1}^{1} F(s)\exp\left[\,i\left(\arg\sqrt{\frac{c}{2\pi}}\int_{-1}^{1} I(z')\exp(icz's)\,dz' - czs\right)\right]ds\,, \quad (21)$$

а рівняння (9) відносно синтезованої ДН має форму

$$\alpha(f(s)-f_*(s)) = -\int_{-1}^{1} \mathcal{K}(s,s',c)f(s')\,ds' + \int_{-1}^{1} F(s')\mathcal{K}(s,s',c)e^{i\arg f(s')}\,ds'\,, \quad (22)$$

де $\mathcal{K}(s,s',c) = \sin\left(c(s-s')\right)/\left(\pi(s-s')\right)$.

За розв'язками рівняння (22) оптимальний АФР струмів в антені визначаємо за формулою

$$I(z) = I_*(z) + \alpha^{-1}\sqrt{\frac{c}{2\pi}}\int_{-1}^{1}\left[F(s)-|f(s)|\right]\exp\left[i(\arg f(s) - czs)\right]ds\,.$$

При числовому розв'язуванні інтеґральних рівнянь (21), (22) можна використовувати, зокрема, метод механічних квадратур.

Розглянемо числові приклади синтезу двох заданих амплітудних ДН. На рис. 1 наведено задану ДН $F(s) = \cos(\pi s/2)$ (штрихова лінія) та амплітуди синтезованих ДН при значеннях параметра $\alpha = 0.001,\ 0.005,\ 0.01,\ 0.1,\ 0.5$. Амплітудно-фазові розподіли струмів у антені, що створюють ці ДН, наведено на рис. 2. Із аналізу рис. 1 випливає, що зі зменшенням параметра α зростає ступінь наближення модулів заданої й синтезованої ДН у межах відрізка $[-1,1]$. При цьому зростає рівень бокових пелюсток. Навпаки, при збільшенні α погіршується наближення модулів заданої й синтезованої ДН у межах відрізка $[-1,1]$, водночас спадає рівень бокових пелюсток. Ця закономірність дає змогу шляхом числових експериментів вибирати у функціоналі (2) таке значення вагового параметра α, при якому результат синтезу задовольняє потреби практики. Різницю між базовим і синтезованими АФР струмів в антені наведено на рис. 3. Ураховуючи рівень бокових пелюсток, вважаємо, що прийнятними для практичної реалізації є розв'язки, що відповідають значенням параметра $\alpha = 0.5$ або $\alpha = 0.1$.

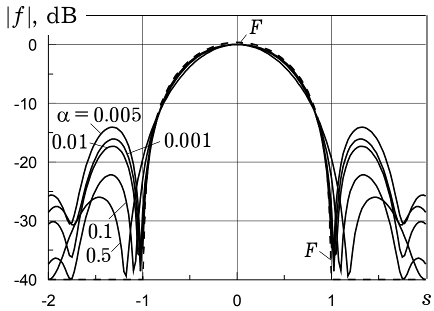

Рис. 1

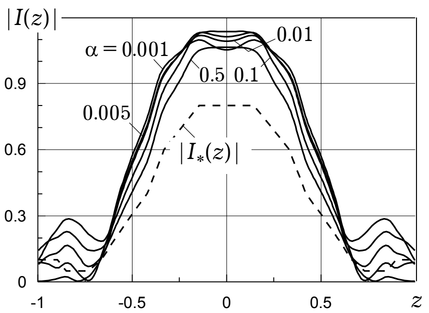

Рис. 2

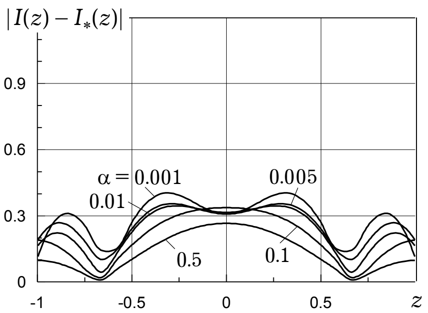

Рис. 3

На рис. 4, 5 наведено аналогічні до попереднього результати синтезу заданої амплітудної ДН косекансного типу

$$F(s) = \begin{cases} 10s + 10, & s \in [-1, \ -0.9], \\ 1, & s \in (-0.9, \ -0.8), \\ 1/s + 1.8, & s \in [-0.8, 1]. \end{cases}$$

Прийнятним для практики є розв'язок, що відповідає $\alpha = 0.1$.

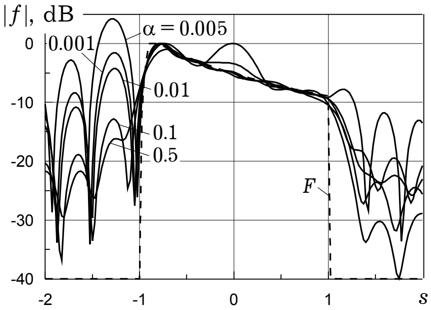

Рис. 4

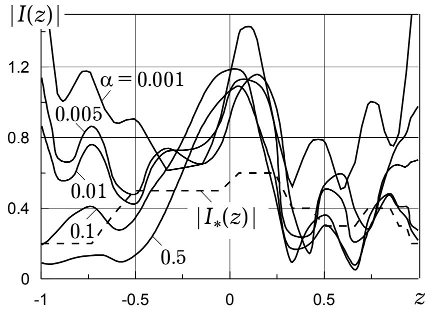

Рис. 5

5. Висновки. Із аналізу числових експериментів випливає, що результати синтезу суттєво залежать від величини вагового параметра α, яким регулюється співвідношення між першим і другим доданками функціонала (2). Загальні підходи для вибору оптимального значення параметра регуляризації для нелінійних обернених задач у літературі відсутні. Тому розв'язуємо задачу синтезу для деякої послідовності значень параметра α і вибираємо той із розв'язків, параметри якого задовольняють практичні потреби.

Основні рівняння синтезу (8), (9) є нелінійними операторними рівняннями типу Гаммерштейна і мають неєдиний розв'язок. Дослідження галуження розв'язків для синтезу лінійної антени при $I_*(z) \equiv 0$ наведено, наприклад, у [9]. Питання кількості існуючих розв'язків для задач такого класу потребує окремих досліджень для кожного типу випромінюючої системи зокрема.

Варіаційна задача (2) допускає узагальнення, яке полягає у введенні у функціонал відповідних вагових функцій, які дають змогу по-різному регулювати ступінь наближення синтезованої ДН до заданої у різних кутових напрямках.

Основні рівняння синтезу одержано на загальному (операторному) рівні, тому запропонований підхід легко поширюється на синтез різних типів випромінюючих систем, у тому числі й на синтез антенних решіток при урахуванні взаємного впливу випромінювачів.

1. *Андрийчук М. И., Войтович Н. Н., Савенко П. А., Ткачук В. П.* Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
2. *Бахрах Л. Д., Кременецкий С. Д.* Синтез излучающих систем (теория и методы расчета). – Москва: Сов. радио, 1974. – 232 с.
3. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1972. – 416 с.
4. *Вайнберг М. М.* Функциональный анализ. – Москва: Просвещение, 1979. – 128 с.
5. *Дмитриев В. И., Ильинский А. С., Свешников А. Г.* Развитие математических методов исследования прямых и обратных задач электродинамики // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 6. – С. 123–141.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 741 с.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1968. – 496 с.

8. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. П., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 456 с.
9. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування). – Львів: ІППММ НАН України, 2002. – 320 с.
10. *Савенко П. О.* Про збіжність ітераційного процесу в нелінійних задачах синтезу випромінюючих систем при застосуванні згладжуючих функціоналів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 2. – С. 105–111.
11. *Duan D.-W., Rahmat-Samii Ya.* A generalized diffraction synthesis technique for high performance reflector antennas // IEEE Trans. Antennas and Propag. – 1995. – **43**, No. 1. – P. 27–40.
12. *Marhefka R. J., Pelton E. I., Burnside W. D.* An iterative approach for computing an antenna aperture distribution from given radiation pattern data // Int. Symp. Dig.: Anten. and Propag., Seattle, Wash., 1979. – New York, 1979. – Vol. 1. – P. 50–53.

СИНТЕЗ ИЗЛУЧАЮЩИХ СИСТЕМ ПО ЗАДАННОЙ АМПЛИТУДНОЙ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ИСТОЧНИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Развивается метод решения одного класса нелинейных задач синтеза излучающих систем при наличии ограничений на источники излучения. На общем (операторном) уровне сформулированы вариационные постановки задач, получены основные уравнения синтеза, доказана теорема существования решений. Построен и обоснован итерационный процесс для нахождения численных решений. Применение предложенного метода иллюстрируется на задаче синтеза линейной антенны по заданной амплитудной диаграмме направленности.

SYNTHESIS OF RADIATING SYSTEM ACCORDING TO PRESCRIBED AMPLITUDE DIRECTIVITY PATTERN IN THE PRESENCE OF LIMITATIONS ON IRRADIATING SOURCES

The method for solving one class of non-linear synthesis problems of radiating systems in the presence of limitations on the radiating sources is developed. The variational formulation of problems on the general (operational) level is given, the basic synthesis equations are obtained and the theorem of solutions' existence is proved. The iterative process for finding the numerical solutions is constructed and justified. The use of suggested method is illustrated on the synthesis problem of linear antenna according to the prescribed amplitude directivity pattern.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.11.05