УДК 539.3

В. К. Опанасович, М. С. Слободян

ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ДВОМА РІВНИМИ СПІВВІСНИМИ НАСКРІЗНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХ БЕРЕГІВ І ЗА НАЯВНОСТІ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН БІЛЯ ЇХ ВЕРШИН

Сформульовано і розв'язано задачу про двовісний згин розподіленими згинальними моментами на нескінченності ізотропної пластини зі співвісними тріщинами однакової довжини за симетричного по відношенню до них зовнішнього навантаження з урахуванням зони контакту їх берегів та за наявності біля їх вершин пластичних зон, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніра. З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі та класичної теорії згину пластин отримано аналітичний розв'язок задачі у класі функцій, обмежених в поблизу вершин пластичних зон. Визначено чисельно довжину пластичних зон і розкриття берегів тріщин біля їх вершин.

Вступ. В інженерній практиці широко використовують пластинчасті елементи, в яких у процесі експлуатації можуть виникнути тріщини, які значно зменшують міцність конструкційного елемента. Дослідженням згину пластин з тріщинами без урахування контакту їх берегів займалось багато дослідників, що відображено у монографіях [1, 5–7, 15–17]. При цьому у [5, 6] враховано наявність пластичних зон біля їх вершин. З фізичних міркувань зрозуміло, що береги тріщин за згину будуть контактувати: у працях [2–4, 18–21, 23–26, 28] вважається, що контакт відбувається по лінії, а у [9, 10, 12, 13, 22, 27] по області постійної ширини. Відмітимо, що лише у публікаціях [11, 14] враховано наявність пластичних зон біля вершин наскрізної прямолінійної тріщини.

У цій роботі з використанням апарату теорії функцій комплексної змінної і комплексних потенціалів плоскої задачі та класичної теорії згину пластин досліджено задачу двовісного згину ізотропної пластини розподіленими згинальними моментами на нескінченності з наскрізними співвісними тріщинами однакової довжини, береги яких приходять у гладкий контакт по області постійної ширини поблизу однієї з основ пластини, а біля вершин тріщин наявні пластичні зони, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару чи пластичного шарніра [5, 6]. Отримано аналітичний розв'язок задачі в класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон. Числово визначено довжини пластичних зон та розкриття берегів тріщин біля їх вершин.

Формулювання задачі. Розглянемо ізотропну пластину завтовшки $2h$ з двома рівними за довжиною співвісними тріщинами завдовжки 2ℓ. Пластина згинається розподіленими моментами на нескінченності, вектори яких паралельні між собою і перпендикулярні до тріщин. Припускаємо, що під дією зовнішнього навантаження береги тріщин гладко контактують по області постійної ширини h_1 [9] уздовж тріщин, а біля їх вершин наявні пластичні зони, де виконується умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару [5, 6]. За рахунок контакту берегів тріщин розв'язок задачі подаємо у вигляді суперпозиції розв'язків двох задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину з використанням класичної теорії згину пластин. У серединній площині пластини виберемо декартову систему координат $Oxy\tilde{z}$ з початком посередині між центрами тріщин, направивши вісь Ox уздовж тріщин. Лінії дійсної осі, де розміщені тріщини, позначимо через L_{0j}, внутрішні пластичні зони – через L_{2j}, зовнішні – через L_{1j}, довжини

зовнішніх пластичних зон тріщин – через Δ_1, внутрішніх – через Δ_2, координати вершин тріщин – через a, b і $-a$, $-b$, кінці пластичних зон – через c, d і $-c$, $-d$ (див. рис. 1, де наведено схему навантаження пластини та розміщення тріщин). Крім того, введемо позначення: $L = L_{01} \cup L_{02}$, $L_j = L_{j,j} \cup L_{j,3-j}$, $\tilde{L}_j = L_{0j} \cup L_{1j} \cup L_{2j}$, $\tilde{L} = \tilde{L}_1 \cup \tilde{L}_2$, $LL = L_1 \cup L_2$ (тут і надалі $j = 1,2$).

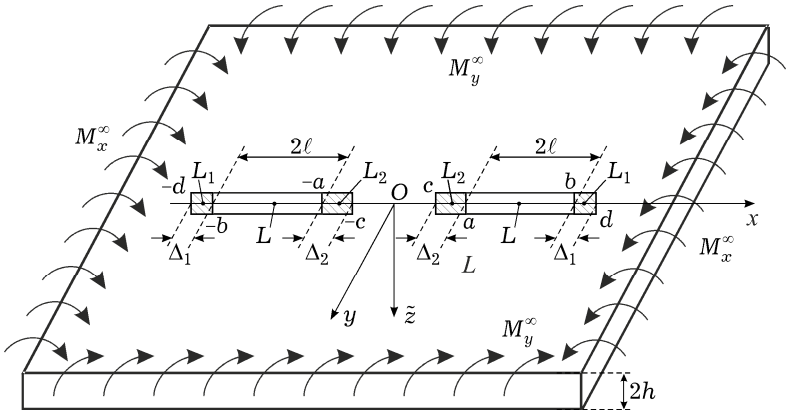


Рис. 1

Згідно з формулюванням задачі маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{yy}^{\pm} = \sigma_0, \qquad M_y^{\pm} = M_0, \qquad x \in LL, \tag{1}$$

$$\sigma_{yy}^{\pm} = -N/(2h), \quad M_y^{\pm} = \beta h N, \quad [v] + \alpha h [\partial_y w] = 0, \quad x \in L, \tag{2}$$

$$\sigma_{xy}^{\pm} = 0, \qquad P_y^{\pm} = 0, \qquad x \in \tilde{L}, \tag{3}$$

де σ_{yy} і σ_{xy} та u і v – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщення на осі Ox і Oy у плоскій задачі; σ_0 і M_0 – нормальне напруження і згинальний момент, відповідно, у пластичних зонах – шукані величини; N – контактне зусилля $(N > 0)$; w – прогин пластини; M_y і P_y – згинальний момент і перерізувальна сила у сенсі Кірхгофа; індексами «$\pm$» позначено граничні значення відповідних величин при $y \to \pm 0$, $[f] = f^+ - f^-$; константи α і β мають вигляд [9]

$$\alpha = 0.5\{1 + (1-\gamma)^2\}, \qquad \beta = 1 - \gamma/3, \qquad \gamma = h_1/h. \tag{4}$$

Побудова розв'язку задачі. Введемо комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ плоскої задачі, а також класичної теорії згину пластин $\Phi_B(z)$ і $\Omega_B(z)$ [8, 16]:

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\overline{z}) + (z - \overline{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{5}$$

$$2\mu\partial_x(u + iv) = \varkappa\Phi(z) - \Omega(\overline{z}) - (z - \overline{z})\Phi'(z), \tag{6}$$

$$\partial_x g = \Phi_B(z) - \Omega_B(\overline{z}) + (z - \overline{z})\Phi_B'(z), \tag{7}$$

$$f = \tilde{\varkappa}\Phi_B(z) + \Omega_B(\overline{z}) - (z - \overline{z})\overline{\Phi_B'(z)}, \tag{8}$$

де $\mu = 0.5E/(1+\nu)$ – модуль зсуву, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини,

$$z = x + iy, \qquad i^2 = -1, \qquad \varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \qquad \tilde{\varkappa} = \frac{3+\nu}{1-\nu},$$

$$g = \partial_x w + i\partial_y w, \qquad f(x) = \left(M_y + ic' + i\int_0^x P(\varepsilon)\,d\varepsilon \right)\frac{1}{m},$$

$$m = -D(1-\nu), \qquad \partial_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \tag{9}$$

c' – невідома дійсна стала, $D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$ – циліндрична жорсткість пластини.

Введені комплексні потенціали при великих $|z|$ подамо у вигляді [8, 16]

$$\Phi(z) = O(1/z^2), \qquad \Omega(z) = O(1/z^2),$$

$$\Phi_{\text{B}}(z) = \tilde{\Gamma} + O(1/z^2), \qquad \Omega_{\text{B}}(z) = -\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}' + O(1/z^2), \tag{10}$$

де

$$\tilde{\Gamma} = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)}, \qquad \tilde{\Gamma}' = \frac{M_x^\infty - M_y^\infty}{2m},$$

M_x^∞ і M_y^∞ – згинальні розподілені моменти на нескінченності.

Виходячи з крайових умов (1)–(3), запишемо такі рівності:

$$\left(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}\right)^+ - \left(\sigma_{yy} - i\sigma_{xy}\right)^- = 0, \qquad x \in \tilde{L},$$

$$\left(M_y + ic_j' + i\int_0^x P_y(\varepsilon)\,d\varepsilon \right)^+ - \left(M_y + ic_j' + i\int_0^x P_y(\varepsilon)\,d\varepsilon \right)^- = 0, \quad x \in \tilde{L}_j, \tag{11}$$

де c_j' – невідомі дійсні сталі, $j = 1, 2$.

Якщо врахувати (5) і (8), то крайові умови (11) набудуть вигляду

$$\left(\Phi(x) - \Omega(x)\right)^+ - \left(\Phi(x) - \Omega(x)\right)^- = 0, \qquad x \in \tilde{L},$$

$$\left(\tilde{\varkappa}\Phi_{\text{B}}(x) - \Omega_{\text{B}}(x)\right)^+ - \left(\tilde{\varkappa}\Phi_{\text{B}}(x) - \Omega_{\text{B}}(x)\right)^- = 0, \qquad x \in \tilde{L}. \tag{12}$$

Врахувавши (10) і розв'язавши задачі лінійного спряження (12), одержимо

$$\Omega(z) = \Phi(z), \qquad \Omega_{\text{B}}(z) = \tilde{\varkappa}\Phi_{\text{B}}(z) - (\tilde{\varkappa}+1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'. \tag{13}$$

З огляду на крайові умови (1) і (13) на основі (5) і (8) запишемо

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \sigma_0, \qquad x \in LL, \tag{14}$$

$$-ic_j' + m\left\{\tilde{\varkappa}\left(\Phi_{\text{B}}^+(x) + \Phi_{\text{B}}^-(x)\right) - (\tilde{\varkappa}+1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'\right\} = M_0, \qquad x \in L_j. \tag{15}$$

Введемо функцію

$$F(z) = -2\beta h^2\Phi(z) - m\tilde{\varkappa}\Phi_{\text{B}}(z) + 0.5\left\{ic_1' + m\left((\tilde{\varkappa}+1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}'\right)\right\}. \tag{16}$$

Тоді з (14) і (15) випливає, що функція F задовольняє крайові умови

$$F^+(x) + F^-(x) = a_1, \qquad x \in L_1,$$

$$F^+(x) + F^-(x) = a_1 + ic_2, \qquad x \in L_2, \tag{17}$$

де

$$a_1 = -2h^2\beta\sigma_0 - M_0, \qquad c_2 = c_1' - c_2'. \tag{18}$$

З крайових умов (2) і (3), врахувавши (5), (8), (9) та залежності (13), маємо

$$N = -2h\left(\Phi^+(x) + \Phi^-(x)\right), \qquad x \in L,$$

$$M_y = -ic_j' + m\left\{\tilde{\varkappa}\left(\Phi_{\text{B}}^+(x) + \Phi_{\text{B}}^-(x)\right) - (\tilde{\varkappa}+1)\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}'\right\}, \qquad x \in L_{0j}. \tag{19}$$

Підставляючи (19) у другу з крайових умов (2) і беручи до уваги (16), одержимо

$$F^+(x) + F^-(x) = \begin{cases} 0, & x \in L_{01}, \\ ic_2, & x \in L_{02}. \end{cases} \tag{20}$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (17) і (20) у класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон, запишемо як

$$F(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i}\left\{ic_2 \int\limits_{\tilde{L}_2} \frac{dt}{X_1^+(t)(t-z)} + a_1 \int\limits_{LL} \frac{dt}{X_1^+(t)(t-z)}\right\}, \tag{21}$$

де

$$X_1(z) = \sqrt{(z^2 - c^2)(z^2 - d^2)}\,. \tag{22}$$

Як випливає з (10) і (16), функцію $F(z)$ при великих $|z|$ можемо подати у вигляді

$$F(z) = \frac{ic_1' - M_y^\infty}{2} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{23}$$

Якщо розвинути праву частину (21) у ряд при великих $|z|$ і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях, враховуючи (23), то після перетворень отримаємо

$$c_1' = 0, \qquad c_2 = 0\,, \tag{24}$$

$$\frac{\pi\left(M_y^\infty + a_1\right)}{a_1} = \arcsin\frac{d^2 + c^2 - 2a^2}{d^2 - c^2} - \arcsin\frac{d^2 + c^2 - 2b^2}{d^2 - c^2}.$$

З крайових умов (3), врахувавши (5), (8), (9), (13), (24), одержимо

$$\left(\Phi(x) - \bar{\Phi}(x)\right)^+ + \left(\Phi(x) - \bar{\Phi}(x)\right)^- = 0, \qquad x \in \tilde{L}\,,$$

$$\left(\Phi_{\text{B}}(x) - \bar{\Phi}_{\text{B}}(x)\right)^+ + \left(\Phi_{\text{B}}(x) - \bar{\Phi}_{\text{B}}(x)\right)^- = 0, \quad x \in \tilde{L}\,. \tag{25}$$

Розв'язок задачі лінійного спряження (25) у класі функцій, обмежених у вершинах пластичних зон, з урахуванням поведінки (10) на нескінченності функцій $\Phi(z)$ і $\Phi_{\text{B}}(z)$ запишемо як

$$\bar{\Phi}(z) = \Phi(z), \qquad \bar{\Phi}_{\text{B}}(z) = \Phi_{\text{B}}(z). \tag{26}$$

На основі третьої з крайових умов (2), врахувавши (6), (7), (13) і (26), одержимо

$$\left(\delta\Phi(x) + 2\Phi_{\text{B}}(x)\right)^+ - \left(\delta\Phi(x) + 2\Phi_{\text{B}}(x)\right)^- = 0, \qquad x \in L\,, \tag{27}$$

де

$$\delta = \frac{\varkappa + 1}{\alpha\mu h(1 + \tilde{\varkappa})}\,.$$

Використавши формули (14) і (15) та врахувавши (24) і (26), запишемо

$$\left(\delta\Phi(x) + 2\Phi_{\text{B}}(x)\right)^+ + \left(\delta\Phi(x) + 2\Phi_{\text{B}}(x)\right)^- = A, \qquad x \in LL\,, \tag{28}$$

де

$$A = \delta\sigma_0 + 2\left\{M_0/m + (\tilde{\varkappa} + 1)\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}'\right\}\frac{1}{\tilde{\varkappa}}\,.$$

Задачі лінійного спряження (27) і (28) подамо так:

$$\left[\delta\Phi(z) + 2\Phi_{\text{B}}(z) - A/2\right]^+ + \left[\delta\Phi(z) + 2\Phi_{\text{B}}(z) - A/2\right]^- = 0, \quad x \in LL\,,$$

$$\left[\delta\Phi(z) + 2\Phi_{\text{B}}(z) - A/2\right]^+ - \left[\delta\Phi(z) + 2\Phi_{\text{B}}(z) - A/2\right]^- = 0, \quad x \in L\,. \tag{29}$$

Розв'язавши задачі лінійного спряження (29) у класі функцій, обмеже-

них на кінцях ліній LL, одержимо

$$\delta\Phi(z) + 2\Phi_{\text{B}}(z) - A/2 = 0. \tag{30}$$

Врахувавши розвинення (10) на нескінченності, на основі (30) одержимо

$$A = 4\Gamma$$

або

$$\delta\sigma_0 + 2\frac{M_0}{m\tilde{\varkappa}} = 2\frac{M_y^{\infty}}{m\tilde{\varkappa}}. \tag{31}$$

Тоді вирази для $\Phi(z)$ і $\Phi_{\text{B}}(z)$ запишемо як розв'язок системи алгебраїчних рівнянь (30), (16):

$$\Phi_{\text{B}}(z) = c_3 + c_4F(z), \qquad \Phi(z) = c_5 + c_6F(z), \tag{32}$$

де

$$c_3 = -(\beta h^2A + \delta B)c_6/2, \qquad c_4 = -\delta c_6/2,$$

$$c_5 = (Am\tilde{\varkappa} + 4B)c_6/4, \qquad c_6 = 2/(m\tilde{\varkappa}\delta - 4\beta h^2).$$

Умова однозначності переміщень і умова однозначності кутів повороту у задачі згину при обході контуру першої тріщини набуде вигляду

$$\int_{\tilde{L}_1} \left(F^+(x) - F^-(x)\right)dx = 0,$$

з якої, врахувавши вираз (21) для функції $F(z)$, після відповідних перетворень отримаємо

$$d\ln\frac{d^2-a^2}{d^2-b^2} + c\ln\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2} + a\ln\frac{(d+a)(a-c)}{(c+a)(d-a)} + b\ln\frac{(b+c)(d-b)}{(b+d)(b-c)} + \int_c^d \tilde{f}(x)\,dx = 0, \tag{33}$$

де

$$\tilde{f}(x) = 2\ln\frac{\sqrt{(d^2-x^2)(b^2-c^2)} + \sqrt{(x^2-c^2)(d^2-b^2)}}{\sqrt{(x^2-c^2)(d^2-a^2)} + \sqrt{(d^2-x^2)(a^2-c^2)}}.$$

Для знаходження σ_0 і M_0 скористаємося спочатку умовою пластичності Треска у вигляді поверхневого шару на нижній основі пластини [6]

$$\sigma_0 + 3M_0/(2h^2) = \sigma_{\text{Y}}, \tag{34}$$

де σ_{Y} – границя текучості матеріалу пластини.

Розв'язавши систему рівнянь (31), (34) відносно σ_0 і M_0, матимемо

$$\tilde{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_{\text{Y}}} = \frac{4(1-\tilde{\sigma})}{4+\tilde{\gamma}}, \qquad \tilde{M}_0 = \frac{3M_0}{2h^2\sigma_{\text{Y}}} = \frac{4\tilde{\sigma}+\tilde{\gamma}}{4+\tilde{\gamma}}, \tag{35}$$

де

$$\tilde{\sigma} = \frac{3M_y^{\infty}}{2h^2\sigma_{\text{Y}}}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{4(3+\nu)}{\alpha(1+\nu)}.$$

Якщо ж скористатись умовою пластичного шарніра [5, 6]

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{\text{Y}}}\right)^2 + \frac{M_0}{h^2\sigma_{\text{Y}}} = 1, \tag{36}$$

тоді маємо

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{\left(\frac{\tilde{\gamma}}{12}\right)^2 + \rho} - \frac{\tilde{\gamma}}{12}, \qquad \tilde{M}_0 = \tilde{\sigma} + \frac{\tilde{\gamma}}{4}\tilde{\sigma}_0. \tag{37}$$

Останню із залежностей (24) перепишемо так:

$$\frac{\pi\tilde{\sigma}}{\tilde{M}_0 + 3\beta\tilde{\sigma}_0} = \pi + \arcsin\frac{d^2 + c^2 - 2b^2}{d^2 - c^2} - \arcsin\frac{d^2 + c^2 - 2a^2}{d^2 - c^2}. \tag{38}$$

Отже, для знаходження довжини пластичних зон Δ_j біля вершин тріщин маємо систему рівнянь (33), (38).

Розкриття тріщин на нижній основі пластини у їх вершинах визначаємо за формулами

$$\delta_1 = \int_c^a \frac{\partial}{\partial x}\left([v] + [v_{\text{B}}]\right) dx\, dx, \qquad \delta_2 = \int_d^b \frac{\partial}{\partial x}\left([v] + [v_{\text{B}}]\right) dx\,,$$

які після перетворень набудуть вигляду

$$\delta_{1P} = \frac{\delta_1 E}{\ell\sigma_{\text{Y}}} = \tilde{m}\left\{(a-c)\ln\frac{2a(a-c)}{b^2 - a^2} + (a+c)\ln\frac{2a}{a+c} + \right.$$

$$\left. + (b-c)\ln\frac{b-a}{b-c} - (b+c)\ln\frac{b+a}{b+c} + \int_c^a \tilde{f}(x)\, dx\right\},$$

$$\delta_{2P} = \frac{\delta_2 E}{\ell\sigma_{\text{Y}}} = -\tilde{m}\left\{\int_b^d \tilde{f}(x)\, dx + (d-b)\ln\frac{d^2 - a^2}{d^2 - b^2} + (b-a)\ln\frac{d-a}{b-a} + \right.$$

$$\left. + (b+a)\ln\frac{d+a}{b+a} - 2b\ln\frac{d+b}{2b}\right\}.$$

Числовий аналіз і висновки. Розрахунки виконано для задачі з $\nu = 0.3$ і $\gamma = h_1/h = 0.13$. Результати обчислень наведено на рис. 2, 3. Криві *1–3* побудовано при $\tilde{\sigma} = 0.3,\ 0.5,\ 0.7$. Суцільні криві відповідають випадку використання умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару, а штрихові – з використанням умови пластичного шарніра.

На рис. 2 наведено залежності безрозмірних довжин пластичних зон $\Delta_j^* = \Delta_j/\ell$, $j = 1, 2$, біля ближньої (рис. 2*а*) і дальньої (рис. 2*б*) вершин тріщини від відносної відстані між тріщинами a/ℓ. При віддаленні тріщин одна від одної довжини пластичних зон зменшуються і прямують до випадку однієї тріщин.

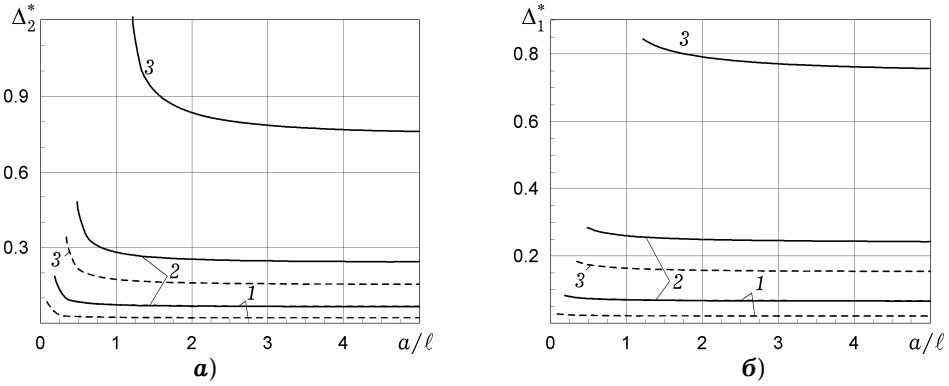
На рис. 3 показано залежності розкриття берегів тріщини $\delta_j^* = \dfrac{\delta_j E}{\ell\sigma_{\text{Y}}}$, $j = 1, 2$, на нижній основі пластини у ближній (рис. 3*а*) і дальній (рис. 3*б*) вершинах тріщини від відносної відстані між тріщинами a/ℓ.

Числовий аналіз показав (див. табл. 1), що при $a/\ell < a^*$ внутрішні пластичні зони зіллються. Тут a^* – відносна відстань між тріщинами, коли пластичні зони зливаються.

Таблиця 1

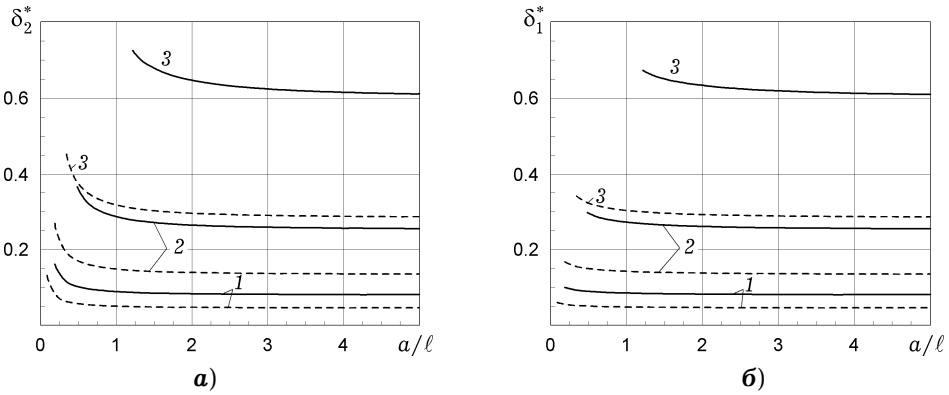
	a^*	
$\tilde{\sigma}$	Умова пластичності Треска у вигляді поверхневого шару	Умова пластичного шарніра
0.3	0.1876	0.0872
0.5	0.4852	0.1879
0.7	1.2178	0.3435

Довжина пластичної зони біля вершин тріщини та розходження берегів тріщини на нижній основі пластини визначені з використанням умови пластичності у вигляді поверхневого шару є більшими ніж з використанням умови пластичності у вигляді пластичного шарніра при однакових значеннях $\tilde{\sigma}$.



а) **б)**

Рис. 2



а) **б)**

Рис. 3

1. *Бережницкий Л. Т., Делявский М. В., Панасюк В. В.* Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. *Божидарнік В. В., Опанасович В. К., Герасимчук П. В.* Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Проблемы прочности. – 2006. – № 5 (383). – С. 135–141.
   Те саме: *Bozhidarnik V. V., Opanasovich V. K., Gerasimchuk P. V.* Bilateral bending of a plate with nonsymmetric through-thickness arc crack with allowance for the contact of its edges // Strength Mater. – 2006. – **38**, No. 5. – P. 548–553.
3. *Божидарнік В. В., Опанасович В. К., Герасимчук П. В.* Згин пластини з двома рівними симетричними тріщинами по дузі кола з урахуванням контакту їх берегів // Механічна втома матеріалів: Праці 13-го міжнар. колоквіуму. – Тернопіль: Терноп. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2006. – С. 450–455.
4. *Божидарнік В., Опанасович В., Герасимчук П.* Згин ізотропної пластини, ослабленої розрізом по дузі кола з контактуючими берегами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 7–16.
5. *Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М.* Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. – Львів: Сполом, 2007. – 320 с.
6. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружнопластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
7. *Мазурак Л. П., Бережницкий Л. Т.* Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин. – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.

9. *Опанасович В. К.* Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь // Наук. нотатки Луцьк. техн. ун-ту. – 2007. – Вип. 20 (том 2). – С. 123–127.
10. *Опанасович В. К., Яцик І. М., Сулим Г. Т.* Згин зосередженими моментами пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 4. – С. 71–81.
    Те саме: *Opanasovych V. K., Yatsyk I. M., Sulym H. T.* Bending of Reissner's plate containing a through-the-thickness crack by concentrated moments taking into account the width of a contact zone of its faces // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No. 5. – P. 620–634.
11. *Опанасович В.* Двосторонній згин ізотропної пластини з прямолінійною наскрізною тріщиною з урахуванням контакту її берегів та пластичних зон у її вершинах // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3 т. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2013. – Т. 2. – с. 83–85.
12. *Опанасович В., Дорош М.* Згин розподіленими моментами на нескінченності ізотропної пластини з періодичною системою колінеарних наскрізних тріщин з урахуванням контакту берегів тріщин // Тез. доп. 7-го укр.-польськ. наук. симп. «Актуальні задачі механіки неоднорідних структур». – Львів, 2007. – С. 75–76.
13. *Опанасович В., Дорош М.* Комбінований згин з розтягом пластини, ослабленої двома колінеарними тріщинами, береги яких контактують // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 194–206.
14. *Опанасович В., Слободян М.* Згин ізотропної пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту їх берегів за наявності пластичних зон у її вершинах // Зб. наук. праць 5-ї Міжнар. конф. «Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій» (24–27 червня, Львів, 2014) / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фіз.-мех. Ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2014. – С. 403–408.
15. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
16. *Прусов И. А.* Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
17. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 324 с.
18. *Шацкий И. П.* Изгиб пластины, содержащей периодическую систему параллельных разрезов с контактирующими кромками // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 12. – С. 56–61.
    Те саме: *Shatskii I. P.* Bending of a plate containing a periodic system of parallel slits with contacting edges // Soviet Appl. Mech. – 1991. – **27**, No. 12. – P. 1186–1190.
19. *Шацький І. П.* Гранична рівновага пластинки з колінеарними тріщинами при комбінованому розтязі та згині // Доп. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 62–64.
20. *Шацький І., Даляк Т.* Взаємовплив паралельних тріщин з берегами, які контактують, при згині пластин // Машинознавство. – 2000. – № 1. – С. 27–30.
21. *Шацький І., Маковійчук М.* Змикання берегів колінеарних тріщин при згині пластини на пружній основі // Машинознавство. – 2004. – № 6. – С. 10–12.
22. *Dempsey J. P., Shektman I. I., Slepyan L. L.* Closure of a through crack in a plate under bending // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**, No. 31-32. – P. 4077–4089.
23. *Heming F. S.* (*Jr.*) Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate // Int. J. Fract. – 1980. – **16**, No. 4. – P. 289–304.
24. *Hui C. Y., Zehnder Alan T.* A theory for the fracture of thin plates subjected to bending and twisting moments // Int. J. Fract. – 1993. – **61**, No. 3. – P. 211–229.
25. *Hui C. Y., Zehnder Alan T., Potdar Y. K.* Williams meets von Karman: Mode coupling and nonlinearity in the fracture of thin plates // Int. J. Fract. – 1998. – **93**, No. 1-4. – P. 409–429.
26. *Jones D. P., Swedlow J. L.* The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate // Int. J. Fract. – 1975. – **11**, No. 6. – P. 897–914.
27. *Slepyan L. I., Dempsey J. P., Shekhtman I. I.* Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending // J. Mech. Phys. Solids. – 1995. – **43**, No. 11. – P. 1727–1749.
28. *Young M. J., Sun C. T.* Cracked plates subjected to out-of-plane tearing loads // Int. J. Fract. – 1993. – **60**, No. 1. – P. 1–18.

ИЗГИБ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ РАВНЫМИ СООСНЫМИ СКВОЗНЫМИ ТРЕЩИНАМИ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ ОБЛАСТИ КОНТАКТА ИХ БЕРЕГОВ И ПРИ НАЛИЧИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН ОКОЛО ИХ ВЕРШИН

Сформулирована и решена задача о двухосном изгибе распределенными изгибными моментами на бесконечности изотропной пластины с двумя равными соосными сквозными трещинами при симметричном относительно к ним внешнем нагружении с учетом зоны контакта их берегов при наличии около их вершин пластических зон, где выполняются условия пластичности Треска в виде поверхностного слоя или пластического шарнира. С использованием комплексных потенциалов плоской задачи и классической теории изгиба пластин получено аналитическое решение задачи в классе функций, ограниченных возле вершин пластических зон. Определены численно длина пластических зон и раскрытие берегов трещин около их вершин.

BENDING ISOTROPIC PLATE WITH TWO EQUAL COAXIAL THROUGH-THICKNESS CRACKS WITH ACCOUNTING THE WIDTH OF A CONTACT ZONE OF ITS FACES AND IN THE PRESENCE OF PLASTIC ZONES NEAR ITS TIPS

The problem on biaxial bending of an isotropic plate with two through-thickness equal cracks by distributed bending moments at infinity is formulated and solved. The plate is under action of external loading symmetric with respect to cracks. The contact zones of faces of the cracks are taken into account, and the plastic zones are formed near its tips. In plastic zones the Tresca yield conditions in the form of a surface layer or a plastic hinge are satisfied. Using the complex potentials of plane problem and classic theory of bending of plates the analytic solution of the problem in the class of function bounded in the vicinity of plastic zones is determined. The lengths of the plastic zones and the crack opening displacements near its tips are found numerically.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
04.12.14