

ЕНЕРГІЯ ВНУТРІШНІХ І ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬОВИХ РУХІВ У ДВОШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ

Досліджується енергія хвильового руху у двошаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею». Проаналізовано залежності енергії поверхневого та внутрішнього хвильового руху від геометричних та фізичних параметрів досліджуваної системи. Оцінено внесок врахування другого наближення при дослідженні повної енергії системи. Виконано перевірку достовірності отриманих результатів. Результати проілюстровано графічно.

Вступ. У сучасній гідромеханіці експериментальні та теоретичні дослідження хвильових процесів у різного типу рідинах є актуальними та практично важливими.

Аналіз поширення хвиль-вбивць і хвиль типу цунамі виконано С. Ф. Доценком зі співавторами. Зокрема, у роботі [3] на основі даних спостережень у північно-західній частині Чорного моря проведено аналіз аномальних вітрових хвиль (хвиль-убивць). У [4] в рамках нелінійної теорії методом скінченних різниць виконано аналіз розповсюдження хвиль цунамі з басейну в прямолінійний канал сталого прямокутного поперечного перерізу. Виявлено, що максимальна висота хвиль у каналі реалізується для осередків цунамі, розташованих на материковому схилі навпроти входу в канал.

У [5, 6] експериментально досліджено профілі стоячих гравітаційних двовимірних хвиль. Показано, що для таких хвиль існує система вторинних циркуляційних течій, які охоплюють всю товщину рідини.

Наведемо деякі результати недавніх досліджень. У [23] доведено виникнення вертикальних вібрацій при взаємодії верхньої рідини з нижнім селевим потоком. Ці вібрації обумовлені генеруванням внутрішніх хвиль в пікнокліні. У роботі [7] в рамках другого наближення теорії мілкої води досліджується поширення внутрішніх хвиль у двошаровій рідині, яка обмежена зверху і знизу. У [17] в рамках капілярно-гравітаційної постановки досліджується поширення двох хвильових пакетів хвиль різної довжини в одному напрямку. Експериментальне дослідження поширення хвиль у двошаровій рідині подано в [16]. Хвилі генеруються розрідженням зверху, що призводить до формування струменя уздовж дна. У [22] представлено експерименти з поширення хвиль у двошаровій рідині з урахуванням скінченної товщини поверхні контакту. У [18] отримано аналітичні розв'язки задачі про поширення хвиль у кусково-сталій двошаровій рідині, обмеженій зверху і знизу жорсткими границями.

Невід'ємною складовою таких досліджень є вивчення та аналіз енергетичних характеристик розглянутих систем, оскільки використання енергії хвильового руху в рідинах є одним із напрямків сучасних досліджень в області альтернативних джерел енергії.

У [13] розглядається модель трансформації довгих внутрішніх хвиль у горизонтально-неоднорідному океані, побудована на рівнянні Гарднера. Показано, що така модель застосовна для грубих оцінок амплітуди і форми внутрішньої хвилі.

У [15] розглядаються аномально великі поверхневі хвилі в океані. Наведено результати обчислювальних експериментів для оцінки коефіцієнтів концентрації енергії та імпульсу цих хвиль. Отримані результати можуть бути використані для оцінки ризику небезпечного впливу хвиль-убивць.

У роботах [4, 21] розглядаються чисельне та експериментальне дослідження різного типу перетворювачів енергії океанічних хвиль. Проаналізовано різні підходи до обчислення енергії хвильового руху.

Найфе [20] використовував метод багатомасштабних розвинень для виведення пари диференціальних рівнянь із частинними похідними, які описують еволюцію хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні контакту двох напівнескінчених рідин з різними густинами з урахуванням ефекту поверхневого натягу. В результаті отримано два альтернативні нелінійні рівняння Шредінгера і досліджено стійкість хвильових пакетів скінченної амплітуди.

Аналогічна задача про поширення хвильових пакетів на поверхні контакту рідкого півпростору і рідкого шару над ним вивчалась у [2], де досліджувалась проблема стійкості хвильових пакетів у системі «шар – півпростір» методом багатомасштабних розвинень до третього порядку [8]. У статтях, опублікованих останнім часом, розглянуто також різні аспекти четвертого наближення проблеми еволюції нелінійних хвильових пакетів [9]. Крім цього, виведено еволюційне рівняння для хвильових чисел, близьких до критичного [2], досліджено стійкість розв'язків вказаних рівнянь [8]. Області резонансу другої гармоніки, напрямок поширення хвиль, форма хвильового пакету в системі «шар – півпростір» описано у статті [10].

Ця робота присвячена дослідженню енергії внутрішніх і поверхневих хвильових рухів у гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею».

1. Постановка задачі та метод дослідження. Дослідимо задачу про поширення двовимірних хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні рідкого шару $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$ з густиною ρ_1 та верхнього рідкого шару $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ з густиною ρ_2 . Шари розділені поверхнею контакту $z = \eta(x, t)$, а верхній шар обмежений вільною поверхнею $z = \eta_0(x, t)$. При розв'язуванні враховуємо силу поверхневого натягу на поверхні контакту та на вільній поверхні. Сила тяжіння спрямована перпендикулярно до поверхні поділу у від'ємному z -напрямку, рідини вважаємо нестисливими.

Математична постановка задачі у безрозмірному вигляді має вигляд

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_j &= 0 && \text{в} && \Omega_j, \\ \eta_{,t} - \varphi_{j,z} &= -\alpha \varphi_{j,x} \eta_{,x} && \text{на} && z = \alpha \eta(x, t), \quad j = 1, 2, \\ \eta_{0,t} - \varphi_{2,z} &= -\alpha \varphi_{2,x} \eta_{0,x} && \text{на} && z = \alpha \eta_0(x, t), \\ \varphi_{1,t} - \rho \varphi_{2,t} + (1 - \rho) \eta + 0.5 \alpha [(\nabla \varphi_1)^2 - \rho (\nabla \varphi_2)^2] - \\ & - T(1 + \alpha^2 \eta_{,x}^2)^{-3/2} \eta_{,xx} &= 0 && \text{на} && z = \alpha \eta(x, t), \\ \varphi_{2,t} + \eta_0 + 0.5 \alpha (\nabla \varphi_2)^2 - T_0 (1 + \alpha^2 \eta_{0,x}^2)^{-3/2} \eta_{0,xx} &= 0 \\ & && \text{на} && z = \alpha \eta_0(x, t), \\ \varphi_{1,z} &= 0, && z &= &-h_1, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\rho = \rho_2/\rho_1$ – відношення густин верхнього і нижнього шарів; $\alpha = a/L$ – коефіцієнт нелінійності, a – максимальне відхилення вільної поверхні, L – характерна довжина; φ_j – потенціал швидкості в області Ω_j ; T і T_0 – коефіцієнти поверхневого натягу на поверхні контакту та на вільній поверхні, відповідно.

Для визначення наближеного розв'язку задачі (1) для малих, але скінченних, амплітуд застосуємо метод багатомасштабних розвинень до третього порядку:

$$\begin{aligned}
\eta(x, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \\
\eta_0(x, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{0n}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \\
\varphi_j(x, z, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Тут $x_j = \alpha^j x$, $t_j = \alpha^j t$ – масштабні змінні. Підстановка (2) в (1) приводить до трьох наближень досліджуваної системи [1, 11]. Перше наближення має вигляд

$$\begin{aligned}
\varphi_{j1, x_0 x_0} + \varphi_{j1, z z} &= 0 && \text{в} && \Omega_j, \\
\eta_{1, t_0} - \varphi_{j1, z} &= 0 && \text{на} && z = 0, \\
\eta_{01, t_0} - \varphi_{21, z} &= 0 && \text{на} && z = h_2, \\
\varphi_{11, t_0} - \rho \varphi_{21, t_0} + (1 - \rho) \eta_1 - T \eta_{1, x_0 x_0} &= 0 && \text{на} && z = 0, \\
\varphi_{21, t_0} + \eta_{01} - T_0 \eta_{01, x_0 x_0} &= 0 && \text{на} && z = h_2, \\
\varphi_{11, z} &= 0 && \text{на} && z = -h_1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Аналіз розв'язків першого наближення детально проведено в [11].

2. Розв'язки першого та другого наближень. Під час дослідження першої лінійної задачі (3) було отримано дисперсійне співвідношення

$$\omega^2 \operatorname{cth}(kh_1) + \rho \omega^2 \left(\frac{\omega^2 - (k + T_0 k^3) \operatorname{cth}(kh_2)}{\omega^2 \operatorname{cth}(kh_2) - (k + T_0 k^3)} \right) = (1 - \rho)k + T k^3, \tag{4}$$

яке має дві пари коренів ω_1^2 і ω_2^2 . Детальний аналіз обох пар коренів був проведений в [12]. Відмітимо, що наявність двох пар коренів дисперсійного співвідношення дає можливість отримати дві пари незалежних розв'язків першого наближення

– для ω_1 :

$$\begin{aligned}
\eta_1^{(1)} &= A \sin(kx - \omega_1 t), \\
\eta_{01}^{(1)} &= \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)} A \sin(kx - \omega_1 t), \\
\varphi_{11}^{(1)} &= -\frac{A}{\omega_1 \operatorname{ch}(kh_1)} \operatorname{ch}(k(h_1 + z)) \cos(kx - \omega_1 t), \\
\varphi_{21}^{(1)} &= -\frac{A \omega_1 \operatorname{th}(kh_1) (\omega_1^2 \operatorname{sh}(k(h_2 - z)) - (k + T_0 k^3) \operatorname{ch}(k(h_2 - z)))}{(\omega_1^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2))^2} \times \\
&\quad \times \cos(kx - \omega_1 t);
\end{aligned} \tag{5}$$

– для ω_2 :

$$\begin{aligned}
\eta_1^{(2)} &= \frac{\omega_2^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)}{\omega_2^2} B \sin(kx - \omega_2 t), \\
\eta_{01}^{(2)} &= B \sin(kx - \omega_2 t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{11}^{(2)} &= -\frac{\omega_2^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)}{\omega_2^3 \operatorname{ch}(kh_1)} B \operatorname{ch}(k(h_1 + z)) \cos(kx - \omega_2 t), \\ \varphi_{21}^{(2)} &= -\frac{B \operatorname{th}(kh_1)(\omega_2^2 \operatorname{sh}(k(h_2 - z)) - (k + T_0 k^3) \operatorname{ch}(k(h_2 - z)))}{\omega_2(\omega_2^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2))} \times \\ &\quad \times \cos(kx - \omega_2 t),\end{aligned}\quad (6)$$

де A – амплітуда внутрішньої прогресивної хвилі $\eta_1^{(1)}$, а $\eta_{01}^{(1)}$ – це хвиля-відгук, що виникає на вільній поверхні, B – амплітуда поверхневої прогресивної хвилі $\eta_{01}^{(2)}$, а $\eta_1^{(2)}$ – це хвиля-відгук, що виникає на поверхні контакту.

Розглянемо в першому наближенні енергію, яку переносять за період τ двовимірні прогресивні хвилі, що задаються розв'язками (5), (6), через площину $x = \text{const}$ на поверхні контакту та на вільній поверхні. Тоді, згідно з [14], маємо вирази

$$E_{\text{in}} = -\frac{\rho}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-h_1}^0 \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{11}^{(1)} + \varphi_{11}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (7)$$

$$E_{\text{surf}} = -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{h_2} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_{21}^{(1)} + \varphi_{21}^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (8)$$

де E_{in} – енергія, яку переносить внутрішня хвиля, E_{surf} – енергія, яку переносить поверхнева хвиля. При цьому відхилення поверхні контакту та вільної поверхні задаються таким чином: $\eta_1 = \eta_1^{(1)} + \eta_1^{(2)}$, $\eta_{01} = \eta_{01}^{(1)} + \eta_{01}^{(2)}$.

Формули (7) і (8) дають оцінку енергії внутрішніх і поверхневих хвиль на основі розв'язків першого наближення, їх аналізу присвячено **п. 3**. Оцінку енергії досліджуваної системи з урахуванням розв'язків другого наближення виконано у **п. 4**.

3. Аналіз енергії хвильового руху на основі розв'язків першого наближення.

3.1. Вплив хвильового числа на енергію системи. Розглянемо двошарову систему за умови одночасного проходження на вільній поверхні прогресивної хвилі з амплітудою B та проходження на поверхні контакту прогресивної хвилі з амплітудою A при товщині нижнього шару $h_1 = 10$ для таких параметрів системи: $h_2 = 1$, $A = 0.1$, $B = 0.05$, $\rho = 0.95$, $T = T_0 = 0$.

Виявлено, що при збільшенні товщини нижнього шару h_1 енергія E_{in} , яку переносить довга ($k \ll 1$) внутрішня хвиля, зростає, при цьому величина E_{in} набуває максимальних значень. Якщо ж $k > 1$, то енергія, яку переносить внутрішня хвиля, зростає зі зменшенням товщини нижнього шару h_1 .

На рис. 1 показано залежність E_{in} , E_{surf} і їх суми $E = E_{\text{in}} + E_{\text{surf}}$ (повної енергії системи) від хвильового числа k . Залежно від хвильового числа енергія E_{surf} , яку переносять поверхневі хвилі, зростає, починаючи з деякого значення, меншого від $k = 0.5$. Енергія E_{in} , яку переносять внутрішні хвилі, спадає зі збільшенням хвильового числа.

Як видно на рис. 1, внесок до сумарної енергії двошарової системи довгих внутрішніх хвиль є значно більшим, ніж внесок довгих поверхневих хвиль, а для коротких хвиль максимальний внесок до сумарної енергії системи здійснюють поверхневі хвилі.

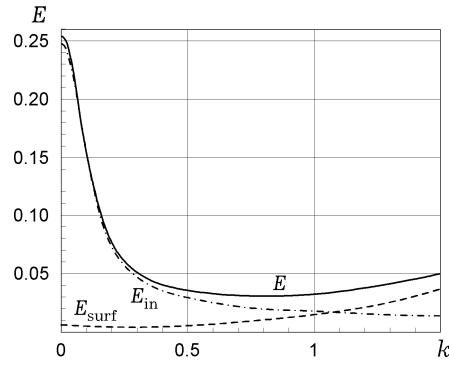


Рис. 1

3.2. Вплив товщини нижнього шару на енергію хвиль різної довжини. Числові дослідження залежностей E_{in} , E_{surf} і $E = E_{in} + E_{surf}$ від товщини h_1 нижнього шару виконано для різних значень хвильових чисел $k = 0.01, 0.1, 1.0, 2.0$ при таких значеннях параметрів системи: $h_2 = 1$, $A = 0.1$, $B = 0.05$, $\rho = 0.95$, $T = T_0 = 0$.

На рис. 2 показано залежність енергії E_{in} , яку переносить хвиля на поверхні контакту (рис. 2а), та енергії E_{surf} , яку переносить поверхнева хвиля (рис. 2б), від товщини h_1 нижнього шару.

Максимальне значення енергії E_{in} , як зазначалося вище, спостерігається при проходженні довгих хвиль (крива на рис. 2а при $k = 0.01$).

Максимальну енергію E_{surf} для малих товщин нижнього шару переносить коротка поверхнева хвиля $k = 2$. Для довгих хвиль ($k = 0.01$ і $k = 0.1$) спостерігається зменшення енергії поверхневого руху при близьких значеннях товщин шарів системи $h_1 \approx h_2 = 1$, що свідчить про явище гасіння енергії хвиль, викликане взаємодією поверхневої прогресивної хвилі з амплітудою B та поверхневого відгуку на внутрішню прогресивну хвилю з амплітудою A .

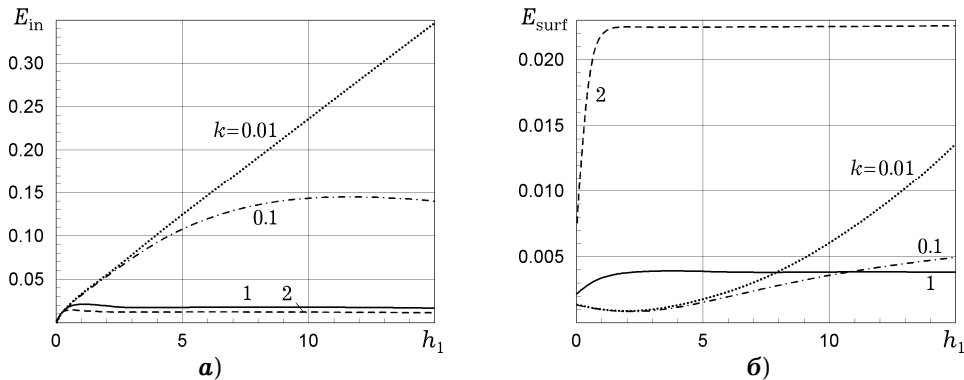


Рис. 2

На рис. 3а показано залежність повної енергії системи $E = E_{in} + E_{surf}$ від h_1 для хвиль різної довжини ($k = 0.01, 0.1, 1.0, 2.0$). Максимальна енергія системи досягається при проходженні на границі контакту довгих внутрішніх хвиль при $h_1 \gg 1$. У випадку $h_1 \ll 1$ енергія системи буде максимальною для великих хвильових чисел, тобто при проходженні на поверхні контакту коротких хвиль (рис. 3б).

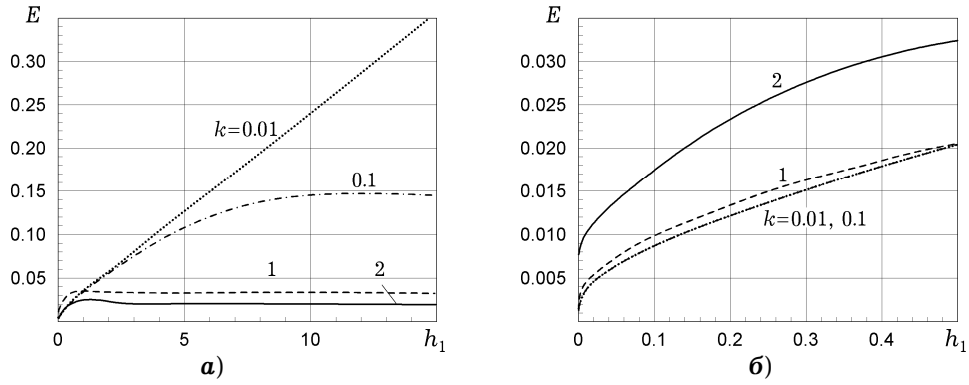


Рис. 3

Також відмітимо, що зі збільшенням товщини нижнього шару, сумарна енергія системи не може необмежено зростати. На рис. 4 показано залежність повної енергії системи $E = E_{\text{in}} + E_{\text{surf}}$ від товщини нижнього шару h_1 для великих значень товщини. Бачимо, що при збільшенні товщини нижнього шару для кожного значення хвильового числа існує своє граничне сумарної енергії системи.

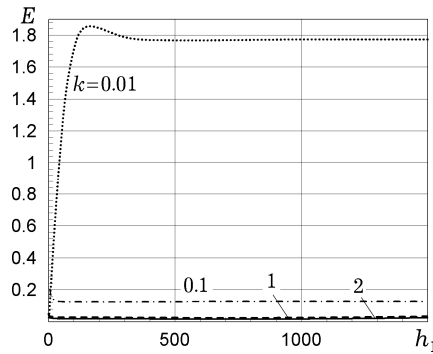


Рис. 4

3.3. Енергія хвильового руху у граничних випадках досліджуваної системи. Розглянемо залежності енергії (7), (8) від товщини нижнього шару h_1 у двошаровій системі. Отримані результати будемо порівнювати з розрахунком енергії, що переносить хвиля в гідродинамічній системі «шар з вільною поверхнею», який виконано, наприклад, у [14]. Розв'язки цієї задачі в лінійній постановці мають вигляд

$$\zeta = C \sin(\omega t - kx),$$

$$\varphi = \frac{C}{\omega \operatorname{ch}(kh)} \operatorname{ch}(k(z+h)) \cos(\omega t - kx).$$

Енергія E_{cl} , яку переносить хвиля у такій системі, в рамках лінійної моделі (яка є класичним випадком) обчислюється за формулою

$$E_{\text{cl}} = -\frac{\rho}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-h}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz. \quad (9)$$

Для порівняння розглянемо два граничні випадки, коли двошарова система вироджується в одношарову.

Перший вироджений випадок описується рівністю густин $\rho_1 = \rho_2$, $\rho = 1$, при цьому товщина шару $h = h_1 + h_2$, а амплітуда внутрішньої прогресивної хвилі $A = 0$. У цьому випадку отримуємо один однорідний шар, обмежений зверху вільною поверхнею. На рис. 5 показано залежності E_{in} ,

E_{surf} , $E = E_{\text{in}} + E_{\text{surf}}$ та E_{cl} від товщини нижнього шару для параметрів $k = 0.01$, $T = T_0 = 0$, $h_2 = 1$, коли амплітуда поверхневої прогресивної хвилі $B = 0.1$. Як бачимо на рис. 5, при збільшенні товщини нижнього шару енергія, що переноситься поверхневою хвилею, спадає. При цьому сума внутрішньої і поверхневої енергій $E = E_{\text{in}} + E_{\text{surf}}$ наближається до енергії E_{cl} однорідного шару товщини $h = h_1 + h_2$. Отже, для довгих хвиль малої амплітуди сума енергій, що переносяться внутрішньою і поверхневою хвилями, наближається до енергії, що відповідає поверхневій хвилі в системі «шар з вільною поверхнею» у випадку, коли $h_1 \rightarrow \infty$.

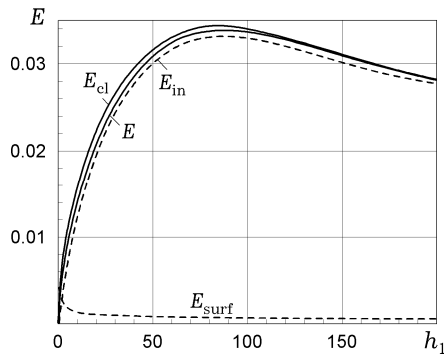


Рис. 5

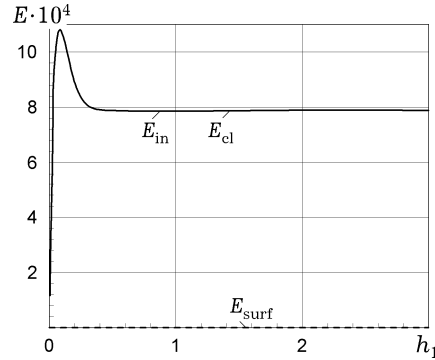


Рис. 6

Розглянемо інший граничний випадок, коли верхній шар відсутній, тобто $\rho_2 = 0$. Тоді двошарова система вироджується в одношарову систему товщини $h = h_1$, обмежену зверху вільною поверхнею. На рис. 6 показано залежність E_{in} , E_{surf} та E_{cl} від товщини нижнього шару h_1 для таких значень параметрів: $k = 2$, $T = T_0 = 0$, $h_2 = 1$. При цьому амплітуда внутрішньої прогресивної хвилі $A = 0.1$, а амплітуда поверхневої прогресивної хвилі $B = 0$. У цьому граничному випадку енергія E_{in} , яку переносить внутрішня хвиля, співпадає з E_{cl} , а $E_{\text{surf}} = 0$, оскільки при $\rho_2 = 0$ верхній шар відсутній.

Таким чином, граничні випадки підтверджують достовірність отриманих результатів для досліджуваної системи.

4. Оцінка внеску другого наближення в повну енергію системи. У п. 3 було проведено аналіз енергії системи «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею» на основі розв'язків першого наближення досліджуваної задачі. У цьому пункті оцінимо внесок другого наближення в повну енергію системи. Згідно з розвиненням (2) і розв'язками першої лінійної задачі (3), (4), а також з огляду на розв'язок еволюційного рівняння [22], враховуючи розв'язки другого лінійного наближення [11, 19], вирази для відхилень вільної поверхні та поверхні контакту і для потенціалів у верхньому та нижньому шарах запишемо таким чином

– для ω_1 :

$$\begin{aligned}
 \eta^{(1)} &= \eta_1^{(1)} + \alpha \eta_2^{(1)}, \\
 \eta_0^{(1)} &= \eta_{01}^{(1)} + \alpha \eta_{02}^{(1)}, \\
 \varphi_1^{(1)} &= \varphi_{11}^{(1)} + \alpha \varphi_{12}^{(1)}, \\
 \varphi_2^{(1)} &= \varphi_{21}^{(1)} + \alpha \varphi_{22}^{(1)};
 \end{aligned} \tag{10}$$

– для ω_2 :

$$\begin{aligned}\eta^{(2)} &= \eta_1^{(2)} + \alpha\eta_2^{(2)}, \\ \eta_0^{(2)} &= \eta_{01}^{(2)} + \alpha\eta_{02}^{(2)}, \\ \varphi_1^{(2)} &= \varphi_{11}^{(2)} + \alpha\varphi_{12}^{(2)}, \\ \varphi_2^{(2)} &= \varphi_{21}^{(2)} + \alpha\varphi_{22}^{(2)}.\end{aligned}\quad (11)$$

де $\eta_0^{(1)}$ – поверхнева хвиля-відгук на внутрішню хвилю $\eta^{(1)}$ з частотою ω_1 , а $\eta^{(2)}$ є внутрішньою хвилею-відгуком на поверхневу хвилю $\eta_0^{(2)}$.

Для обчислення енергії з урахуванням другого наближення маємо такі формули:

$$E_{\text{in}} = -\frac{\rho}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{-h_1}^{\eta_1} \frac{\partial(\varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)})}{\partial x} dz, \quad (12)$$

$$E_{\text{surf}} = -\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \int_{\eta_1}^{\eta_{01}} \frac{\partial(\varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(2)})}{\partial t} \frac{\partial(\varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(2)})}{\partial x} dz. \quad (13)$$

Тут E_{in} – енергія, яку переносить внутрішня хвиля $\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)}$, E_{surf} – енергія, яку переносить поверхнева хвиля $\eta_0 = \eta_0^{(1)} + \eta_0^{(2)}$. Відмітимо, що у формулах (12), (13) межі інтегрування за z не є сталими величинами. У (12) інтегрування за z здійснюється у межах від 0 до $\eta_1 = \eta_1^{(1)} + \eta_1^{(2)}$, а в (13) – від $\eta_1 = \eta_1^{(1)} + \eta_1^{(2)}$ до $\eta_{01} = \eta_{01}^{(1)} + \eta_{01}^{(2)}$, що обумовлено врахуванням другого наближення.

Для оцінки внеску другого наближення у повну енергію системи вибрали відношення квадратів амплітуд других гармонік, які задаються виразами (10), (11). Обчислення виконано для значень хвильових чисел $k = 0.01, 0.1, 1.0, 2.0$ і відношень густин $\rho = 0.9, 0.95, 0.99$ при таких значеннях параметрів системи: $h_1 = 10$, $h_2 = 1$, $T = T_0 = 0$, коли амплітуда внутрішньої хвилі $A = 0.1$, а амплітуда поверхневої хвилі $B = 0.05$. В результаті отримано, що цей внесок становить близько 3% від загальної енергії хвильового руху, що можна пояснити тим, що розв'язки другого наближення входять у загальні розв'язки для потенціалів і відхилень поверхні контакту та вільної поверхні (2) з малим коефіцієнтом нелінійності α .

Висновки. Проведено аналіз енергії, яку переносять внутрішня і поверхнева хвилі на поверхні контакту та вільній поверхні у гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею», залежно від фізичних і геометричних параметрів системи.

Встановлено, що у першому наближенні максимальний внесок у повну енергію системи дає поширення довгих хвиль. Також встановлено, що для кожного хвильового числа існує своє граничне значення сумарної енергії системи, що відповідає властивості обмеженості повної енергії системи.

Оцінено також внесок другого наближення як 3% повної енергії хвильового руху в гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею».

Фізична достовірність отриманих результатів підтверджена граничними випадками двошарової системи, при яких вона вироджується у одношарову.

1. Авраменко О. В., Наратовый В. В., Селезов И. Т. Условия прохождения волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 1. – С. 105–114.
Te same: Avramenko O. V., Naradovyi V. V., Selezov I. T. Conditions of wave propagation in a two-layer liquid with free surface // *J. Math. Sci.* – 2016. – **212**, No. 2. – P. 131–141.
2. Авраменко О. В., Селезов И. Т. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред // *Прикл. гідромеханіка.* – 2002. – **4**(76), № 4. – С. 3–13.
3. Доценко С. Ф., Иванов В. А., Побережный Ю. А. Связь образования волн-убийц и метеорологических условий в северо-западной части Черного моря // *Доп. НАН України.* – 2010. – № 12. – С. 105–109.
4. Доценко С. Ф., Санникова Н. К. В. Анализ двумерного распространения волн цунами из эллиптического очага в прямолинейный канал // *Екологічна безпека прибережної та шельфової зон та комплексне використання ресурсів шельфу.* – 2011. – Вып. 25, т. 2. – С. 419–428.
5. Калиниченко В. А., Секерж-Зенькович С. Я. Экспериментальное исследование волн Фарадея максимальной высоты // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* – 2007. – № 6. – С. 103–110.
Te same: Kalinichenko V. A., Sekerzh-Zen'kovich S. Ya. Experimental investigation of Faraday waves of maximum height // *Fluid Dyn.* – 2007. – **42**, No. 6. – P. 959–965.
6. Калиниченко В. А., Секерж-Зенькович С. Я. Экспериментальное исследование вторичных стационарных течений в поверхностных волнах Фарадея // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* – 2008. – № 1. – С. 141–148.
Te same: Kalinichenko V. A., Sekerzh-Zen'kovich S. Ya. Experimental investigation of secondary steady flows in Faraday surface waves // *Fluid Dyn.* – 2008. – **43**, No. 1. – P. 125–131.
7. Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л. Асимптотические модели внутренних стационарных волн // *Прикл. механика и техн. физика.* – 2008. – **49**, № 4. – С. 151–161.
Te same: Makarenko N. I., Mal'tseva Zh. L. Asymptotic models of internal stationary waves // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.* – 2008. – **49**, No. 4. – P. 646–654.
8. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // *Прикл. гідромеханіка.* – 2001. – **3**(75), № 4. – С. 38–46.
9. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околокритических волновых числах // *Динам. системы.* – 2001. – Вып. 17. – С. 58–67.
10. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2001. – **44**, № 2. – С. 113–122.
11. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовый Ю. В., Наратовый В. В. Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **52**, № 1. – С. 72–83.
Te same: Selezov I. T., Avramenko O. V., Gurtovyi Yu. V., Naradovyi V. V. Non-linear interaction of internal and surface gravity waves in a two-layer fluid with free surface // *J. Math. Sci.* – 2010. – **168**, No. 4. – P. 590–602.
12. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. – Киев: Наук. думка, 2012. – 232 с.
13. Талипова Т. Г., Пелиновский Е. Н. Моделирование распространяющихся длинных внутренних волн в неоднородном океане: теория и верификация // *Фундамент. и прикл. гидрофизика.* – 2013. – **6**, № 2. – С. 46–54.
14. Тарапов И. Е. Механика сплошной среды: В 3 ч. – Ч. 3: Механика невязкой жидкости. – Харьков: Золотые страницы, 2005. – 332 с.
15. Шамин Р. В., Кузнецов К. И. Об оценке опасности аномальных поверхностных волн // *Вестн. Дальневост. отд. РАН.* – 2013. – № 3. – С. 65–68.
16. Carr M., Davies P. A. The motion of an internal solitary wave of depression over a fixed bottom boundary in a shallow, two-layer fluid // *Phys. Fluids.* – 2006. – **18**, No. 1. – P. 016601-1–016601-10.
17. Debsarma S., Das K. P. Fourth-order nonlinear evolution equations for a capillary-gravity wave packet in the presence of another wave packet in deep water // *Phys. Fluids.* – 2007. – **19**, No. 9. – P. 097101-1–097101-16.

18. *Hacıyev B. I.* Unstationary waves in two-layered fluid caused by normal loading at the interface // Proc. IMM (Inst. Mathematics and Mechanics) NAS of Azerbaijan. – 2006. – **25**. – P. 119–126.
19. *Naradovy V.* Interaction of internal and surface waves in a two-layer fluid with free surface // Challenges Mod. Technol. – 2013. – **4**, No. 3. – P. 3–9.
20. *Nayfeh A. H.* Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interfaces// Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. – 1976.– **43**, No. 4. – P. 584–588.
21. *Nolte J., Ertekin R. C., Davis E. P.* In-ocean experiments of a wave energy conversion device when moored to an anchor and to a drogue // J. Ocean Technol. – 2013. – **8**, No. 1. – P. 72–85.
22. *Sutherland B. R., Nault J. T.* Intrusive gravity currents propagating along thin and thick interfaces // J. Fluid Mech. – 2007. – **586**. – P. 109–118.
23. *Vincze M., Kozma P., Gyüre B., Jánosi I. M., Szabó K. G., Tél T.* Amplified internal pulsations on a stratified exchange flow excited by interaction between a thin sill and external seiche // Phys. Fluids. – 2007. – **19**, No. 10. – P. 108108-1–108108-4.

ЭНЕРГИЯ ВНУТРЕННИХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ДВУХСЛОЙНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Исследуется энергия волнового движения в двухслойной гидродинамической системе «слой с твердым дном – слой со свободной поверхностью». Проведен анализ зависимости энергии внутреннего и поверхностного волновых движений от геометрических и физических параметров исследуемой системы. Оценен вклад второго приближения при исследовании полной энергии системы. Выполнена проверка достоверности полученных результатов. Все результаты проиллюстрированы графически.

THE ENERGY OF INTERNAL AND SURFACE WAVE MOTIONS IN TWO-LAYERED HYDRODYNAMIC SYSTEM

The energy of wave motion in a two-layer system of hydrodynamic «layer with solid bottom – layer with a free surface» is investigated. Analysis of the dependence of the energy of internal and surface wave motions on the geometrical and physical parameters of the system is carried out. The contribution of the second approximation of the total energy of the system is evaluated in the investigation. Verification of the obtained results is performed. All the results are illustrated graphically.

¹ Кіровоград, держ. пед. ун-т
ім. В. Винниченка, Кіровоград,
² Ін-т гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано
12.01.16