УДК 517.95

В. М. Поліщук

СТІЙКІСТЬ ЗАДАЧІ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Встановлено умови стійкості нелокальної крайової задачі для гіперболічних за Гордінгом диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Якщо шуканий розв'язок справджує додаткову умову «обмеженості енергії», проведено регуляризацію досліджуваної задачі та побудову її наближеного розв'язку.

Для гіперболічних рівнянь і систем рівнянь задача з нелокальними крайовими умовами, як відомо, є некоректною. У працях [2, 3, 4, 8] висвітлені різні підходи до дослідження некоректних задач.

Стійкість задачі Діріхле для одновимірного хвильового рівняння вивчалась у [5, 15]. Для гіперболічних рівнянь та систем рівнянь довільного порядку зі сталими коефіцієнтами в [7, 12, 13, 14] досліджено стійкість і регуляризацію задачі Діріхле. У праці [9] розглянуто стійкість багатоточкової задачі для гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Праця [1] присвячена вивченню стійкості та побудові наближеного розв'язку нелокальної крайової задачі для гіперболічного рівняння спеціального вигляду із змінними коефіцієнтами.

У запропонованій праці досліджено стійкість нелокальної крайової задачі для рівняння зі сталими коефіцієнтами, гіперболічного за Гордінгом. За допомогою методу регуляризації [10, 11] проведено побудову наближеного розв'язку розглядуваної задачі.

В області $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : t \in [0,T],\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^p\}$, де $\Omega = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ – p-вимірний тор, розглядаємо задачу

$$L[u] \equiv \sum_{s_0+|s|\le n} a_{s_0,s} \frac{\partial^{s_0+|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}} = 0\,, \qquad (1)$$

$$M_\ell[u] \equiv \left.\frac{\partial^{\ell-1}u(t,x)}{\partial t^{\ell-1}}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^{\ell-1}u(t,x)}{\partial t^{\ell-1}}\right|_{t=T} = \varphi_\ell(x), \qquad \ell = 1,\ldots,n\,, \qquad (2)$$

де $s = (s_1,\ldots,s_p)$, $|s| = s_1 + \ldots + s_p$, $a_{s_0,s}$, $\mu \in \mathbb{C}$, $a_{n,0,\ldots,0} \ne 0$, $\mu \ne 1$. Вважаємо, що рівняння (1) гіперболічне за Гордінгом, тобто, що корені λ_j, $j = 1,\ldots,n$, характеристичного рівняння

$$\sum_{s_0+|s|\le n} a_{s_0,s}\lambda^{s_0}(i\alpha_1)^{s_1}\ldots(i\alpha_p)^{s_p} = 0 \qquad (3)$$

для довільного дійсного вектора $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \ne 0$ мають обмежену дійсну частину:

$$\operatorname{Re}\lambda_j(\alpha) \le C_0, \qquad j = 1,\ldots,n\,.$$

Зі структури рівняння (3) отримуємо

$$|\lambda_j(\alpha)| \le C_1|\alpha| + C_2, \qquad j = 1,\ldots,n\,.$$

Вигляд області D зумовлює 2π-періодичність за сукупністю змінних $x_1,\ldots,x_p$ шуканого розв'язку задачі (1), (2) і функцій $\varphi_\ell(x)$, $\ell = 1,\ldots,n$.

Надалі будемо використовувати такі позначення:

$k = (k_1,\ldots,k_p)$; $\quad |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$; $\quad \|k\| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2}$;

$(k,x) = k_1x_1 + \ldots + k_px_p$;

$H_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{Z}_+$, – гільбертів простір комплекснозначних 2π-періодичних за всіма змінними функцій $v(x) = \sum_{|k|\ge 0} v_k \exp i\,(k,x)$ зі скалярним добутком, що індукує норму

$$\|v(x)\|_{H_q(\Omega)} = (v,v)_{H_q(\Omega)} = \sum_{|k|\ge 0} (1+\|k\|^2)^q\,|v_k|^2\,; \tag{4}$$

$H_q^n(D)$, $q \ge n$, – гільбертів простір функцій $u(t,x)$ таких, що $\dfrac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}$, $r = 0,1,\ldots,n$, для кожного $t \in [0,T]$ належить до простору $H_{q-r}^n(D)$ і є неперервною за t у нормі $H_{q-r}(\Omega)$; норму в просторі $H_q^n(D)$ означуємо формулою

$$\|u(t,x)\|^2_{H_q^n(D)} = \int_0^T \sum_{r=0}^n \left\|\frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}\right\|^2_{H_{q-r}(\Omega)} dt\,.$$

1. Сформулюємо результати, отримані при дослідженні однозначної розв'язності задачі (1), (2), які випливають із результатів праці [6], де розглядалася система рівнянь, гіперболічних за Гордінгом.

Розв'язок задачі шукаємо з простору $H_q^n(D)$, $q \ge n$, у вигляді

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} u_k(t) \exp i(k,x)\,.$$

Тоді, вважаючи, що $\varphi_\ell(x) \in H_N(\Omega)$, $\ell = 1,\ldots,n$, де N – достатньо велике, для визначення кожної з функцій $u_k(t)$ одержимо таку задачу:

$$\sum_{\nu=0}^n \sum_{|s|=\nu} a_{n-\nu,s}(ik_1)^{s_1}\ldots(ik_p)^{s_p}\,u_k^{(n-\nu)}(t) = 0\,, \tag{5}$$

$$M_{\ell,T}^{(k)}[u_k] \equiv u_k^{(\ell-1)}(0) - \mu u_k^{(\ell-1)}(T) = \varphi_{\ell k}, \quad \ell = 1,\ldots,n\,, \tag{6}$$

де $\varphi_{\ell k}$ – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_\ell(x)$, $\ell = 1,\ldots,n$.

Припустимо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ корені $\lambda_j(k)$, $j = 1,\ldots,n$, рівняння (3) при $\alpha = k$ є попарно різними. Тоді рівняння (5) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}(t) = \exp \lambda_j(k)t, \qquad j = 1,\ldots,n\,,$$

а розв'язок задачі (5), (6) зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{r,j=1}^n (-1)^{r+j}\varphi_{\ell k}\,\frac{\Delta_{rj}(T,k)}{\Delta(T,k)}\,u_{kj}(t)\,,$$

де $\Delta(T,k) \equiv \det\left\|M_{\ell,T}^{(k)}[u_{kj}]\right\|_{\ell,j=1}^n$, а $\Delta_{rj}(T,k)$ – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині r-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\Delta(T,k)$. Провівши обчислення, отримуємо

$$\Delta(T,k) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \mu\exp(\lambda_j(k)T)\right) \prod_{1\le \ell < r \le n} \left(\lambda_r(k) - \lambda_\ell(k)\right),$$

$$\Delta_{rj}(k) = (-1)^{r+j} \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\ne j}}^n \left(1-\mu\exp(\lambda_\nu(k)T)\right) \prod_{\substack{1\le\xi<\omega\le n\\ \xi,\omega\ne j}} \left(\lambda_\omega(k) - \lambda_\xi(k)\right) S_{n-r}^j(\lambda)\,,$$

де $S^j_\chi(\lambda)$ – сума усіх можливих добутків величин $\lambda_\omega(k)$, $\omega = 1,\dots,n$, $\omega \ne j$; χ – кількість множників у кожному добутку.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $H^n_n(D)$ *необхідно та достатньо, щоб рівняння*

$$1 - \mu \exp(\lambda_j(k)T) = 0, \qquad j = 1,\dots,n,$$

не мали розв'язків у цілих числах $k_1,\dots,k_p$.

За умов єдиності розв'язок задачі (1), (2) формально зображається рядом

$$u(t,x) = \sum_{|k|\ge 0} \sum_{\ell,j=1}^{n} \varphi_{\ell k} \mathcal{K}_{\ell j}(T,k) \exp\big(i(k,x) + \lambda_j(k)t\big), \tag{7}$$

де

$$\mathcal{K}_{\ell j}(T,k) = \frac{(-1)^{n+\ell} S^j_{n-\ell}(\lambda)}{\big(1 - \mu \exp(\lambda_j(k)T)\big)\prod\limits_{\substack{r=1\\ r\ne j}}^{n}\big(\lambda_j(k) - \lambda_r(k)\big)}, \qquad \ell, j = 1,\dots,n. \tag{8}$$

Теорема 2. *Нехай існують* $\gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{N}$ *і додатні сталі* M_1, M_2 *такі, що для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконуються нерівності*

$$\left|1 - \mu \exp(\lambda_j(k)T)\right| \ge M_1 |k|^{-\gamma_1 - \varepsilon/2}, \qquad j = 1,\dots,n, \tag{9}$$

$$\prod_{\substack{r=1\\ r\ne \ell}}^{n} |\lambda_\ell(k) - \lambda_r(k)| \ge M_2 |k|^{-\gamma_2 - \varepsilon/2}, \qquad \ell = 1,\dots,n. \tag{10}$$

Якщо $\varphi_\ell \in H_N(\Omega)$, $\ell = 1,\dots,n$, *де* $N > q + n - 1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, *то існує розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $H^n_q(D)$, $q \ge n$, *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_\ell(x)$, $\ell = 1,\dots,n$.

Позначимо через $\bar{a}$ вектори, складені з коефіцієнтів $a_{s_0,s}$ рівняння (1), а через θ – кількість цих коефіцієнтів, тобто кількість розв'язків $(s_0, s_1,\dots$ $\dots, s_p) \in \mathbb{Z}^{p+1}_+$ нерівності $s_0 + |s| \le n$.

Теорема 3. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^2$) *векторів* (ψ, T), *де* $\psi = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{Im}\mu}{\operatorname{Re}\mu}$, *нерівності* (9) *при* $\gamma_1 = p$ *виконуються для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

Теорема 4. *Для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^\theta$) *векторів* $\bar{a}$ *при* $\gamma_2 \ge p(n-1)/2$ *нерівності* (10) *виконуються для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$.

2. Перейдемо до дослідження стійкості задачі (1), (2). Розглянемо область $D_\tau = [0,\tau] \times \Omega$, де $|\tau - T| \le \delta$, $\delta > 0$, та наближені крайові умови

$$\left\| M^{(k)}_{\ell,\tau}[u] - \varphi_\ell \right\|_{L_2(\Omega)} \le C\delta, \qquad \ell = 1,\dots,n. \tag{11}$$

Нехай шуканий розв'язок задовольняє додаткову умову «обмеженості енергії»

$$\int\limits_{\Omega}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_p}\right)^2\right\}dx<E\,, \qquad E=\mathrm{const}>0\,. \tag{12}$$

Означення 1. Задачу (1), (11), (12) назвемо *стійкою*, якщо для довільних розв'язків $u_1, u_2 \in H_q^n(D_\tau)$ цієї задачі виконується умова

$$\lim_{\delta\to 0}\max_{0\le t\le\tau}\|u_1-u_2\|_{L_2(\Omega)}=0$$

при довільних $E>0$ і $\varphi_\ell\in L_2(\Omega)$, $\ell=1,\ldots,n$.

Теорема 5. *Якщо для всіх* $k\in\mathbb{Z}^p$ *справджуються умови*

$$1-\mu\exp(\lambda_j(k)T)\ne 0, \qquad j=1,\ldots,n\,,$$

то задача (1), (11), (12) *є стійкою.*

Д о в е д е н н я. Нехай $u_1(t,x)$ та $u_2(t,x)$ – два різних розв'язки задачі (1), (11), (12), тоді функція $v(t,x)\equiv u_1(t,x)-u_2(t,x)$ задовольняє рівняння (1), умову (12) і нерівності

$$\left\|M_{\ell,\tau}^{(k)}[v]\right\|_{L_2(\Omega)}\le 2C\delta, \qquad \ell=1,\ldots,n\,. \tag{13}$$

Зобразимо $v(t,x)$ у вигляді

$$v(t,x)=\sum_{|k|\ge 0}\sum_{j,\ell=1}^{n} b_{\ell k}\mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k)\exp\left(i(k,x)+\lambda_j(k)t\right), \tag{14}$$

де $b_{\ell k}$, $\ell=1,\ldots,n$, – деякі сталі, а $\mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k)$, $\ell, j=1,\ldots,n$, визначені формулами (8). Використовуючи означення норми (4), підставимо (14) в умови (13):

$$\left\|M_{\nu,\tau}^{(k)}[v]\right\|_{L_2(\Omega)}=\left\{\sum_{|k|\ge 0}\left|\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{\ell k}\mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k)\lambda_j^{\nu-1}(k)(1-\mu\exp\lambda_j(k)\tau)\right|^2\right\}^{1/2}\le 2C\delta\,.$$

У сумі за ℓ усі доданки, крім одного (при $\ell=\nu$), дорівнюють нулеві як суми добутків елементів одного рядка на алгебричні доповнення до елементів іншого рядка. Звідси отримуємо

$$\left\|M_{\nu,\tau}^{(k)}[v]\right\|_{L_2(\Omega)}=\left(\sum_{|k|\ge 0}|b_{\nu k}|^2\right)^{1/2}<2C\delta\,. \tag{15}$$

Розіб'ємо ряд у формулі (14) на дві частини:

$$v(t,x)=W(t,x)+V(t,x)\,,$$

де

$$W(t,x)=\sum_{|k|\le N}\sum_{j,\ell=1}^{n} b_{\ell k}\mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k)\exp\left(i(k,x)+\lambda_j(k)t\right),$$

$$V(t,x)=\sum_{|k|>N}\sum_{j,\ell=1}^{n} b_{\ell k}\mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k)\exp\left(i(k,x)+\lambda_j(k)t\right). \tag{16}$$

Оцінимо норму функції $V(t,x)$:

$$\|V\|_{L_2(\Omega)}^2\le\max_{t\in[0,\tau)}\int\limits_{\Omega}\left|\sum_{\|k|>N}\sum_{j,\ell=1}^{n} b_{\ell k}\mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k)\exp\left(i(k,x)+\lambda_j(k)t\right)\right|^2\frac{\|k\|^2}{N^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{N^2}\max_{t\in[0,\tau)}\int\limits_{\Omega}\left|\sum_{\|k|>N}\sum_{j,\ell=1}^{n} b_{\ell k}\mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k)\|k\|^2\exp\left(i(k,x)+\lambda_j(k)t\right)\right|^2dx\le$$

$$\le \frac{1}{N^2}\frac{\left(\max\{1,C_1\}\right)^2}{p+1}\max_{t\in[0,\tau)}\int_\Omega\left|\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2+\sum_{r=1}^{p}\left(\frac{\partial V}{\partial x_r}\right)^2\right|dx \le$$

$$\le \frac{1}{N^2}\frac{\left(\max\{1,C_1\}\right)^2}{p+1}E=\frac{C_3}{N^2}E\,,\quad \text{де}\quad C_3=\frac{\left(\max\{1,C_1\}\right)^2}{p+1}\,. \tag{17}$$

Для функції $W(t,x)$, використовуючи означення норми (4) та оцінку (15), отримуємо

$$\|W\|^2_{L_2(\Omega)}=\max_{t\in[0,\tau)}\sum_{|k|\le N}\left|\sum_{j,\ell=1}^{n}b_{\ell k}\mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k)\exp\left(\lambda_j(k)t\right)\right|^2\le$$

$$\le C_4\delta^2\max_{j,\ell}\max_{|k|\le N}\max_{|T-\tau|<\delta}\left|\mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k)\right|^2, \tag{18}$$

де $C_4=\left(2Cn^2\max\left\{1,\max\limits_{t\in[0,T]}\exp(Ct)\right\}\right)^2$.

З нерівностей (17), (18) випливає оцінка

$$\|v\|^2_{L_2(\Omega)}\le C_5\left(\frac{E}{N^2}+\delta^2\max_{j,\ell}\max_{|k|\le N}\max_{|T-\tau|<\delta}\left|\mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k)\right|^2\right), \tag{19}$$

де $C_5=\max\{C_3,C_4\}$.

Побудуємо функцію $\Psi(y)$, яка монотонно зростає разом зі своєю першою похідною, таку, щоб для всіх натуральних $y=m\in\mathbb{N}$ виконувалась умова

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\Psi(m)}{m\Psi'(m)}=0\,, \tag{20}$$

і справджувалась нерівність

$$\Psi(N)>\max_{j,\ell}\max_{|k|\le N}\max_{|T-\tau|<\delta}\left|\mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k)\right|^2. \tag{21}$$

Із оцінки (19) та нерівності (21) отримуємо

$$\|v\|^2_{L_2(\Omega)}\le C_5\left(\frac{E}{m^2}+\delta^2\Psi(m)\right),\qquad m\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Нехай m_0 – точка максимуму функції $\dfrac{E}{m^2}+\delta^2\Psi(m)$, тобто m_0 є коренем рівняння

$$m^3\Psi'(m)=\frac{2E}{\delta^2}\,. \tag{23}$$

Оскільки $\Psi(m)$ є монотонно зростаючою, то $m_0\underset{\delta\to0}{\to}\infty$, звідки випливає, що

$$\frac{E}{m_0^2}\underset{\delta\to0}{\to}0\,.$$

Використовуючи співвідношення (20), (23), отримуємо

$$\frac{E}{m_0^2}+\delta^2\Psi(m_0)=\frac{E}{m_0^2}+\frac{\delta^2m_0^3\Psi'(m_0)\Psi(m_0)}{m_0^3\Psi'(m_0)}=\frac{E}{m_0^2}+\frac{2E\Psi(m_0)}{m_0^3\Psi'(m_0)}=$$

$$=\frac{E}{m_0^2}+2\frac{E}{m_0^2}\cdot\frac{\Psi(m_0)}{m_0\Psi'(m_0)}\underset{\delta\to0}{\longrightarrow}0\,.$$

Тоді з оцінок (19), (22) випливає $\lim\limits_{\delta\to0}\|v\|^2_{L_2(\Omega)}=0$, що й треба було довести. ◊

3. Побудуємо регуляризувальну сім'ю операторів задачі (1), (11), (12).

Означення 2 (див. [2, 4]). Сукупність лінійних операторів B_N називають *регуляризувальною* для лінійного операторного рівняння

$$Ax = f\,, \tag{24}$$

де $x \in X$, $f \in F$, X, F – банахові простори, A – цілком неперервний оператор з областю визначення X та областю значень F, якщо:

а) для кожного $N \in \mathbb{N}$ оператор $B_N : F \to X$ є неперервним;

б) для кожного $x \in X$ справджується умова $\lim\limits_{N\to\infty} \|B_N A x - x\|_X = 0$.

Параметр N називається параметром регуляризації.

Розглянемо сукупність лінійних операторів B_N, які залежать від цілочислового параметра N і діють із простору $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ за правилом

$$B_N \varphi(x) = \sum_{|k|\le N} \sum_{j,\ell=1}^{n} \varphi_{\ell k} \mathcal{K}_{\ell j}(T,k) \exp\left(i(k,x) + \lambda_j(k)t\right), \tag{25}$$

де $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$; $\varphi_{\ell k}$ – коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_\ell(x)$, $\ell = 1, \ldots, n$; $\mathcal{K}_{\ell j}(T,k)$, $\ell, j = 1, \ldots, n$, визначені формулами (8).

Легко бачити, що оператори (25) є неперервними, оскільки неперервними є оператори скінченного підсумовування та оператори, що визначають коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_\ell(x)$, $\ell = 1, \ldots, n$.

За умов теореми 2 ряд у правій частині формули (7) є збіжним і визначає розв'язок задачі (1), (11), (12). Тому послідовність $\{B_N \varphi\}$, як частина ряду (7), також є збіжною і збігається до тієї ж границі, що й ряд (7).

З цих міркувань випливає доведення такої теореми.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми* 2. *Тоді сукупність операторів* (25), *що діють із* $L_2(\Omega)$ *в* $L_2(\Omega)$, *є регуляризувальною сім'єю операторів задачі* (1), (11), (12).

4. Як відомо з [3, 4], якщо для рівняння (24) побудовано регуляризувальну сім'ю операторів B_N, то за наближений розв'язок рівняння (24) можна взяти елемент $x_\delta = B_N f_\delta$ із простору X, де $\delta > 0$, а $f_\delta \in F$ вибране так, щоб $\|f - f_\delta\|_F \le \delta$.

Розглянемо функцію

$$u_{N,\tau}(t,x) = \sum_{|k|\le N} \sum_{j,\ell=1}^{n} \Phi_{\ell k} \mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k) \exp\left(i(k,x) + \lambda_j(k)t\right), \tag{26}$$

де $\Phi_{\ell k}$ – коефіцієнти Фур'є функції $\Phi_\ell(x)$, яка справджує нерівність

$$\sum_{|k|\ge 0} \left|\Phi_{\ell k} - \varphi_{\ell k}\right|^2 \le \delta^2\,, \quad \ell = 1, \ldots, n.$$

Покажемо, що при достатньо великому $N = N(\delta)$ виконується умова

$$\lim_{\delta\to 0} \max_{t\in[0,T]} \left\|u - u_{N,\tau}\right\|_{L_2(\Omega)} = 0\,,$$

тобто функція $u_{N,\tau}(t,x)$, означена рівністю (26), є наближеним розв'язком задачі (1), (2).

Очевидно, що

$$\left\|u - u_{N,\tau}\right\|_{L_2(\Omega)} \le \left\|u - B_N\varphi\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|B_N\varphi - u_{N,\tau}\right\|_{L_2(\Omega)}, \tag{27}$$

де елемент $B_N\varphi$ визначений формулою (25).

Оцінку норми функції $w = u - B_N\varphi$ в (27) отримуємо аналогічно до оцінки (17) норми функції $V(t,x)$:

$$\|w\|^2_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le \frac{1}{N^2} \max_{t\in[0,T]} \int_\Omega \left| \sum_{|k|>N} \sum_{j,\ell=1}^{n} \varphi_{\ell k} \mathcal{K}_{\ell j}(T,k) \|k\| \exp\left(i(k,x) + \lambda_j(k)t\right) \right|^2 dx \le$$

$$\le \frac{C_3}{N^2} \max_{t\in[0,T]} \int_\Omega \left| \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \sum_{r=1}^{p} \left(\frac{\partial w}{\partial x_r}\right)^2 \right| dx \le \frac{C_3 E}{N^2}.$$

Для другого доданка в (27) справджується нерівність

$$\left\|B_N\varphi - u_{N,\tau}\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{|k|\le N} \sum_{j,\ell=1}^{n} \left|\varphi_{\ell k}\mathcal{K}_{\ell j}(T,k) - \Phi_{\ell k}\mathcal{K}_{\ell j}(\tau,k)\right|^2 \left|\exp\left(\lambda_j(k)t\right)\right|^2 \le$$

$$\le C_6^2 \sum_{|k|\le N} \sum_{j,\ell=1}^{n} \left| S^j_{n-\ell} \prod_{\substack{r=1\\ r\ne j}}^{n} \left(\lambda_j(k) - \lambda_r(k)\right)^{-1} \right|^2 \left| \frac{\varphi_{\ell k}}{1-\mu\exp\left(\lambda_j(k)T\right)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\Phi_{\ell k}}{1-\mu\exp\left(\lambda_j(k)\tau\right)} \right|^2 \le C_6^2 \sigma_N \sum_{|k|\le N} \sum_{j,\ell=1}^{n} \frac{\left|\varphi_{\ell k} - \Phi_{\ell k}\right|^2}{\left|1-\mu\exp\left(\lambda_j(k)t^*\right)\right|^2} \le$$

$$\le C_6^2 \sigma_N \delta^2 \sum_{|k|\le N} \sum_{j,\ell=1}^{n} \left|1-\mu\exp\left(\lambda_j(k)t^*\right)\right|^{-2},$$

де $t^* \in [0,T]$ – точка максимуму функції $\left(1-\mu\exp\left(\lambda_j(k)t\right)\right)^{-1}$,

$$C_6 = \max\{1, \max_{t\in[0,T]} \exp C_0 t\}, \quad \sigma_N = \max_{j,\ell=1,\ldots,n} \max_{|k|\le N} \left| S^j_{n-\ell} \prod_{\substack{r=1\\ r\ne j}}^{n} \left(\lambda_j(k) - \lambda_r(k)\right)^{-1} \right|^2.$$

Тоді

$$\left\|u - u_{N,\tau}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{C_3 E}{N^2} + C_6^2 \sigma_N \delta^2 \sum_{|k|\le N} \sum_{j,\ell=1}^{n} \left|1-\mu\exp\left(\lambda_j(k)t^*\right)\right|^{-2}. \tag{28}$$

Терема 7. *Нехай справджуються умови теореми* 2. *Тоді за наближений розв'язок задачі* (1), (11), (12) *можна вибрати функцію* $u_{N,\tau}(t,x)$, *яка задана формулою* (26) *і задовольняє умову* (28), *де* $|T-\tau| < \delta$, *а* $u(t,x)$ – *точний розв'язок задачі* (1), (2).

Очевидно, що ефективність регуляризації залежить від вибору параметра $N = N(\delta)$. Якщо зафіксовано точність δ наближення нелокальних крайових умов (2), то значення параметра $N(\delta)$, при якому досягається

$$\inf_{N(\delta)} \left\|u - u_{N,\tau}\right\|_{L_2(\Omega)},$$

буде оптимальним стосовно оцінки (28).

Робота виконана при фінансовій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень Міністерства освіти і науки України (Проект № 10.01/053).

1. *Гой Т. П.* Розв'язність, стійкість та побудова наближеного розв'язку нелокальної крайової задачі для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Вісн. Прикарпат. ун-ту. Сер. природ.-мат. наук. – 1996. – Вип. 2. – С. 30–41.

2. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и её приложения. – Москва: Наука, 1978. – 206 с.
3. *Лаврентьев М. М.* Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1973. – 71 с.
4. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – Москва: Наука, 1980. – 288 с.
5. *Мельникова И. В., Фрейберг А. Ю.* О регуляризации краевой задачи для уравнения колебаний // Журн. вычисл. математики и мат. физ. – 1985. – **25**, № 5. – С. 783–789.
6. *Поліщук В. М.* Задача з нелокальними крайовими умовами для гіперболічних систем диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. – 1979. – № 3. – С. 171–175.
7. *Пташник Б. И., Фиголь В. В.* Краевая задача с приближенными граничными данными для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами // Тез. докл. Всесоюз. школы молодых ученых «Числен. методы решения задач мат. физики». – Москва: Знание, 1983. – Ч. 1. – С. 25–26.
8. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
9. *Пташник Б. Й., Фіголь В. В., Штабалюк П. І.* Розв'язність, стійкість і регуляризація багатоточкової задачі для гіперболічних рівнянь // Мат. студії. – 1991. – Вип. 1. – С. 16–32.
10. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. – 1963. – **151**, № 3. – С. 501–504.
11. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1974. – 223 с.
12. *Фиголь В. В.* Об устойчивости задачи Дирихле для гиперболических уравнений // Общая теория граничных задач. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 298–299.
13. *Фіголь В. В.* Крайова задача з наближеними граничними даними для гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами // Доп. АН УРСР. – 1985. – № 2. – С. 18–21.
14. *Фіголь В. В.* Задача з наближеними граничними даними для системи диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. – С. 488–492.
15. *Papi F. G.* On stability of the Dirichlet problem for the vibrating string equation // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat. – 1979. – **6**, № 4. – P. 719–728.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Установлены условия устойчивости нелокальной краевой задачи для гиперболических по Гордингу дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При условии, что искомое решение удовлетворяет дополнительному условию «ограниченности энергии», проведено регуляризацию исследуемой задачи и построено ее приближенное решение.

STABILITY OF NON-LOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

The conditions of stability of non-local boundary-value problem for hyperbolic – by Gording – differential equations with constant coefficients are established. If the unknown solution fulfills additional condition of «boundness of energy», the regularization of considered problem is made and the approximate solution is built.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
25.07.06