УДК 519.46

В. М. Федорчук[1,2], В. І. Федорчук[2]

ПРО ІНВАРІАНТНІ ОПЕРАТОРИ НИЗЬКОВИМІРНИХ НЕСПРЯЖЕНИХ ПІДАЛГЕБР АЛГЕБРИ ЛІ ГРУПИ ПУАНКАРЕ $P(1,4)$

Шляхом класифікації низьковимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ у класи ізоморфних підалгебр побудовано всі інваріантні оператори (узагальнені оператори Казіміра) для всіх неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ розмірності ≤ 3, а також для більшості неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ розмірностей 4 і 5. Наведено інваріантні оператори для всіх неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ розмірності ≤ 3.

Інваріантні оператори (функції генераторів груп Лі, які комутують з усіма генераторами цих груп) відіграють важливу роль у теорії зображень груп Лі (їх алгебр Лі), у теорії спеціальних функцій, в теоретичній і математичній фізиці. З деталями стосовно цих питань можна ознайомитись у [15] (див. також цитовану там літературу).

У роботі [15] побудовано всі інваріантні функції від групових генераторів (узагальнені оператори Казіміра) для всіх дійсних алгебр Лі розмірності ≤ 5 і для всіх дійсних нільпотентних алгебр Лі розмірності 6. Крім цього, описано метод, який використовувався для знаходження цих інваріантів. У [16] знайдено всі інваріантні функції від групових генераторів для всіх неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,3)$.

Природним розширенням групи Пуанкаре $P(1,3)$ є узагальнена група Пуанкаре $P(1,4)$. Група $P(1,4)$ є групою поворотів і зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Вона широко використовується при розгляді різних задач теоретичної і математичної фізики (див., наприклад, [1, 10, 12]). Вивченню підгрупової структури групи $P(1,4)$ присвячено роботи [4, 5, 8, 9, 13]. У роботах [6, 7] побудовано інваріантні оператори для деяких неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Опису інваріантних операторів восьмивимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ присвячена робота [14]. Ця робота присвячена побудові інваріантних операторів для всіх низьковимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Для реалізації цього виконаємо наступне:

− на основі повної класифікації дійсних структур алгебр Лі розмірності ≤ 5, отриманої Г. М. Мубаракзяновим [2, 3], проведемо класифікацію всіх низьковимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ у класи ізоморфних підалгебр;

− використаємо побудовані в [15] всі інваріантні функції від групових генераторів для всіх дійсних алгебр Лі розмірності ≤ 5 для знаходження інваріантних операторів для всіх низьковимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$.

В основу пропонованої роботи покладено повний список неспряжених (з точністю до $P(1,4)$-спряженості) підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$, який можна знайти в [11].

На сьогодні побудовано всі інваріантні оператори (узагальнені оператори Казіміра) для всіх неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ розмірності ≤ 3, а також для більшості неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ розмірностей 4 і 5. Для представлення отриманих результатів потрібно розглянути алгебру Лі групи $P(1,4)$.

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007. – 50, № 1. – С. 16-23.

1. Алгебра Лі групи $P(1,4)$**.** Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15 базисними елементами $M_{\mu\nu} = - M_{\nu\mu}$, $\mu, \nu = 0,1,\ldots,4$, і P'_μ, $\mu = 0,1,\ldots,4$, які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[P'_\mu, P'_\nu] = 0,$$

$$[M'_{\mu\nu}, P'_\sigma] = g_{\mu\sigma} P'_\nu - g_{\nu\sigma} P'_\mu,$$

$$[M'_{\mu\nu}, M'_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} M'_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} M'_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M'_{\nu\rho},$$

де $g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0,1,\ldots,4$, − метричний тензор з компонентами $g_{00} = - g_{11} = - g_{22} = - g_{33} = - g_{44} = 1$ і $g_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \neq \nu$. Тут і всюди надалі $M'_{\mu\nu} = iM_{\mu\nu}$.

Перейдемо від $M'_{\mu\nu}$ і P'_μ до таких лінійних комбінацій:

$$G = M'_{40}, \qquad L_1 = M'_{32}, \qquad L_2 = -M'_{31}, \qquad L_3 = M'_{21},$$

$$P_a = M'_{4a} - M'_{a0}, \qquad C_a = M'_{4a} + M'_{a0}, \qquad a = 1,2,3,$$

$$X_0 = \frac{P'_0 - P'_4}{2}, \qquad X_k = P'_k, \qquad k = 1,2,3, \qquad X_4 = \frac{P'_0 + P'_4}{2}.$$

2. Інваріантні оператори одновимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Спочатку наведемо деякі результати класифікації дійсних одновимірних алгебр Лі .

Відомо [3], що існує тільки один тип дійсних алгебр Лі розмірності один. Позначатимемо його A_1 [16]. Оскільки всі одновимірні алгебри Лі є ізоморфними, то вони будуть типу A_1.

Алгебри Лі типу A_1.

Нижче виписуємо одновимірні неспряжені підалгебри типу A_1 алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$\langle G \rangle, \quad \langle L_3 + eG, e > 0 \rangle, \quad \langle P_3 + C_3 + 2L_3 \rangle, \quad \langle P_3 + C_3 + eL_3, e > 2 \rangle,$$

$$\langle P_3 \rangle, \quad \langle L_3 - P_3 \rangle, \quad \langle L_3 \rangle, \quad \langle X_0 + X_4 \rangle, \quad \langle X_0 - X_4 \rangle, \quad \langle X_4 \rangle,$$

$$\langle G + cX_1, c < 0 \rangle, \quad \langle L_3 + eG + æ_3 X_3, e > 0, æ_3 < 0 \rangle,$$

$$\langle L_3 - P_3 + \alpha_0 X_0, \alpha_0 < 0 \rangle, \quad \langle P_3 + C_3 + eL_3 + \alpha(X_0 + X_4), e > 2, \alpha < 0 \rangle,$$

$$\langle L_3 - X_4 \rangle, \quad \langle P_3 + X_1 \rangle, \quad \langle P_3 + C_3 + 2L_3 + \alpha(X_0 + X_4), \alpha < 0 \rangle,$$

$$\langle P_3 + X_0 \rangle, \quad \langle L_3 + \tilde{d}(X_0 + X_4), \tilde{d} < 0 \rangle, \quad \langle L_3 + \alpha X_3, \alpha < 0 \rangle.$$

Кожна алгебра Лі типу A_1 має один інваріантний оператор (оператор Казіміра), яким є її базисний елемент.

3. Інваріантні оператори двовимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$**.** Спочатку наведемо деякі результати класифікації дійсних двовимірних алгебр Лі. Відомо, що є тільки два різні типи дійсних двовимірних алгебр Лі: розкладний, $A_1 \oplus A_1 \equiv 2A_1$, і нерозкладний, A_2 [3]. Алгебри Лі типу $2A_1$ − абелеві. Базисні елементи (e_1 і e_2) алгебр Лі типу A_2 задовольняють комутаційні співвідношення $[e_1, e_2] = e_2$ [15].

Нижче наводимо отримані результати для двовимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$.

Алгебри Лі типу $2A_1$.

Випишемо неспряжені підалгебри типу $2A_1$ алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$\langle G, L_3\rangle,\quad \langle G, X_1\rangle,\quad \langle L_3 + eG, X_3, e>0\rangle,\quad \langle P_3 + C_3, L_3\rangle,$$

$$\langle P_3 + C_3 + 2L_3, X_0 + X_4\rangle,\quad \langle P_3 + C_3 + eL_3, X_0 + X_4, e>2\rangle,$$

$$\langle P_1, P_2\rangle,\quad \langle L_3, P_3\rangle,\quad \langle P_3, X_1\rangle,\quad \langle P_3, X_4\rangle,\quad \langle L_3 - P_3, X_4\rangle,$$

$$\langle L_3, X_4\rangle,\quad \langle L_3, X_0 + X_4\rangle,\quad \langle L_3, X_0 - X_4\rangle,\quad \langle X_0 + X_4, X_0 - X_4\rangle,$$

$$\langle X_1, X_4\rangle,\quad \langle X_1, X_0 - X_4\rangle,\quad \langle L_3 - X_4, P_3 + hX_0, h>0\rangle,\quad \langle L_3 - X_4, P_3\rangle,$$

$$\langle L_3, P_3 + X_0\rangle,\quad \langle G + aX_3, L_3, a<0\rangle,\quad \langle G, L_3 + dX_3, d<0\rangle,$$

$$\langle P_3 + X_0, X_1\rangle,\quad \langle P_3 + X_2, X_1\rangle,\quad \langle P_3 + X_0, X_4\rangle,\quad \langle P_3 + X_1, X_4\rangle,$$

$$\langle G + a_2X_2, X_1, a_2<0\rangle,\quad \langle L_3 - P_3 + a_0X_0, X_4, a_0<0\rangle,$$

$$\langle P_3 + C_3, L_3 + d(X_0 + X_4), d<0\rangle,\quad \langle L_3 - X_4, X_3\rangle,$$

$$\langle L_3 + d_3X_3, X_0 + X_4, d_3<0\rangle,\quad \langle L_3 + d_3X_3, X_0 - X_4, d_3<0\rangle,$$

$$\langle L_3 + d_4X_4, X_0 - X_4, d_4<0\rangle,\quad \langle L_3 + \alpha(X_0 + X_4), X_4, \alpha<0\rangle,$$

$$\langle L_3 + a_3X_3, X_4, a_3<0\rangle,$$

$$\langle L_3 + \alpha(X_0 + X_4), P_3 + C_3 + \beta(X_0 + X_4), \alpha<0, \beta<0\rangle,$$

$$\langle P_1 + X_3, P_2\rangle,\quad \langle P_1 + X_3, P_2 + \gamma X_2 + \beta X_3, \gamma>0, \beta>0\rangle,$$

$$\langle P_1 + X_3, P_2 + \gamma X_2, \gamma>0\rangle,\quad \langle P_1, P_2 + X_2 + \beta X_3, \beta>0\rangle,$$

$$\langle P_1, P_2 + X_2\rangle,\quad \langle G + \alpha X_3, L_3 + \beta X_3, \alpha<0, \beta<0\rangle.$$

Для абелевих алгебр Лі типу $2A_1$ інваріантними операторами є їхні базисні елементи.

Алгебри Лі типу A_2:

$$[e_1, e_2] = e_2.$$

Нижче виписуємо неспряжені підалгебри типу A_2 алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$\langle -G, P_3\rangle,\quad \left\langle -G - \frac{1}{d}L_3, P_3, d>0\right\rangle,\quad \langle -G, X_4\rangle,\quad \left\langle -G - \frac{1}{e}L_3, X_4, e>0\right\rangle,$$

$$\langle -G - aX_1, P_3, a<0\rangle,\quad \langle -G - cX_1, X_4, c<0\rangle,$$

$$\left\langle -\left(G + \frac{1}{e}L_3 + \frac{æ_3}{e}X_3\right), X_4, e>0, æ_3<0\right\rangle.$$

Алгебри Лі типу A_2 не мають інваріантних операторів [15, 16].

4. Інваріантні оператори тривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$**.** Спочатку наведемо деякі результати класифікації дійсних тривимірних алгебр Лі.

Утворюючи прямі суми одновимірних алгебр Лі типу A_1 з алгебрами Лі розмірності два, отримуємо два типи алгебр Лі розмірності три: $3A_1$, $A_2 \oplus A_1$. Крім того, існує 9 типів дійсних нерозкладних алгебр Лі: $A_{3,1}, \ldots,$ $A_{3,9}$ (див. [3, 15]), два з яких залежать від параметрів (тобто складають континууми алгебр Лі).

У цій роботі символ $A_{r,j}^{a}$ означатиме просто j-ту алгебру Лі розмірності r (тут a − неперервний параметр, від якого залежить алгебра).

Надалі при заданні конкретної алгебри Лі виписуватимемо тільки відмінні від нуля комутаційні співвідношення, вважаючи при цьому всі невиписані нулями [3, 15].

Наведемо отримані результати для тривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$.

Алгебри Лі типу $3A_1$.

Нижче виписуємо неспряжені підалгебри типу $3A_1$ алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$\langle G, L_3, X_3\rangle, \quad \langle G, X_1, X_2\rangle, \quad \langle P_3 + C_3, L_3, X_0 + X_4\rangle,$$
$$\langle P_1, P_2, P_3\rangle, \quad \langle P_1, P_2, X_3\rangle, \quad \langle P_1, P_2, X_4\rangle, \quad \langle L_3, P_3, X_4\rangle, \quad \langle P_3, X_1, X_2\rangle,$$
$$\langle P_3, X_1, X_4\rangle, \quad \langle L_3, X_0, X_4\rangle, \quad \langle L_3, X_3, X_4\rangle, \quad \langle L_3, X_3, X_0 - X_4\rangle,$$
$$\langle X_0 + X_4, X_1, X_0 - X_4\rangle, \quad \langle X_4, X_1, X_2\rangle, \quad \langle X_1, X_2, X_0 - X_4\rangle,$$
$$\langle L_3, P_3 + X_0, X_4\rangle, \quad \langle P_3 + X_0, X_1, X_2\rangle, \quad \langle P_3 + X_0, X_1, X_4\rangle,$$
$$\langle P_3 + X_2, X_1, X_4\rangle, \quad \langle G + a_3X_3, X_1, X_2, a_3 < 0\rangle,$$
$$\langle L_3 + d_3X_3, X_0, X_4, d_3 < 0\rangle, \quad \langle L_3 + \tilde{d}_4X_4, X_3, X_0 + X_4, \tilde{d}_4 < 0\rangle,$$
$$\langle L_3 + \alpha(X_0 + X_4), X_3, X_4, \alpha < 0\rangle, \quad \langle P_1, P_2 + X_2, X_3\rangle,$$
$$\langle P_1 + \gamma X_3, P_2 + X_2 + \delta X_3, X_4, \gamma > 0\rangle, \quad \langle P_1, P_2 + X_2 + \delta X_3, X_4, \delta > 0\rangle,$$
$$\langle P_1, P_2 + X_2, X_4\rangle, \quad \langle P_1 + X_3, P_2, X_4\rangle, \quad \langle P_1, P_2 + \alpha X_2, P_3 + \gamma X_3, \alpha > 0\rangle.$$

Оскільки алгебри Лі типу $3A_1$ є абелевими, то інваріантними операторами для них будуть їхні базисні елементи.

Алгебри Лі типу $A_2 \oplus A_1$.

Нижче виписуємо неспряжені підалгебри типу $A_2 \oplus A_1$ алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$\langle -G, P_3\rangle \oplus \langle L_3\rangle, \quad \langle -G, X_4\rangle \oplus \langle L_3\rangle, \quad \langle -G, P_3\rangle \oplus \langle X_1\rangle,$$
$$\langle -G, X_4\rangle \oplus \langle X_1\rangle, \quad \left\langle -G - \frac{1}{e}L_3, X_3, e > 0\right\rangle \oplus \langle X_4\rangle,$$
$$\langle -G - aX_3, X_4, a < 0\rangle \oplus \langle L_3 + dX_3, d < 0\rangle,$$
$$\langle -G - aX_3, X_4, a < 0\rangle \oplus \langle L_3\rangle, \quad \langle -G, X_4\rangle \oplus \langle L_3 + dX_3, d < 0\rangle,$$
$$\langle -G - a_2X_2, P_3, a_2 < 0\rangle \oplus \langle X_1\rangle, \quad \langle -G - \tilde{a}_2X_2, X_4, \tilde{a}_2 < 0\rangle \oplus \langle X_1\rangle.$$

Відомо, що інваріантними операторами для алгебр Лі типу $A_2 \oplus A_1$ є інваріантні оператори підалгебр A_2 і A_1 (див., наприклад, [15]). Алгебри Лі типу A_2 не мають інваріантних операторів [15, 16]. Кожна алгебра Лі типу A_1 має один інваріантний оператор, яким є її базисний елемент. Тому інваріантними операторами для алгебр Лі типу $A_2 \oplus A_1$ будуть базисні елементи алгебр A_1.

Алгебри Лі типу $A_{3,1}$:

$$[e_2, e_3] = e_1.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,1}$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їх інваріантні оператори наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$2X_4,\ P_3,\ X_3$	X_4
$2bX_4,\ P_3,\ X_1 + bX_3, \quad b > 0$	X_4
$-2X_4,\ L_3 - P_3,\ X_3$	X_4

$-2dX_4,\ L_3+dX_3,\ P_3+X_0,\quad d<0$	X_4
$-2dX_4,\ L_3+dX_3,\ P_3,\quad d<0$	X_4
$2X_4,\ P_3+X_0,\ X_3$	X_4
$2X_4,\ P_3+X_1,\ X_3$	X_4
$2bX_4,\ P_3+X_2,\ X_1+bX_3,\quad b>0$	X_4
$2bX_4,\ P_3+X_0,\ X_1+bX_3,\quad b>0$	X_4
$-2X_4,\ L_3-P_3+\alpha_0X_0,\ X_3,\quad \alpha_0<0$	X_4
$-4X_4,\ P_1+X_2+\gamma X_3,\ P_2-X_1+\mu X_2+\delta X_3,\quad \mu>0,\quad \gamma>0$	X_4
$-4X_4,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1+\mu X_2+\delta X_3,\quad \delta>0$	X_4
$-4X_4,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1+\mu X_2,\quad \mu>0$	X_4
$-4X_4,\ P_1+X_2+\beta X_3,\ P_2-X_1,\quad \beta>0$	X_4
$-4X_4,\ P_1+X_2,\ P_2-X_1$	X_4

Алгебри Лі типу $A_{3,2}$:

$$[e_1,e_3]=e_1,\qquad [e_2,e_3]=e_1+e_2.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,2}$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ і їх інваріантні оператори наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$2a_3X_4,\ P_3,\ G+a_1X_1+a_3X_3,\quad a_1<0,\quad a_3<0$	$X_4\exp\left(\dfrac{-P_3}{2a_3X_4}\right)$
$2a_3X_4,\ P_3,\ G+a_3X_3,\quad a_3<0$	$X_4\exp\left(\dfrac{-P_3}{2a_3X_4}\right)$
$2\dfrac{\alpha_3}{d}X_4,\ P_3,\ G+\dfrac{1}{d}L_3+\dfrac{\alpha_3}{d}X_3,\quad d>0,\quad \alpha_3<0$	$X_4\exp\left(\dfrac{-dP_3}{2\alpha_3X_4}\right)$

Алгебри Лі типу $A_{3,3}$:

$$[e_1,e_3]=e_1,\qquad [e_2,e_3]=e_2.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,3}$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їх інваріантні оператори наведено в табл. 3.

Таблиця 3

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$P_1,\ P_2,\ G$	$\dfrac{P_2}{P_1}$
$P_3,\ X_4,\ G$	$\dfrac{X_4}{P_3}$
$P_3,\ X_4,\ G+\dfrac{1}{d}L_3,\quad d>0$	$\dfrac{X_4}{P_3}$
$P_1,\ P_2,\ G+a_3X_3,\quad a_3<0$	$\dfrac{P_2}{P_1}$
$P_3,\ X_4,\ G+a_1X_1,\quad a_1<0$	$\dfrac{X_4}{P_3}$

Алгебри Лі типу $A_{3,4}$:

$$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2 .$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,4}$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їх інваріантні оператори наведено в табл. 4.

Таблиця 4

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$X_0,\ X_4,\ -G$	$X_0 X_4$
$X_0,\ X_4,\ -G - \frac{1}{e} L_3, \quad e > 0$	$X_0 X_4$
$X_0,\ X_4,\ -G - cX_1, \quad c < 0$	$X_0 X_4$
$X_0,\ X_4,\ -G - \frac{1}{e} L_3 - \frac{æ_3}{e} X_3, \quad e > 0, \quad æ_3 < 0$	$X_0 X_4$

Алгебри Лі типу $A_{3,6}$:

$$[e_1, e_3] = -e_2, \qquad [e_2, e_3] = e_1 .$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,6}$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їх інваріантні оператори наведено в табл. 5.

Таблиця 5

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$-P_1,\ P_2,\ -L_3$	$P_1^2 + P_2^2$
$-P_1,\ P_2,\ P_3 - L_3$	$P_1^2 + P_2^2$
$-X_1,\ X_2,\ P_3 - L_3$	$X_1^2 + X_2^2$
$X_1,\ X_2,\ L_3 + eG, \quad e > 0$	$X_1^2 + X_2^2$
$X_1,\ X_2,\ L_3$	$X_1^2 + X_2^2$
$X_1,\ X_2,\ L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3)$	$X_1^2 + X_2^2$
$X_1,\ -X_2,\ -L_3 - \frac{1}{e}(P_3 + C_3), \quad e > 2$	$X_1^2 + X_2^2$
$X_3,\ X_0 - X_4,\ -\frac{1}{2}(P_3 + C_3) - \frac{e}{2} L_3, \quad e > 0$	$X_3^2 + (X_0 - X_4)^2$
$P_1,\ P_2,\ L_3 + d_3 X_3, \quad d_3 < 0$	$P_1^2 + P_2^2$
$-P_1 - X_1,\ P_2 + X_2,\ P_3 - L_3$	$(P_1 + X_1)^2 + (P_2 + X_2)^2$
$X_1,\ X_2,\ L_3 - P_3 + \alpha_0 X_0, \quad \alpha_0 < 0$	$X_1^2 + X_2^2$
$X_1,\ X_2,\ L_3 + eG + æ_3 X_3, \quad e > 0, \quad æ_3 < 0$	$X_1^2 + X_2^2$
$-X_1,\ X_2,\ -L_3 - \tilde{d}(X_0 + X_4), \quad \tilde{d} < 0$	$X_1^2 + X_2^2$
$-X_1,\ X_2,\ -L_3 - \alpha X_3, \quad \alpha < 0$	$X_1^2 + X_2^2$
$X_1,\ X_2,\ L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3) + \frac{\alpha}{2}(X_0 + X_4), \quad \alpha < 0$	$X_1^2 + X_2^2$
$X_1,\ X_2,\ L_3 + \frac{1}{e}(P_3 + C_3) + \frac{\alpha}{e}(X_0 + X_4), \quad e > 2, \quad \alpha < 0$	$X_1^2 + X_2^2$
$-P_1,\ P_2,\ X_4 - L_3$	$P_1^2 + P_2^2$
$X_1,\ X_2,\ L_3 - X_4$	$X_1^2 + X_2^2$

Алгебри Лі типу $A_{3,7}^a$:

$$[e_1, e_3] = ae_1 - e_2, \qquad [e_2, e_3] = e_1 + ae_2, \qquad a > 0.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,7}^a$ ($a = c$) алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їх інваріантні оператори наведено в табл. 6.

Таблиця 6

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$P_1,\ P_2,\ L_3 + cG, \quad c > 0$	$(P_1^2 + P_2^2)\left(\dfrac{P_1 + iP_2}{P_1 - iP_2}\right)^{ic}$
$P_1,\ P_2,\ L_3 + cG + bX_3, \quad c > 0, \quad b < 0$	$(P_1^2 + P_2^2)\left(\dfrac{P_1 + iP_2}{P_1 - iP_2}\right)^{ic}$

Алгебри Лі типу $A_{3,8}$:

$$[e_1, e_3] = -2e_2, \qquad [e_1, e_2] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = e_3.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,8}$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їх інваріантні оператори наведено в табл. 7.

Таблиця 7

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$-P_3,\ G,\ C_3$	$2G^2 - P_3C_3 - C_3P_3$

Алгебри Лі типу $A_{3,9}$:

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_2, e_3] = e_1, \qquad [e_3, e_1] = e_2.$$

Неспряжені підалгебри типу $A_{3,9}$ алгебри Лі групи $P(1,4)$ та їх інваріантні оператори наведено в табл. 8.

Таблиця 8

Базисні елементи підалгебри	Інваріантні оператори
$L_1,\ L_2,\ L_3$	$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$
$\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{4}(P_1 + C_1),$ $\frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{4}(P_2 + C_2),$ $\frac{1}{2}L_3 + \frac{1}{4}(P_3 + C_3)$	$\left[\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{4}(P_1 + C_1)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{4}(P_2 + C_2)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}L_3 + \frac{1}{4}(P_3 + C_3)\right]^2$

Отже, побудовано інваріантні оператори для всіх неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ розмірності ≤ 3.

1. *Кадышевский В. Г.* Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1980. – **11**, № 1. – С. 5–39.
2. *Мубаракзянов Г. М.* Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 3(34). – С. 99–106.
3. *Мубаракзянов Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 1(32). – С. 114–123.
4. *Федорчук В. М.* Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$. – Киев, 1978. – 36 с. – (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 78.18).
5. *Федорчук В. М.* Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 5. – С. 696–700.

6. *Федорчук В. М.* Об инвариантных операторах нерасщепимых подгрупп обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Теорет.-алгебр. анализ уравнений мат. физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 98–100.
7. *Федорчук В. М.* Об инвариантных операторах расщепимых подгрупп обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Симметрия и решения уравнений мат. физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 90–92.
8. *Федорчук В. М.* Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 6. – С. 717–722.
9. *Федорчук В. М., Фущич В. И.* О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре // Теоретико-групповые методы в физике: Тр. Междунар. семинара (Звенигород, 1979). – Москва: Наука, 1980. – Т. 1. – С. 61–66.
10. *Фущич В. И.* Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I // Теорет. и мат. физика. – 1970. – **4**, № 3. – С. 360–382.
11. *Фущич В. И., Баранник Л. Ф., Баранник А. Ф.* Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.
12. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – Москва: Наука, 1990. – 400 с.
13. *Fushchich W. I., Barannik A. F., Barannik L. F., Fedorchuk V. M.* Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – **18**, No. 14. – P. 2893–2899.
14. *Leveille M.* Casimir invariants for the eight-dimensional subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, No. 11. – P. 3331–3333.
15. *Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H.* Invariants of real low dimension Lie algebras // J. Math. Phys. – 1976. – **17**, No. 6. – P. 986–994.
16. *Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H.* Subgroups of the Poincaré group and their invariants // J. Math. Phys. – 1976. – **17**, No 6. – P. 977–985.

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ОПЕРАТОРАХ НЕСОПРЯЖЕННЫХ ПОДАЛГЕБР МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ $P(1,4)$

Путём классификации несопряженных подалгебр малых размерностей алгебры Ли группы Пуанкаре $P(1,4)$ в классы изоморфных подалгебр построены все инвариантные операторы (обобщенные операторы Казимира) для всех несопряженных подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$ размерности ≤ 3, а также для большинства несопряженных подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$ размерностей 4 и 5. Представлены инвариантные операторы для всех несопряженных подалгебр алгебры Ли группы $P(1,4)$ размерностей ≤ 3.

ON INVARIANT OPERATORS OF LOW-MEASURABLE NON-CONJUGATED LIE ALGEBRA'S SUB-ALGEBRA OF POINCARE GROUP $P(1,4)$

By classification of low-measurable non-conjugated Lie algebra's sub-algebras of Poincare group $P(1,4)$ in the class of isomorphic sub-algebras we have constructed all invariant operators (the Kazimir generalized operators) for all non-conjugated Lie algebra's sub-algebras for group $P(1,4)$ of dimension ≤ 3 and also for majority of non-conjugated Lie algebra's sub-algebras for group $P(1,4)$ of dimension 4 and 5. The invariant operators for all non-conjugated Lie algebra's sub-algebras for group $P(1,4)$ of dimension ≤ 3 have been presented.

[1] Ін-т математики, Педаг. акад. ім. Комісії Нар. Освіти, Краків, Польща,

[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 12.09.06