УДК 519.6

Б. М. Подлевський

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ПОЧЕРГОВИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ НЕЛІНІЙНИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ

Запропоновано та обґрунтовано ітераційний процес обчислення простого власного значення нелінійної спектральної задачі. Виділено клас нелінійних спектральних задач, для яких запропонований ітераційний процес за власним значенням забезпечує почергові двосторонні наближення до простого власного значення, та клас задач, для якого цей самий ітераційний процес дає лише односторонні монотонні наближення.

Один із підходів, який використовується для розв'язування алгебраїчної задачі на власні значення в $\mathbb{C}^n$ [15], полягає у зведенні спектральної проблеми до нелінійної системи $n+1$ рівнянь з $n+1$ невідомими за допомогою умови нормування власного вектора, яку розв'язують з використанням будь-якого відомого методу, наприклад, операторного методу Ньютона [8]. Такий підхід ще називають методом доповненого вектора [1], оскільки у цьому випадку метод Ньютона застосовують до «розширеного» вектора невідомих в $\mathbb{C}^{n+1}$.

Цю ідею використано для побудови та дослідження інтервальних методів розв'язування спектральних задач (див., наприклад, [7, 9, 10, 13, 14]). Маючи деякі в певному сенсі задовільні двосторонні наближення для власного вектора та власного значення, інтервальні методи застосовують для їх уточнення. Інтерес до двосторонніх методів, зокрема інтервальних, зумовлюється, перш за все, тим, що вони порівняно з іншими ітераційними методами дозволяють оцінювати шукані розв'язки з двох сторін на кожному кроці ітераційного процесу, тобто на кожному кроці отримувати зручну апостеріорну оцінку похибки обчислень.

У цій роботі пропонується інший спосіб (не пов'язаний з інтервальною арифметикою) побудови двосторонніх наближень до власних значень нелінійної спектральної задачі. Він базується на варіаційному підході опису спектра. При цьому суттєву роль відіграє належне узагальнення функціонала Релея для нелінійної задачі. Такий підхід дозволяє побудувати та обґрунтувати двосторонні ітераційні процеси з різними узагальненими функціоналами Релея, які дають почергові наближення простого власного значення нелінійної спектральної задачі.

Такий підхід для побудови ітераційних алгоритмів почергових і включаючих апроксимацій розв'язків для нелінійних рівнянь був запропонований і досліджувався у роботах [3–5, 11, 12].

1. Деякі допоміжні твердження. Нехай H – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і $B(H)$ – множина лінійних обмежених самоспряжених операторів в H. Розглянемо нелінійну задачу на власні значення

$$L(\lambda)y = 0, \qquad \lambda \in (a,b), \qquad y \in H, \tag{1}$$

з операторнозначною функцією $L:(a,b) \to B(H)$, яка аналітично залежить від спектрального параметра λ.

Означення 1. Неперервний функціонал $p : H \setminus \{0\} \to (a,b)$ називають *функціоналом Релея для оператор-функції* $L(\lambda)$, якщо виконуються умови

1°) $p(\alpha y) = p(y), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0$,

2°) $(L(p(y))y,\ y) = 0$,

3°) $(L'(p(y))y,\ y) \neq 0$,

а пару (L,p) називають *системою Релея.*

Через $W = p(H \setminus \{0\})$ позначимо множину значень функціонала p. Якщо $\lambda_* \in W$ і $y_* \neq 0$ − розв'язок рівняння (1), то λ_* називають власним значенням, а y_* − власним вектором, який відповідає власному значенню λ_*. Вважаємо також, що на деякому інтервалі U такому, що $W \subset U \subset (a, b)$, оператор-функція $L(\lambda)$ є тричі диференційовною, задовольняє умови

$$(L'(\lambda)y, y) > 0, \qquad \lambda \in U \qquad \forall y \in H \setminus \{0\}, \tag{2}$$

або

$$(L'(\lambda)y, y) < 0, \qquad \lambda \in U \qquad \forall y \in H \setminus \{0\}, \tag{3}$$

і для будь-якого $y \neq 0$ функція $(L(\lambda)\,y, y)$ має на U єдиний корінь.

Означення 2. Систему Релея називають *ізотонною за* λ *на* U, якщо виконуються умови (2), *і антитонною*, якщо виконуються умови (3).

Означення 3. Систему Релея називають *опуклою* (*вгнутою*) *за* λ *на* U, якщо

$$(L''(\lambda)y, y) \geq 0 \qquad \big((L''(\lambda)y, y) \leq 0\big), \qquad \lambda \in U \qquad \forall y \in H \setminus \{0\}.$$

Поряд із нелінійною системою Релея (L, p) розглянемо лінійні системи Релея $\{L_\mu, p_\mu\}$ з компонентами

$$L_\mu(\lambda) = \lambda L'(\mu) - (\mu L'(\mu) - L(\mu)), \qquad p_\mu(y) = \mu - \frac{(L(\mu)y, y)}{(L'(\mu)y, y)},$$

для яких справджуються наступні твердження.

Лема 1. *Якщо* (L, p) − *антитонна та опукла або ізотонна та вгнута за* λ *на* U *система Релея, то її функціонал* p *зображується у вигляді*

$$p(y) = \max_{\mu \in U} p_\mu(y).$$

Лема 2. *Якщо* (L, p) − *антитонна та вгнута або ізотонна та опукла за* λ *на* U *система Релея, то її функціонал* p *зображується у вигляді*

$$p(y) = \min_{\mu \in U} p_\mu(y).$$

Д о в е д е н н я лем. Нехай (L, p) − антитонна та опукла (вгнута) за λ на U система Релея. Тоді функція

$$f(\lambda) = (L(\lambda)y,\, y)$$

є спадною і опуклою (вгнутою) за λ на U, тобто для будь-яких $\lambda, \mu \in U$

$$f'(\mu) < 0, \qquad f'(\mu)(\lambda - \mu) \leq f(\lambda) - f(\mu) \qquad \Big(f'(\mu)(\lambda - \mu) \geq f(\lambda) - f(\mu) \Big).$$

Покладемо $\lambda = p(y)$. Оскільки $f(p(y)) = 0$, то останні дві нерівності набудуть вигляду

$$p(y) \geq \mu - \frac{f(\mu)}{f'(\mu)} = p_\mu(y) \qquad \left(p(y) \leq \mu - \frac{f(\mu)}{f'(\mu)} = p_\mu(y) \right),$$

причому рівність досягається при $\mu = p(y)$. Звідси випливає твердження леми 1 (відповідно леми 2) для антитонних систем Релея. Для ізотонних систем Релея твердження лем встановлюються аналогічно. ◊

2. Допоміжна оператор-функція та її властивості. Розглянемо оператор-функцію

$$\mathcal{H}(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\operatorname{sgn}(L'(\lambda)y,\, y)\sqrt{\operatorname{sgn}(L'(\lambda)y,\, y) \cdot (L'(\lambda)y,\, y)}}.$$

Неважко переконатися, що, якщо $p(y)$ − функціонал Релея для $L(\lambda)$, то $p(y)$ буде функціоналом Релея і для $\mathcal{H}(\lambda)$. Дійсно, для довільного $y \neq 0$

$$(\mathcal{H}(p(y))y,\, y) = \frac{(L(p(y))y,\, y)}{\operatorname{sgn}(L'(p(y))y, y)\sqrt{\operatorname{sgn}(L'(p(y))y, y)\cdot(L'(p(y))y,\, y)}} = 0\,,$$

$$(\mathcal{H}'(p(y))y,\, y) = \sqrt{\operatorname{sgn}(L'(p(y))y,\, y)\cdot(L'(p(y))y,\, y)} > 0\,, \tag{4}$$

тобто виконуються умови ***2***° і ***3***° означення 1. Це означає, що, якщо $\langle\lambda_*, y_*\rangle$ – власна пара $L(\lambda)$, то $\langle\lambda_*, y_*\rangle$ буде також власною парою $\mathcal{H}(\lambda)$.

Знову ж таки поряд з нелінійною системою Релея $(\mathcal{H}, p)$ розглянемо лінійні системи $\{\mathcal{H}_\mu, h_\mu\}$ з компонентами

$$\mathcal{H}_\mu(\lambda) = \lambda\mathcal{H}'(\mu) - (\mu\mathcal{H}'(\mu) - \mathcal{H}(\mu)), \qquad h_\mu(y) = \mu - \frac{(\mathcal{H}(\mu)y,\, y)}{(\mathcal{H}'(\mu)y,\, y)}$$

і встановимо таке твердження.

Теорема 1. *Для будь-якої системи Релея (L, p) існує такий окіл $U_\varepsilon \subset U$, у якому система Релея $(\mathcal{H}, p)$ є ізотонною за λ на U_ε, причому*

i) *якщо для будь-якого y виконується умова*

$$\left[\left(\frac{(L''(\lambda)y, y)}{2(L'(\lambda)y, y)}\right)^2 - \left(\frac{(L''(\lambda)y, y)}{2(L'(\lambda)y, y)}\right)'\right] < 0\,, \tag{5}$$

то $(\mathcal{H}, p)$ в околі U_ε зліва від $p(y)$ є опуклою за λ, а справа – вгнутою за λ системою Релея, а її функціонал p зображується у вигляді

$$\min_{\mu < p(y) \in U_\varepsilon} h_\mu(y) = p(y) = \max_{\mu > p(y) \in U_\varepsilon} h_\mu(y)\,; \tag{6}$$

ii) *якщо для будь-якого y виконується умова*

$$\left[\left(\frac{(L''(\lambda)y, y)}{2(L'(\lambda)y, y)}\right)^2 - \left(\frac{(L''(\lambda)y, y)}{2(L'(\lambda)y, y)}\right)'\right] > 0\,, \tag{7}$$

то $(\mathcal{H}, p)$ в околі U_ε зліва від $p(y)$ є вгнутою за λ, а справа – опуклою за λ системою Релея, а її функціонал p зображується у вигляді

$$\max_{\mu < p(y) \in U_\varepsilon} h_\mu(y) = p(y) = \min_{\mu > p(y) \in U_\varepsilon} h_\mu(y)\,. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Нехай (L, p) – антитонна та опукла за λ на U система Релея. Тоді функція

$$f(\lambda) = (L(\lambda)y,\, y)$$

є спадною і опуклою за λ на U, тобто $f'(u) < 0$ і $f''(u) > 0$.

Оскільки функція

$$t(\lambda) = \frac{f(\lambda)f''(\lambda)}{2\,(f(\lambda))^2}$$

при $\lambda = p(y)$ дорівнює нулеві, то існує такий окіл

$$U_\varepsilon(p(y)) = \{\mu : |\mu - p(y)| < \varepsilon(y)\}$$

значень функціонала $p(y)$ (з огляду на неперервність $t(\lambda)$), у якому

$$|t(\lambda)| = \left|\frac{f(\lambda)f''(\lambda)}{2(f(\lambda))^2}\right| \le q < 1\,.$$

З цього випливає, що в околі $U_\varepsilon(p(y))$ функція $h'(\lambda) > 0$, оскільки

$$h'(\lambda) = \sqrt{\operatorname{sgn} f'(\lambda) \cdot f'(\lambda)}\left(1 - \frac{f(\lambda) f''(\lambda)}{2(f'(\lambda))^2}\right).$$

Тепер з теореми про середнє, застосованої до диференційовної на відрізку $[\mu, \lambda] \in U_\varepsilon(p(y))$ функції $h(\lambda) = (\mathcal{H}(\lambda) y, y)$:

$$h(\lambda) - h(\mu) = h'(\xi)(\lambda - \mu), \qquad \xi \in [\mu, \lambda],$$

випливає, що функція $h(\lambda)$ є зростаючою. Це означає, що система Релея $(\mathcal{H}, p)$ є ізотонною.

Оскільки $h(\lambda)$ − аналітична функція, то теорема про середнє справджується для похідної $h'(\xi)$:

$$h'(\mu) - h'(\lambda) = h''(\xi)(\mu - \lambda), \qquad \xi \in [\lambda, \mu].$$

Отже, якщо $h''(\xi) < 0$, то функція $h'(\lambda)$ є спадною, і зростаючою, якщо $h''(\xi) > 0$.

Оскільки функцію $h''(\lambda)$ можна подати у вигляді

$$h''(\lambda) = h(\lambda) \cdot \beta(\lambda), \qquad \text{де} \qquad \beta(\lambda) = \left(\frac{f''(\lambda)}{2f'(\lambda)}\right)^2 - \left(\frac{f''(\lambda)}{2f'(\lambda)}\right)',$$

то (для довільного фіксованого y) маємо таку поведінку функції $h(\lambda)$ та її похідної:

(***а***) якщо $\beta(\lambda) < 0$, тобто виконується умова (5) теореми, то похідна $h'(\xi)$ зліва від $p(y)$ є зростаючою функцією, а $h(\lambda)$ − опуклою, а справа від $p(y)$ функція $h'(\xi)$ є спадною, а $h(\lambda)$ − вгнутою. Це означає, що й система Релея $(\mathcal{H}, p)$ зліва та справа від $p(y)$ є відповідно опуклою і вгнутою за λ. Тепер з леми 2 і леми 1 для ізотонної системи Релея $(\mathcal{H}, p)$ випливає співвідношення (6);

(***б***) якщо $\beta(\lambda) > 0$, тобто виконується умова (7) теореми, то зліва від $p(y)$ функція $h'(\xi)$ є спадною, а $h(\lambda)$ − вгнутою, а справа від $p(y)$ функція $h'(\xi)$ є зростаючою, а $h(\lambda)$ − опуклою. Отже, система Релея $(\mathcal{H}, p)$ зліва та справа від $p(y)$ є відповідно вгнутою і опуклою за λ, і з лем 1 та 2 для ізотонної системи Релея $(\mathcal{H}, p)$ отримуємо співвідношення (8).

Аналогічно встановлюються твердження теореми у випадках, коли система Релея (L, p) є антитонною і вгнутою, а також для ізотонних опуклої і вгнутої систем Релея (L, p). ◊

3. Ітераційні процеси за власним значенням та їх монотонні властивості. Теорема 1 дає можливість побудувати та обґрунтувати ітераційний процес за власним значенням двосторонніх наближень для задачі (1). Цей процес є складовою частиною алгоритму знаходження власної пари задачі (1), який складається власне з ітераційного процесу за власним значенням та ітераційного процесу за власним вектором. Для зручності обґрунтування алгоритму будемо припускати, що є відомим нове наближення до власного вектора $y^{(k)}$, і за ним будемо визначати двосторонні наближення до власного значення $\lambda^{[k]} \equiv p(y^{(k)})$. Отже, алгоритм складається із зовнішніх ітерацій за власним вектором і внутрішніх − за власним значенням.

Зовнішні ітерації, тобто ітерації за власним вектором, можна проводити, зокрема, за формулою [6]

$$Ay^{(k)} = By^{(k-1)}, \qquad k = 0,1,2,\dots,$$

де

$$A \equiv \lambda^{[k-1]} L'(\lambda^{[k-1]}) - L(\lambda^{[k-1]}), \quad B \equiv L'(\lambda^{[k-1]}),$$

а для отримання двосторонніх наближень до $\lambda^{[k]}$ ітераційний процес за власним значенням запишемо у вигляді

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - $$

$$- \frac{2(L(\lambda^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})(L'(\lambda^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})}{(2(L'(\lambda^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})^2 - (L(\lambda^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})(L''(\lambda^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)}))}, \qquad (9)$$

$$m = 0,1,2,\dots.$$

Оскільки ітераційний процес (9) здійснюється при фіксованому $y^{(k)}$, отриманому на зовнішніх ітераціях, то для спрощення запису верхній індекс зовнішніх ітерацій (k) надалі, якщо це не вимагатиме уточнення, будемо опускати.

Зазначимо, що послідовність наближень, отримана за допомогою ітераційного процесу (9), має такі монотонні властивості.

Теорема 2. *Якщо виконується умова* (5) *теореми* 1, *а також умова*

$$\max_{\lambda \in U} \left| \frac{h(\lambda) h''(\lambda)}{h'(\lambda)^2} \right| < 1, \qquad (10)$$

де $h(\lambda) = (H(\lambda)y, y)$, $h'(\lambda) = (H'(\lambda)y, y)$, $h''(\lambda) = (H''(\lambda)y, y)$, *то парні номери послідовності* $\{\lambda^{(m)}\}$, *отриманої за допомогою ітераційного процесу* (9), *утворюють монотонно зростаючу послідовність, а непарні номери – монотонно спадну, якщо початкове наближення* $\lambda^{(0)} < \lambda^{[k]}$, *і, навпаки, якщо* $\lambda^{(0)} > \lambda^{[k]}$.

Д о в е д е н н я. Спочатку покажемо, що при початковому наближенні $\lambda^{(0)} < \lambda^{[k]}$ парні номери послідовності $\{\lambda^{(m)}\}$ знаходяться зліва від $\lambda^{[k]}$, а непарні – справа, тобто $\lambda^{(2m)} < \lambda^{[k]} < \lambda^{(2m-1)}$, $m = 1,2,\dots$. Доведемо це за індукцією. Припустимо, що для деякого $m = n \ge 0$ виконуються нерівності

$$\lambda^{(2n)} < \lambda^{[k]} < \lambda^{(2n-1)},$$

і доведемо, що

$$\lambda^{(2n+2)} < \lambda^{[k]} < \lambda^{(2n+1)}.$$

Оскільки рівність (9) еквівалентна запису

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - \frac{h(\lambda^{(m)})}{h'(\lambda^{(m)})}, \qquad (11)$$

то перепишемо (11) у вигляді

$$\lambda^{(2n)} - \lambda^{(2n+1)} = \frac{h(\lambda^{(2n)}) - h(\lambda^{[k]})}{h'(\lambda^{(2n)})}$$

і скористаємося теоремою про середнє. Тоді отримаємо

$$\lambda^{(2n)} - \lambda^{(2n+1)} = \frac{(\lambda^{(2n)} - \lambda^{[k]}) h'(\xi)}{h'(\lambda^{(2n)})}, \qquad \xi \in (\lambda^{(2n)}, \lambda^{[k]}). \qquad (12)$$

За теоремою 1 функція $h'(\xi) > 0$ і монотонно зростає при $\xi \in (\lambda^{(2n)}, \lambda^{[k]})$, отже, $h'(\xi) / h'(\lambda^{(2n)}) > 1$ і з (12) отримуємо, що $\lambda^{(2n)} - \lambda^{(2n+1)} < \lambda^{(2n)} - \lambda^{[k]}$, тобто $\lambda^{[k]} < \lambda^{(2n+1)}$. Аналогічно доводиться, що $\lambda^{(2n+2)} < \lambda^{[k]}$.

Тепер покажемо, що парні номери послідовності $\{\lambda^{(m)}\}$ утворюють монотонно зростаючу послідовність, а непарні номери – монотонно спадну. Доведемо це також за індукцією. Припустимо, що для деякого $m = n \ge 0$ виконуються нерівності

$$\lambda^{(2n-2)} < \lambda^{(2n)} \tag{13}$$

та

$$\lambda^{(2n-3)} < \lambda^{(2n-1)},$$

і доведемо, що

$$\lambda^{(2n-2)} < \lambda^{(2n)} < \lambda^{(2n+2)} \tag{14}$$

та

$$\lambda^{(2n-3)} < \lambda^{(2n-1)} < \lambda^{(2n+1)}. \tag{15}$$

Розглянемо різницю $\lambda^{(2n+2)} - \lambda^{(2n)}$. Зі співвідношення (11) отримаємо, застосувавши теорему про середнє, що

$$\lambda^{(2n+2)} - \lambda^{(2n)} = -\frac{h(\lambda^{(2n)})}{h'(\lambda^{(2n)})}\left(1 + \frac{h(\xi)h''(\xi)}{h'(\xi)^2}\right), \qquad \xi \in (\lambda^{(2n)}, \lambda^{[k]}),$$

звідки, враховуючи умову (10) і нерівність $-h(\lambda^{(2n)}) / h'(\lambda^{(2n)}) > 0$, яка випливає з теореми 1, отримуємо, що $\lambda^{(2n+2)} - \lambda^{(2n)} > 0$, а це разом з (13) доводить нерівність (14). Аналогічно доводиться нерівність (15).

За тією самою схемою доводиться і друге твердження теореми, тобто при виборі початкового наближення справа від $\lambda^{[k]}$ парні номери послідовності $\{\lambda^{(m)}\}$ утворюють монотонно спадну послідовність, а непарні – монотонно зростаючу. ◊

Теорема 3. *Якщо для системи Релея* (L, p) *виконуються умови* (7), *то, починаючи з* $m = 0$, *послідовність* $\{\lambda^{(m)}\}$, *отримана за допомогою ітераційного процесу* (9), *монотонно зростає, якщо* $\lambda^{(0)} < \lambda^{[k]}$, *і монотонно спадає, якщо* $\lambda^{(0)} > \lambda^{[k]}$.

Доведення теореми 3 повністю повторює доведення теореми 2, але тепер уже з урахуванням умови (7). ◊

Отже, з теорем 1–3 випливає, що для певного класу систем Релея (L, p) (для яких справджується умова (5)) запропонований ітераційний процес за власним значенням у вигляді (9) дає почергове наближення до власного значення $\lambda^{[k]}$, що відповідає власному вектору $y^{(k)}$, з двох сторін, а для іншого класу систем Релея (для яких справджується умова (7)) – лише односторонні монотонні наближення.

Зазначимо, що для систем Релея (L, p), які задовольняють умовам (7) теореми 1, можна також побудувати ітераційний процес двосторонніх наближень, але це буде ітераційний процес включаючих наближень:

$$\mu^{(0)} < \mu^{(1)} < \ldots < \mu^{(m)} < \ldots < \lambda^{[k]} < \ldots < \nu^{(m)} < \ldots < \nu^{(1)} < \nu^{(0)},$$

для якого потрібно задавати два початкових наближення зліва та справа від $\lambda^{[k]}$, наприклад, $\mu^{(0)} < \lambda^{[k]}$ і $\nu^{(0)} > \lambda^{[k]}$, а ітерації здійснювати за формулами

$$\mu^{(m+1)} = \mu^{(m)} -$$
$$- \frac{2(L(\mu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})(L'(\mu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})}{\left(2(L'(\mu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})^2 - (L(\mu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})(L''(\mu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})\right)},$$

$$\nu^{(m+1)} = \nu^{(m)} -$$

$$- \frac{2(L(\nu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})(L'(\nu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})}{(2(L'(\nu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})^2 - (L(\nu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})(L''(\nu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)}))} . \quad (16)$$

Дослідження таких ітераційних процесів типу (16), які дають включаючі наближення, і можливих їх варіантів, коли достатньо задавати лише одне початкове наближення зліва або справа від $\lambda^{[k]}$, є предметом розгляду окремої роботи. Далі розглянемо лише почергові двосторонні наближення.

4. Збіжність ітераційного процесу почергових наближень за власним значенням. Надалі будемо використовувати такі позначення:

$$h(\lambda) = (H(\lambda)y^{(k)}, y^{(k)}), \qquad f(\lambda) = (L(\lambda)y^{(k)}, y^{(k)}),$$

$$m_2 = \min_{\lambda \in U} |h'(\lambda)|, \qquad M_2 = \max_{\lambda \in U} |h''(\lambda)|.$$

Розглянемо систему Релея (L, p), для якої виконується умова (5), а ітераційний процес за власним значенням здійснюється за формулою (9). Покажемо, що наближення до $\lambda^{[k]}$ здійснюється почергово з двох сторін.

Теорема 4. *Нехай для системи Релея* (L, p) *виконується умова* (5), *а для системи Релея* $(\mathcal{H}, p)$ – *умова* (10). *Якщо* $\lambda^{(0)} < \lambda^{[k]} \in U_\varepsilon$, *причому*

$$q_0 \equiv \frac{M_2}{2m_2} \left|\lambda^{(0)} - \lambda^{[k]}\right| < 1, \qquad q_1 \equiv \frac{M_2}{2m_2} \left|\lambda^{(1)} - \lambda^{[k]}\right| < 1, \quad (17)$$

де $\lambda^{(1)}$ *отримано за формулою* (9), *то ітераційний процес* (9) *збігається до* $\lambda^{[k]}$ *з двох сторін*:

$$\lambda^{(0)} < \lambda^{(2)} < \ldots < \lambda^{(2m)} < \ldots < \lambda^{[k]} < \ldots < \lambda^{(2m-1)} < \ldots < \lambda^{(3)} < \lambda^{(1)}, \quad (18)$$

а для похибок відповідно зліва та справа справджуються оцінки

$$\left|\lambda^{(2m)} - \lambda^{[k]}\right| < q_0^{4^m - 1} \left|\lambda^{(0)} - \lambda^{[k]}\right|,$$

$$\left|\lambda^{(2m-1)} - \lambda^{[k]}\right| < q_1^{4^m - 1} \left|\lambda^{(1)} - \lambda^{[k]}\right|. \quad (19)$$

Якщо

$$|h'(\lambda)| < N, \qquad \left| \left(\frac{f''(\lambda)}{2f'(\lambda)} \right)^2 - \left(\frac{f''(\lambda)}{2f'(\lambda)} \right)' \right| < M, \quad (20)$$

причому

$$\bar{q}_0 \equiv \left(\frac{NM}{2m_2} \right)^{1/2} \left|\lambda^{(0)} - \lambda^{[k]}\right| < 1, \qquad \bar{q}_1 \equiv \left(\frac{NM}{2m_2} \right)^{1/2} \left|\lambda^{(1)} - \lambda^{[k]}\right| < 1, \quad (21)$$

то для похибок відповідно зліва та справа справджуються оцінки

$$\left|\lambda^{(2m)} - \lambda^{[k]}\right| < \bar{q}_0^{\,9^m - 1} \left|\lambda^{(0)} - \lambda^{[k]}\right|,$$

$$\left|\lambda^{(2m-1)} - \lambda^{[k]}\right| < \bar{q}_1^{\,9^m - 1} \left|\lambda^{(1)} - \lambda^{[k]}\right|. \quad (22)$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\lambda^{(0)} < \lambda^{[k]} \in U_\varepsilon$ і виконуються умови (5) і (10). Тоді з теореми 2 випливає, що парні номери послідовності $\{\lambda^{(m)}\}$, отриманої за допомогою ітераційного процесу (9), утворюють монотонно зростаючу послідовність, обмежену зверху числом $\lambda^{[k]}$, а непарні номери – монотонно спадну, обмежену цим самим числом $\lambda^{[k]}$. Отже, парні та непарні номери послідовності $\{\lambda^{(m)}\}$ прямують до границі, яка з огляду на неперервність функції $h(\lambda)$ і умову $h'(\lambda^{[k]}) \neq 0$ (умова ***3***° означення 1) співпадає з $\lambda^{[k]}$.

Таким чином, за допомогою ітераційного процесу (9) отримуємо почергові наближення у вигляді (18), монотонні з кожної сторони від $\lambda^{[k]}$.

Для доведення оцінок (19), (22) використовуємо означення ітерованої функції [2, с. 276]): для парних (або непарних) номерів послідовності ітераційний процес (9) можна записати у вигляді

$$\lambda^{2n+2} = \varphi(\lambda^{2n}) \qquad \left(\lambda^{2n+1} = \varphi(\lambda^{2n-1})\right), \tag{23}$$

де $\varphi(\lambda) = \psi(\psi(\lambda))$ – ітерована функція, а $\psi(\lambda) = \lambda - h(\lambda)/h'(\lambda)$ – функція Ньютона ітераційного процесу (9) для $h(\lambda)$.

Оскільки ітераційний процес (9) можна подати в еквівалентній формі

$$\lambda^{(m+1)} = \lambda^{(m)} - \frac{h(\lambda^{(m)})}{h'(\lambda^{(m)})},$$

то, міркуючи аналогічно, як при доведенні теореми 2, отримаємо, що

$$\left|\lambda^{(m+1)} - \lambda^{[k]}\right| \le \frac{M_2}{2m_2}\left|\lambda^{(m)} - \lambda^{[k]}\right|^2$$

або

$$\left|\psi(\lambda^{(m)}) - \psi(\lambda^{[k]})\right| \le \frac{M_2}{2m_2}\left|\lambda^{(m)} - \lambda^{[k]}\right|^2. \tag{24}$$

Отже, для ітерованої функції $\varphi(\lambda)$ отримуємо оцінку

$$\left|\varphi(\lambda^{(m)}) - \varphi(\lambda^{[k]})\right| \le \frac{M_2}{2m_2}\left(\frac{M_2}{2m_2}\right)^2\left|\lambda^{(m)} - \lambda^{[k]}\right|^4.$$

Це дозволяє записати ітераційний процес (23) у вигляді

$$\left|\lambda^{(2n+2)} - \lambda^{[k]}\right| = \left|\varphi(\lambda^{(2n)}) - \varphi(\lambda^{[k]})\right| \le \left(\frac{M_2}{2m_2}\right)^3\left|\lambda^{(2n)} - \lambda^{[k]}\right|^4.$$

Тепер з урахуванням умови (17) методом математичної індукції доводиться перша з оцінок (19) теореми, звідки, зокрема, випливає збіжність послідовності $\{\lambda^{(2n)}\}$ до $\lambda^{[k]}$ зліва. Аналогічно доводиться друга з оцінок (19), з якої випливає збіжність послідовності $\{\lambda^{(2n-1)}\}$ до $\lambda^{[k]}$ справа.

Якщо виконуються умови (20), то оцінка (24) набуде вигляду

$$\left|\psi(\lambda^{(m)}) - \psi(\lambda^{[k]})\right| \le \frac{NM}{2m_2}\left|\lambda^{(m)} - \lambda^{[k]}\right|^3,$$

оскільки

$$\left|h''(\lambda)\right| = \left|h(\lambda)\left[\left(\frac{f''(\lambda)}{2f'(\lambda)}\right)^2 - \left(\frac{f''(\lambda)}{2f'(\lambda)}\right)'\right]\right| \le NM\left|\lambda - \lambda^{[k]}\right|.$$

Отже, для ітерованої функції $\varphi(\lambda)$ отримуємо оцінку

$$\left|\lambda^{(2n+2)} - \lambda^{[k]}\right| = \left|\varphi(\lambda^{(2n)}) - \varphi(\lambda^{[k]})\right| \le \left(\frac{NM}{2m_2}\right)^4\left|\lambda^{(2n)} - \lambda^{[k]}\right|^9.$$

Враховуючи цю нерівність, перша з оцінок (22) доводиться за індукцією. Аналогічні міркування застосовуються при доведенні другої з оцінок (22). Теорему доведено. ◊

Зазначимо, що, коли початкове наближення знаходиться справа від $\lambda^{[k]}$, тобто $\lambda^{[k]} < \lambda^{(0)} \in U$, то за допомогою ітераційного процесу (9) отримуємо почергові монотонні наближення до $\lambda^{[k]}$ у вигляді

$$\lambda^{(1)} < \lambda^{(3)} < \ldots < \lambda^{(2m-1)} < \ldots < \lambda^{[k]} < \ldots < \lambda^{(2m)} < \ldots < \lambda^{(2)} < \lambda^{(0)},$$

і для нього справджується аналог теореми 4.

Отже, отримані результати дозволяють для певного класу систем Релея (для яких справджується умова (5)) отримувати за допомогою ітераційного процесу (9) почергові двосторонні (монотонні з кожної сторони) наближення до простого власного значення нелінійної спектральної задачі, незалежно з якої сторони від власного значення знаходиться початкове наближення.

Поряд з цим потрібно відмітити, що з практичної точки зору дослідження знака функції $\beta(\lambda)$, тобто умови (5), є непростим завданням. Але приналежність систем Релея до того чи іншого класу можна визначити ціною двох перших ітерацій за формулою (9) (фактично з аналізу поведінки знака поправки $h(\lambda)/h'(\lambda)$ еквівалентного до (9) ітераційного процесу (11)) і тоді скоригувати при необхідності ітераційний процес так, щоб отримати двосторонні наближення. Для цього ітераційний процес можна записати, наприклад, у такому вигляді (якщо $\nu^{(0)} \in (\lambda^*, \lambda^* + \varepsilon)$):

$$\mu^{(m+1)} = \nu^{(m)} - \frac{(L(\nu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})}{(L'(\nu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})},$$

$$\nu^{(m+1)} =$$

$$= \nu^{(m)} - \frac{2(L(\nu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})(L'(\nu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})}{(2(L'(\nu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})^2 - (L(\nu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)})(L''(\nu^{(m)})y^{(k)}, y^{(k)}))}, \quad (25)$$

що дає неоднакову швидкість збіжності з різних сторін від кореня, або використати (25) лише для отримання першого наближення з іншого боку від кореня, а далі продовжити ітераційний процес за формулою (16). Можливі також інші варіанти, які можуть бути предметом розгляду окремої роботи.

1. *Калиткин Н. Н.* Решения задач на собственные значения методом дополненного вектора // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1965. – **5**, № 6. – С. 1107–1115.
2. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – Москва: Мир, 1969. – 448 с.
3. *Подлевський Б. М.* Методи двосторонніх наближень розв'язування нелінійних рівнянь. – Львів, 2001. – 48 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т прикл. пробл. механіки і математики; 2–01).
4. *Подлевський Б. М.* Побудова двосторонніх наближень до розв'язку нелінійних рівнянь за допомогою методу Геллі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 4. – С. 59–67.
5. *Подлевський Б. М.* Про нові властивості методу Геллі // Доп. НАН України. – 1999. – № 12. – С. 21–26.
6. *Подлевський Б. М.* Чисельний метод розв'язування одного класу нелінійних спектральних задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44,** № 2. – С. 34–38.
7. *Alefeld G.* Bounding the slope of polynomial operators and some applications // Computing. – 1981. – **26**, No. 2. – P. 227–237.
8. *Anselone P. M., Rall L. B.* The solution of the characteristic value-vector problems by Newton's method // Numer. Math. – 1968. – **11**, No. 1. – P. 38–45.
9. *Krawczyk R.* Fehlerabschдtzung reeller Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen // Computing. – 1969. – **4**. – P. 281–293.
10. *Mayer G.* A Unified Approach to Enclosure Methods for Eigenpairs // Z. angew. Math. und Mech. – 1994. – **74**, No. 2. – P. 115–128.
11. *Podlevskyi B. M.* On the Bilateral Convergence of Halley's Method // Z. angew. Math. und Mech. – 2003. – **83**, No. 4. – P. 282–286.
12. *Podlevskyi B. M.* One approach to the construction of the bilateral approximations methods for the solution of nonlinear equations // Proc. Dynamic Systems & Appl. IV. – Atlanta, 2004. – P. 542–547.
13. *Rokne J.* Including Iterations for the Lambda-Matrix Eigenproblem // Computing. – 1985. – **35**, No. 2. – P. 207–218.
14. *Rump S. M.* Guaranteed inclusions for the complex generalized eigenproblem // Computing. – 1989. – **42**. – P. 225–238.
15. *Unger H.* Nichtlineare Behandlung von Eigenwertaufgaben // Z. angew. Math. und Mech. – 1950. – **30**. – P. 281–282.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД АЛЬТЕРНИРУЮЩИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ НЕЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Предлагается и обосновывается итерационный процесс определения простого собственного значения нелинейной спектральной задачи. Выделен класс нелинейных спектральных задач, для которых предложенный итерационный процесс обеспечивает альтернирующие двусторонние приближения к простому собственному значению, и класс задач, для которых этот же процесс дает только односторонние монотонные приближения.

ITERATIVE METHOD OF ALTERNATING APPROXIMATIONS TO EIGENVALUES OF NON-LINEAR SPECTRAL PROBLEMS

The iterative process for calculation of a simple eigenvalue of the non-linear spectral problem is offered and justified. The class of non-linear spectral problems for which the offered iterative process ensures alternating two-sided approximations to a simple eigenvalue is selected. The class of problems for which the same process gives only one-sided monotone approximations is selected too.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
28.12.04