УДК 517.95+511.2

О. М. Медвідь, М. М. Симотюк

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Досліджено коректність задачі з інтегральними умовами для лінійних систем рівнянь із частинними похідними. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку розглядуваної задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв'язку задачі.

Задачі з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними виникають при побудові математичних моделей процесів теплопровідності, теплопружності, динаміки розвитку біопопуляцій. Дослідження коректності таких задач проводились у багатьох аспектах різними авторами [2, 5, 7–13, 15]. Зокрема, у роботах [11–13] встановлено умови коректної розв'язності задач з інтегральними умовами для еволюційних систем рівнянь в безмежному шарі, вивчено залежність коректності таких задачі від товщини розглядуваного шару. Дослідження інтегральних задач для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях пов'язане з проблемою малих знаменників; у працях [7, 9, 10] на основі метричного підходу, використаного для оцінок знизу малих знаменників, встановлено розв'язність таких задач для майже всіх (стосовно міри Лебеґа) чисел, які є значеннями верхньої межі інтегрування в інтегральних умовах.

Ця робота продовжує і розвиває дослідження, розпочаті у [7]. Її основною метою є встановлення результату про існування розв'язку інтегральної задачі для лінійних систем рівнянь із частинними похідними для усіх верхніх меж інтегрування $t_1 \in (0,T]$, крім, можливо, множини, для розмірності Гаусдорфа якої отримано оцінку зверху.

1. Нижче використовуємо такі позначення: Ω_p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$; $Q_p^T = (0,T)\times\Omega_p$, $T>0$; $D_x = (-i\partial/\partial x_1,\dots,-i\partial/\partial x_p)$; $k=(k_1,\dots,k_p)\in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1|+\ldots+|k_p|$, $(k,x) = k_1x_1+\dots+k_px_p$; $W_{\alpha,\beta}^{\gamma,m}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\gamma>0$, $m\in\mathbb{N}$, – простір, отриманий у результаті поповнення простору скінченних тригонометричних векторних поліномів $\boldsymbol{\varphi}(x) = \sum \boldsymbol{\varphi}_k \exp(ik,x)$, де $\boldsymbol{\varphi}_k = \mathrm{col}(\varphi_k^1,\dots,\varphi_k^m)\in\mathbb{C}^m$, за нормою

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}(x); W_{\alpha,\beta}^{\gamma,m}\right\| = \sqrt{\sum_{|k|\ge 0} \|\boldsymbol{\varphi}_k\|^2 (1+|k|)^{2\alpha}\exp(2\beta|k|^{\gamma})}\,;$$

$C^n([0,T];W_{\alpha,\beta}^{\gamma,m})$ – простір вектор-функцій $\mathbf{u}(t,x)$ таких, що при фіксованому $t\in[0,T]$ похідні $\dfrac{\partial^j \mathbf{u}(t,x)}{\partial t^j}$, $0\le j\le n$, належать до простору $W_{\alpha,\beta}^{\gamma,m}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$; норму в просторі $C^n([0,T];W_{\alpha,\beta}^{\gamma,m})$ задаємо формулою

$$\left\|\mathbf{u}(t,x); C^n([0,T];W_{\alpha,\beta}^{\gamma,m})\right\| = \sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^j\mathbf{u}(t,x)}{\partial t^j}; W_{\alpha,\beta}^{\gamma}\right\|.$$

2. Розглянемо таку задачу:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right)\mathbf{u}(t,x) \equiv \frac{\partial^n \mathbf{u}(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{j=0}^{n-1} A_j(D_x)\frac{\partial^j \mathbf{u}(t,x)}{\partial t^j} = \mathbf{0}, \quad (t,x)\in Q_p^T, \qquad (1)$$

$$\int_0^{t_1} t^{j-1}\mathbf{u}(t,x)\,dt = \boldsymbol{\varphi}_j(x), \qquad j = 1,\ldots,n, \qquad x \in \Omega_p, \qquad 0 < t_1 \le T, \tag{2}$$

де $A_j(\xi)$, $j = 0,1,\ldots,n-1$, $\xi \in \mathbb{R}^p$, − квадратні матриці розміру $m \times m$, елементами яких є многочлени з комплексними коефіцієнтами степеня N; $\mathbf{u}(t,x) = \mathrm{col}\left(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x)\right)$, $\boldsymbol{\varphi}_j(x) = \mathrm{col}\left(\varphi_j^1(x),\ldots,\varphi_j^m(x)\right)$, $j = 1,\ldots,n$.

Означення 1. Задачу (1), (2) назвемо $(\alpha_0,\beta_0;\alpha,\beta;\gamma)$*-коректною* (де α_0, β_0, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$), якщо для довільних вектор-функцій $\boldsymbol{\varphi}_j \in W_{\alpha,\beta}^{\gamma,m}$, $j = 1,\ldots,n$, у просторі $C^n([0,T];W_{\alpha_0,\beta_0}^{\gamma,m})$ існує єдиний розв'язок $\mathbf{u}$ задачі (1), (2) такий, що

$$\left\| \mathbf{u}(t,x); C^n([0,T];W_{\alpha_0,\beta_0}^{\gamma,m}) \right\| \le C_1 \sum_{j=1}^{n} \left\| \boldsymbol{\varphi}_j(x); W_{\alpha,\beta}^{\gamma,m} \right\|, \tag{3}$$

де стала $C_1 > 0$ не залежить від вибору $\boldsymbol{\varphi}_j \in W_{\alpha,\beta}^{\gamma,m}$, $j = 1,\ldots,n$.

Позначимо: $\mathbf{e}_q = (\underbrace{0,\ldots,0,1}_{q},0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{mn}$, $q = 1,\ldots,mn$; $\mathcal{L}(k)$ − блочна матриця розміру $mn \times mn$ вигляду

$$\mathcal{L}(k) = \left\| \begin{array}{c:c} 0_{m(n-1),m} & E_{m(n-1)} \\ \hdashline -A_0(k) & -A_1(k) \ \ldots - A_{n-1}(k) \end{array} \right\|, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{4}$$

де $0_{m(n-1),m}$, $E_{m(n-1)}$ − нульова та одинична матриці розмірів $m(n-1) \times m$, $m(n-1) \times m(n-1)$ відповідно;

$$V(t) = \| \underbrace{\mathbf{v}(t),\ldots,\mathbf{v}(t)}_{m}, \underbrace{\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0}}_{m(n-1)} \|, \qquad \mathbf{v}(t) = \sum_{j=1}^{n} t^{j-1}(\mathbf{e}_{(j-1)m+1} + \ldots + \mathbf{e}_{jm}),$$

$$\Delta(k,t_1) = \det \left\| \int_0^{t_1} V(t)\exp(\mathcal{L}(k)t)\,dt \right\|, \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{5}$$

Означення 2. Верхню межу t_1 в умовах (2) назвемо $(\omega,\delta;\gamma)$*-нормальною для задачі* (1), (2) ($\omega,\delta \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$), якщо існує стала $C_2 > 0$ така, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\Delta(k,t_1)| \ge C_2(1+|k|)^{-\omega}\exp\left(-\delta|k|^{\gamma}\right).$$

3. Для встановлення умов коректності задачі (1), (2) запровадимо вектор-функції $\mathbf{F}_q(t,k) \equiv \mathrm{col}\left(F_q^1(t,k),\ldots,F_q^{mn}(t,k)\right)$, $\mathbf{f}_q(t,k) \equiv \mathrm{col}\left(f_q^1(t,k),\ldots,f_q^m(t,k)\right)$, $q = 1,\ldots,mn$, такими рівностями:

$$\mathbf{F}_q(t,k) = \exp(L(k)t)\mathbf{e}_q, \qquad q = 1,\ldots,mn,$$

$$\mathbf{f}_q(t,k) = \mathrm{col}\left(F_q^1(t,k),\ldots,F_q^m(t,k)\right), \qquad q = 1,\ldots,mn.$$

Зауважимо, що зі структури матриці $\mathcal{L}(k)$ (див. (4)) випливає, що

$$\mathbf{F}_q(t,k) = \mathrm{col}\left(\mathbf{f}_q(t,k),\ldots,\mathbf{f}_q^{(n-1)}(t,k)\right), \qquad q = 1,\ldots,mn. \tag{6}$$

Нехай $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_{mn}(k)$ − корені рівняння

$$\det L(\lambda,k) = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{7}$$

$$\Lambda_1 = \max\left\{0; \sup_{k\in\mathbb{Z}^p} \max_{1\le j\le mn} \frac{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}{1+|k|^{\gamma_0}}\right\},$$

$$\Lambda_2 = -\min\left\{0; \inf_{k\in\mathbb{Z}^p} \min_{1\le j\le mn} \frac{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}{1+|k|^{\gamma_0}}\right\},$$

де γ_0 − зведений порядок [4] системи (1).

Лема 1. *Для вектор-функцій* $\mathbf{f}_q(t,k)$, $q=1,\dots,mn$, *виконуються оцінки*

$$\forall t\ge 0 \qquad \left\|\mathbf{f}_q^{(j)}(t,k)\right\| \le \begin{cases} C_3(1+|k|)^{(mn-1)N}\exp(\Lambda_1 t|k|^{\gamma_0}), & j=0,1,\dots,n-1,\\ C_4(1+|k|)^{mnN}\exp(\Lambda_1 t|k|^{\gamma_0}), & j=n. \end{cases} \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ елементи кожної з матриць $A_0(k),\dots,A_{n-1}(k)$ є многочленами від $k_1,\dots,k_p$ степеня N, то з оцінки норми матриці через максимум модулів її елементів і з формули (4) отримуємо, що

$$\|\mathcal{L}(k)\| \le C_5(1+|k|)^N, \qquad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{9}$$

Використовуючи оцінку для норми експоненти матриці [14, § 24.2], з (9) дістаємо

$$\|\exp(\mathcal{L}(k)t)\| \le C_6(1+|k|)^{(mn-1)N}\exp(t\Lambda_1|k|^{\gamma_0}), \quad t\in[0,T], \quad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{10}$$

Тоді з формул (9), (10) випливає, що для довільного $t\ge 0$ виконуються оцінки

$$\left\|\mathbf{F}_q^{(r)}(t,k)\right\| \le \|\exp(\mathcal{L}(k)t)\|\cdot\|\mathcal{L}(k)\|^r \le C_7(1+|k|)^{(mn+r-1)N}\exp(t\Lambda_1|k|^{\gamma_0}),$$

$$q=1,\dots,mn, \qquad r=0,1, \qquad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{11}$$

Враховуючи співвідношення (6), з оцінок (11) отримуємо оцінки (8). ◊

Теорема 1. *Якщо верхня межа інтегрування* t_1 *є* $(\omega,\delta;\gamma_0)$*-нормальною для задачі* (1), (2), *то для довільних* $\alpha_0,\beta_0\in\mathbb{R}$ *задача* (1), (2) *є* $(\alpha_0,\beta_0;\alpha,\beta;\gamma_0)$*-коректною, де* $\alpha=\alpha_0+\omega+(m^2n^2-mn+1)N$, $\beta=\beta_0+\delta+mn\Lambda_1 T$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\boldsymbol{\varphi}_j\in W_{\alpha,\beta}^{\gamma_0,m}$, $j=1,\dots,n$. Покажемо, що в просторі $C^n([0,T];W_{\alpha_0,\beta_0}^{\gamma_0,m})$ існує єдина функція $\mathbf{u}(t,x)$, яка є розв'язком системи (1) і справджує умови (2), (3). З нормальності верхньої межі t_1 випливає, зокрема, що $\Delta(k,t_1)\ne 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$. Тому для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ існує єдиний розв'язок інтегральної задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$L\left(\frac{d}{dt},k\right)\mathbf{u}_k(t)=\mathbf{0}, \qquad \int_0^{t_1} t^{j-1}\mathbf{u}_k(t)\,dt=\boldsymbol{\varphi}_{jk}, \qquad j=1,\dots,n, \tag{12}$$

де $\boldsymbol{\varphi}_{jk}=\operatorname{col}(\varphi_{jk}^1,\dots,\varphi_{jk}^m)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, − коефіцієнти Фур'є вектор-функцій $\boldsymbol{\varphi}_j(x)$, $j=1,\dots,n$. Цей розв'язок зображується рівністю

$$\mathbf{u}_k(t)=\sum_{q=1}^{mn}\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{\Delta_{(s-1)m+r,q}(k,t_1)}{\Delta(k,t_1)}\varphi_{sk}^r\,\mathbf{f}_q(t,k), \qquad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{13}$$

де $\Delta_{(s-1)m+r,q}(k,t_1)$, $s=1,\dots,n$, $r=1,\dots,m$, $q=1,\dots,mn$, − алгебричне доповнення елемента $\int_0^{t_1} t^{s-1}f_q^r(t,k)\,dt$ у визначнику $\Delta(k,t_1)$. Із формули (5) та оцінок (8) випливає, що

$$\left|\Delta_{(s-1)m+r,q}(k,t_1)\right|\left\|\mathbf{f}_q^{(j)}(t,k)\right\|_{C[0,T]} \leq$$

$$\leq C_8\left(1+|k|\right)^{(m^2n^2-mn+1)N}\exp\left(mn\Lambda_1T|k|^{\gamma_0}\right),$$

$$j=0,1,\ldots,n, \quad s=1,\ldots,n, \quad r=1,\ldots,m, \quad q=1,\ldots,mn.$$

Враховуючи, що верхня межа t_1 є $(\omega,\delta;\gamma_0)$-нормальною для задачі (1), (2), з отриманих оцінок дістаємо

$$\left\|\mathbf{u}_k(t)\right\|_{C^n[0,T]} \leq$$

$$\leq C_9\left(1+|k|\right)^{\omega+(m^2n^2-mn+1)N}\exp\left((\delta+mn\Lambda_1T)|k|^{\gamma_0}\right)\sum_{j=1}^{n}\left\|\boldsymbol{\varphi}_{jk}\right\|. \qquad (14)$$

Розглянемо вектор-функцію

$$\mathbf{u}(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\mathbf{u}_k(t)\exp(ik,x), \qquad (15)$$

коефіцієнти $\mathbf{u}_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, якої задаються формулами (13). З нерівностей (14) випливає, що

$$\left\|\mathbf{u};C^n([0,T];W^{\gamma_0,m}_{\alpha_0,\beta_0})\right\| \leq C_{10}\sum_{j=1}^{n}\left\|\boldsymbol{\varphi}_j;W^{\gamma_0,m}_{\alpha_0+\omega+(m^2n^2-mn+1)N,\beta_0+\delta+mn\Lambda_1T}\right\|<\infty,$$

тобто ряд (15) належить до простору $C^n([0,T];W^{\gamma_0,m}_{\alpha_0,\beta_0})$ і для нього виконується умова (3). Оскільки коефіцієнти $\mathbf{u}_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є розв'язками задачі (12), то ряд (15) є розв'язком задачі (1), (2). Єдиність цього розв'язку випливає з того, що $\Delta(k,t_1)\neq 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$.

Теорему доведено. ◊

4. Через $M^{\gamma_0}_{\omega,\delta}$ позначимо множину всіх верхніх меж $t_1>0$, які є $(\omega,\delta;\gamma_0)$-нормальними для задачі (1), (2). З огляду на твердження теореми 1 природним є питання про те, наскільки «великою» є множина $M^{\gamma_0}_{\omega,\delta}$. Для цього з'ясуємо спочатку деякі структурні властивості характеристичного визначника $\Delta(k,t_1)$.

Лема 2. *Для визначника* $\Delta(k,t_1)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, *виконуються такі рівності:*

$$\left.\frac{\partial^q\Delta(k,t_1)}{\partial t_1^q}\right|_{t_1=0}=\begin{cases}0, & 0\leq q<mn^2,\\ C_{11}, & q=mn^2,\end{cases}$$

де $C_{11}=(mn^2)!\prod_{q=1}^{n-1}(q!)^{2m}\cdot\left(\prod_{q=n}^{2n-1}(q!)^m\right)^{-1}\in\mathbb{N}$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\mathbf{F}_q(0,k)=\mathbf{e}_q$, $q=1,\ldots,mn$, то для вектор-функцій $\mathbf{f}_q(t,k)$, $q=1,\ldots,mn$, виконуються такі початкові умови:

$$\mathbf{f}^{(j-1)}_{m(q-1)+s}(0,k)=\begin{cases}\mathbf{0}, & j\neq q,\\ \mathbf{f}_s, & j=q,\end{cases} \qquad j,q=1,\ldots,n, \quad s=1,\ldots,m, \qquad (16)$$

де $\mathbf{f}_q=(\underbrace{0,\ldots,0,1}_{q},0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^m$, $q=1,\ldots,m$. Оскільки вектор-функції $\mathbf{f}_q(t,k)$, $q=1,\ldots,mn$, є аналітичними за t, то на підставі формули Тейлора з рівностей (16) випливають розвинення

$$\int_0^{t_1} t^{j-1}\mathbf{f}_{m(q-1)+s}(t,k)\,dt = \frac{t_1^{j+q-1}}{(j+q-1)(q-1)!}\mathbf{e}_s + t_1^{n+j}\boldsymbol{\alpha}_{m(q-1)+s,j}(t_1,k),$$

$$j,q = 1,\dots,n, \qquad s = 1,\dots,m,$$

де $\boldsymbol{\alpha}_q(t_1,k)$, $q = 1,\dots,mn$, – аналітичні вектор-функції в околі точки $t_1 = 0$. З наведених розвинень випливає, що в околі точки $t_1 = 0$ виконується рівність

$$\Delta(k,t_1) = \det\left(\left\| \frac{t_1^{j+q-1}}{(j+q-1)(q-1)!} \right\|_{j,q=1}^{n} \otimes E_m\right) + \beta(t_1,k)t_1^{mn^2+1}, \tag{17}$$

де $\beta(t_1,k)$ – аналітична функція в околі точки $t_1 = 0$, E_m – одинична матриця розміру $m\times m$, а запис $A\otimes B$ означає тензорний добуток матриць A, B. Відомо [6, с. 236], що

$$\det\left(\left\| \frac{t_1^{j+q-1}}{(j+q-1)(q-1)!} \right\|_{j,q=1}^{n} \otimes E_m\right) = \left(\det\left\| \frac{t_1^{j+q-1}}{(j+q-1)(q-1)!} \right\|_{j,q=1}^{n}\right)^m .$$

З огляду на рівність

$$\det\left\| \frac{t_1^{j+q-1}}{(j+q-1)(q-1)!} \right\|_{j,q=1}^{n} = t_1^{n^2}\prod_{q=1}^{n-1}(q!)^2\cdot\left(\prod_{q=n}^{2n-1} q!\right)^{-1},$$

встановлену у [7], з формули (17) дістаємо розвинення

$$\Delta(k,t_1) = \frac{C_{11}t_1^{mn^2}}{(mn^2)!} + \beta(t_1,k)t_1^{mn^2+1},$$

з якого випливає твердження леми. ◊

Надалі будемо припускати, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ всі корені рівняння (7) є простими. Тоді матриця $L^*(\lambda_q(k),k)$, яка є приєднаною до матриці $L(\lambda_q(k),k)$, відмінна від нульової [3, с. 94]. Нехай $\mathbf{h}_q(k) = \operatorname{col}\left(h_q^1(k),\dots,h_q^m(k)\right)$ – деякий ненульовий стовпець матриці $L^*(\lambda_q(k),k)$, $q = 1,\dots,mn$;

$$\mathbf{H}_q(k) = \operatorname{col}\left(\mathbf{h}_q(k),\lambda_q(k)\mathbf{h}_q(k),\dots,\lambda_q^{n-1}(k)\mathbf{h}_q(k)\right), \qquad q = 1,\dots,mn;$$

$$\Delta_1(k,t_1) = \det\left\|\int_0^{t_1} V(t)\exp(\boldsymbol{\mathcal{L}}(k)t)H(k)\,dt\right\|, \quad H(k) = \left\|\mathbf{H}_1(k),\dots,\mathbf{H}_{mn}(k)\right\|.$$

Через $C(mn,n)$ позначимо множину всіх наборів $(i_1,\dots,i_n)$, складених з n натуральних чисел $i_1,\dots,i_n$ таких, що $1\le i_1 < \dots < i_n \le mn$. Для набору $\omega = (i_1,\dots,i_n)$ покладемо $\operatorname{set}\omega = \{i_1,\dots,i_n\}$,

$$\delta_\omega(k,t_1) = \det\left\|\int_0^{t_1} t^{j-1}\exp(\lambda_{i_q}(k)t)\,dt\right\|_{j,q=1}^{n}, \quad H_\omega^j(k) = \prod_{q\in\operatorname{set}\omega} h_q^j(k), \quad j = 1,\dots,m.$$

Лема 3. *Якщо для кожного* $k\in\mathbb{Z}^p$ *усі корені рівняння* (7) *є простими, то визначник* $\Delta(k,t_1)$ *є квазімногочленом вигляду* $\sum_{q=1}^{R} \mathrm{p}_q(t_1,k)\exp\left(\Lambda_q(k)t_1\right)$, *де* $R\le 2^{mn}$, $\mathrm{p}_q(k,t_1)$, $q = 1,\dots,R$, – *многочлени степеня, не вищого ніж* mC_n^2, *а числа* $\Lambda_q(k)$, $q = 1,\dots,R$, *належать до множини сум*

$$\{r_1\lambda_1(k) + \dots + r_{mn}\lambda_{mn}(k) : r_1,\dots,r_{mn}\in\{0,1\}\}.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки всі корені рівняння (7) є простими, то $H(k) \neq 0$. Тому визначники $\Delta(k, t_1)$ і $\Delta_1(k, t_1)$ відрізняються сталим множником:

$$\Delta(k, t_1) = \frac{1}{\det H(k)} \Delta_1(k, t_1).$$

Отже, твердження леми достатньо встановити для $\Delta_1(k, t_1)$. Враховуючи, що на перетині q-го стовпця, $q = 1, \ldots, mn$, та $((s-1)m + r)$-го рядка, $s = 1, \ldots, n$, $r = 1, \ldots, m$, у визначнику $\Delta_1(k, t_1)$ стоїть елемент

$$\int_0^{t_1} t^{s-1} \exp(\lambda_q(k) t)\, dt \cdot h_q^r(k),$$

на підставі правила Лапласа дістанемо

$$\Delta_1(k, t_1) = \sum_{\omega_1, \ldots, \omega_m \in C(mn, n)} \pm \prod_{s=1}^{m} H_{\omega_s}^s(k) \delta_{\omega_s}(k, t_1),$$

де підсумовування проводиться за всіма наборами $\omega_1, \ldots, \omega_m$ такими, що

$$\bigcup_{j=1}^{q-1} \operatorname{set} \omega_j \bigcap \operatorname{set} \omega_q = \varnothing, \qquad q = 2, \ldots, m.$$

Згідно з лемою 3.2 з [7] кожен з визначників $\delta_{\omega_s}(k, t_1)$, $s = 1, \ldots, m$, має вигляд

$$\delta_{\omega_s}(k, t_1) = \sum_{j=1}^{R_s} p_{j,\omega_s}(t_1, k) \exp\left(\Lambda_{j,\omega_s}(k) t_1\right),$$

де $R_s \leq 2^n$, $p_{j,\omega_s}(t_1, k)$, $j = 1, \ldots, R_s$, – многочлени степеня, не вищого ніж C_n^2, а показники $\Lambda_{j,\omega_s}(k)$ належать до множини всіх можливих сум

$$\left\{ r_1 \lambda_{i_1}(k) + \ldots + r_n \lambda_{i_n}(k) : \ (i_1, \ldots, i_n) = \omega_s, r_1, \ldots, r_n \in \{0, 1\} \right\}.$$

Звідси випливає, що

$$\Delta_1(k, t_1) = \sum_{\omega_1, \ldots, \omega_m \in C(mn, n)} \sum_{j_1=1}^{R_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{R_m} \pm \prod_{s=1}^{m} H_{\omega_s}^s(k) p_{j_s,\omega_s}(t_1, k) \exp\left(\Lambda_{j_s,\omega_s}(k) t_1\right).$$

Лему доведено. ◊

Для дослідження питання про «величину» множини $M_{\omega,\delta}^{\gamma_0}$ застосуємо розмірність Гаусдорфа [1]. Позначимо

$$\omega_0 = \gamma_0 (1 + mn^2) + (p + \gamma_0)((1 + mC_n^2) 2^{mn} - 1).$$

Теорема 2. *Нехай для кожного* $k \in \mathbb{Z}^p$ *усі корені рівняння* (7) *є простими. Якщо* $\delta = mn\Lambda_2 T$, *то для довільного* $\omega > \omega_0$ *розмірність Гаусдорфа множини* $(0, T] \setminus M_{\omega,\delta}^{\gamma_0}$ *не перевищує числа* $\dfrac{(p + \gamma_0)\left((1 + mC_n^2) 2^{mn} - 1\right)}{\omega - \gamma_0 (1 + mn^2)}$.

Д о в е д е н н я. Через $A_{\omega,\delta}^{\gamma_0}(k)$ позначимо множину тих значень $t_1 \in (0, T]$, для яких нерівність

$$|\Delta(k, t_1)| \leq \left(1 + |k|\right)^{-\omega} \exp\left(-\delta |k|^{\gamma_0}\right) \tag{18}$$

виконується при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p$, а через $A_{\omega,\delta}^{\gamma_0}$ – множину тих $t_1 \in (0, T]$, для яких нерівність (18) виконується для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Із теореми 2.1 роботи [7] і лем 2, 3 випливає, що при $\omega > \omega_0$ і $\delta = mn\Lambda_2 T$ множину $A^{\gamma_0}_{\omega,\delta}(k)$ можна покрити проміжками $S^{\gamma_0,j}_{\omega,\delta}(k)$, $j = 1,\dots,N(k)$, так, що для кількості $N(k)$ цих проміжків виконуються нерівності

$$N(k) \le C_{12}\bigl(1 + |k|\bigr)^{\gamma_0}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{19}$$

а для їхніх довжин − нерівності

$$\operatorname{mes} S^{\gamma_0,j}_{\omega,\delta}(k) \le C_{13}\bigl[\bigl(1 + |k|\bigr)^{\gamma_0(1+mn^2)-\omega} \exp\bigl((mn\Lambda_2 T - \delta)|k|^{\gamma_0}\bigr)\bigr]^{1/(\nu-1)} =$$

$$= C_{13}\bigl(1 + |k|\bigr)^{-(p+\gamma_0)/\rho-\varepsilon}, \quad j = 1,\dots,N(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{20}$$

де $\nu = (1 + mC_n^2)2^{mn}$, $\varepsilon = (\omega - \omega_0)/(\nu - 1) - (1 - \rho)(p + \gamma_0)/\rho > 0$. Зауважимо, що для $\omega > \omega_0$, $\delta = mn\Lambda_2 T$ правильним є включення

$$A^{\gamma_0}_{\omega,\delta} = \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{|k|\ge N} A^{\gamma_0}_{\omega,\delta}(k) \subset \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{|k|\ge N} \bigcup_{j=1}^{N(k)} S^{\gamma_0,j}_{\omega,\delta}(k).$$

Тому кожна точка множини $A^{\gamma_0}_{\omega,\delta}$ належить до нескінченної кількості проміжків $S^{\gamma_0,j}_{\omega,\delta}(k)$, $j = 1,\dots,N(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. З нерівностей (19), (20) випливає, що

$$\sum_{|k|\ge 0} \sum_{j=1}^{N(k)} \bigl(\operatorname{mes} S^{\gamma_0,j}_{\omega,\delta}(k)\bigr)^{\rho} \le C_{14} \sum_{|k|\ge 0} \bigl(1 + |k|\bigr)^{-p-\varepsilon\rho} < \infty,$$

якщо $\rho > \dfrac{(p + \gamma_0)((1 + mC_n^2)2^{mn} - 1)}{\omega - \gamma_0(1+mn^2)}$. Тоді [1] розмірність Гаусдорфа множини $A^{\gamma_0}_{\omega,\delta}$ не перевищує $\dfrac{(p + \gamma_0)((1 + mC_n^2)2^{mn} - 1)}{\omega - \gamma_0(1+mn^2)}$. Очевидно, що множина $S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^p} \bigl\{t_1 \in (0,T] : \Delta(k,t_1) = 0\bigr\}$ є не більш ніж зліченною. Оскільки $(0,T]\backslash M^{\gamma_0}_{\omega,\delta} \subset A^{\gamma_0}_{\omega,\delta} \cup S$, то з монотонності розмірності Гаусдорфа відносно включення множин і з того, що дві множини, які відрізняються на не більш ніж зліченний доданок, мають однакову розмірність Гаусдорфа, випливає, що розмірність Гаусдорфа множини $(0,T]\backslash M^{\gamma_0}_{\omega,\delta}$ не перевищує розмірності Гаусдорфа множини $A^{\gamma_0}_{\omega,\delta}$.

Теорему доведено. ◊

5. Із теорем 1, 2 випливає наступне твердження про коректну розв'язність інтегральної задачі (1), (2) для всіх чисел $t_1 \in (0,T]$, крім, можливо, множини, розмірність Гаусдорфа якої не перевищує певного невід'ємного числа.

Теорема 3. *Нехай для кожного* $k \in \mathbb{Z}^p$ *всі корені рівняння* (7) *є простими. Тоді для довільних* $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$ *і* $\omega > \gamma_0(1 + mn^2) + (p + \gamma_0)\bigl((1 + mC_n^2)2^{mn} - 1\bigr)$ *задача* (1), (2) *є*

$$(\alpha_0, \beta_0; \alpha_0 + \omega + (m^2n^2 - mn + 1)N, \beta_0 + mn(\Lambda_1 + \Lambda_2)T; \gamma_0)\text{-коректною}$$

для всіх $t_1 \in (0,T]$, *крім, можливо, множини, розмірність Гаусдорфа якої не перевищує* $\dfrac{(p + \gamma_0)((1 + mC_n^2)2^{mn} - 1)}{\omega - \gamma_0(1 + mn^2)}$.

Робота виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (Проект № 10.01/053).

1. *Берник В. И., Мельничук Ю. В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.
2. *Вігак В. М.* Побудова розв'язку задачі теплопровідності з інтегральними умовами // Доп. АН України. – Сер. А. – 1994. – № 8. – С. 57–60.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1966. – 576 с.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – Москва: Физматгиз, 1958. – 276 с.
5. *Иванчов Н. И.* Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 4. – С. 547–564.
6. *Ланкастер П.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1982. – 272 с.
7. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Діофантові наближення характеристичного визначника інтегральної задачі для лінійного рівняння з частинними похідними // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Сер. Математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 74–85.
8. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
9. *Симотюк М. М., Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46,** № 4. – С. 92–101.
10. *Симотюк М. М., Медвідь О. М.* Задача з розподіленими даними для рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 4. – С. 155–159.
11. *Фардигола Л. В.* Влияние параметров на свойства решений интегральных краевых задач в слое // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 51–58.
12. *Фардигола Л. В.* Интегральная краевая задача в слое // Мат. заметки. – 1993. – **53**, вып. 6. – С. 122–129.
13. *Фардигола Л. В.* Интегральная краевая задача в слое для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 11. – С. 123–144.
14. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – Москва: Наука, 1965. – 328 с.
15. *Штабалюк П. И.* Почти-периодические решения дифференциальных уравнений гиперболического и составного типов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Львов, 1984. – 146 с.

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Исследована корректность задачи с интегральными условиями для линейных систем уравнений с частными производными. Установлены условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи. Доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, возникающих при построении решения задачи.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR SYSTEMS OF LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

The correctness of the problem with integral conditions for systems of linear partial differential equations with constant coefficients is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The metric theorems of estimations of small denominators of the problem are proved.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.01.07