УДК 539.3

Ю. В. Немировский[1], А. И. Бабин[2]

СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ. I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОБЛЕМЫ

На основе общей интегральной формы вариационного принципа наименьшего рассеяния энергии неравновесной термодинамики выведено неклассическое нестационарное уравнение теплопроводности для многослойных полиармированных оболочек произвольной формы. Разработана методика определения интегральных коэффициентов теплопроводности армированного слоя и построены эффективные определяющие уравнения его термоупругого поведения. Построена неклассической модель деформирования слоистой оболочки и нелинейная модель распределения теплового потока по толщине оболочки, позволяющая учесть поперечные сдвиговые деформации, обеспечить условия механического и теплового сопряжения слоев и условия термомеханического нагружения на лицевых поверхностях оболочки. Построена замкнутая система дифференциальных уравнений и соответствующих им краевых и начальных условий связанной задачи термоупругого деформирования слоистых композитных оболочек и пластин.

Введение. Тонкостенные анизотропные слоистые пластинки и оболочки представляют собой основные несущие элементы ответственных инженерных конструкций и сооружений, применяемых в современной авиационной и ракетной технике, судостроении, энергетическом и химическом машиностроении и т.д.

Практика проектирования таких конструкций и сооружений, выдвигая многочисленные сложные проблемы их термопрочности, термовыпучивания, динамики, активно стимулирует дальнейшую разработку теории термоупругости.

В развитии теории термоупругости в последнее время достигнут существенный прогресс: четко сформулированы исходные положения взаимосвязанной термоупругости, составлены основные дифференциальные уравнения, сформулированы соответствующие им начально-краевые задачи, разработан ряд методов их решения, решены разнообразные прикладные задачи [19, ч. 1, § 1,2], [20, гл. 1; 2], [21, гл. 3, п. 3.9].

В то же время следует отметить, что большинство результатов относится к однородным изотропным и анизотропным массивным упругим средам.

Проблемы неклассической термоупругости тонкостенных слоистых композитных оболочек и пластин решены с существенно меньшей полнотой.

Библиография статей, связанных с различными аспектами теории и применения тонкостенных конструкций, содержит нескольких тысяч публикаций, обзор которых можно посмотреть в работах [26, 27]. Последние достижения в этом направлении изложены в [25, 28–31].

Ввиду актуальности этой проблемы необходимы дальнейшие исследования в данной области механики деформируемого твердого тела.

Целью работы является построение замкнутой системы дифференциальных уравнений и соответствующих им краевых и начальных условий взаимосвязанной неклассической задачи термоупругого деформирования слоистых полиармированных композитных оболочек и пластин.

1. Уравнение теплопроводности для анизотропных твердых тел. Если свойства материалов достаточно просты и рассматриваются оболочечные конструкции канонических форм, то при построении уравнений теплопередачи можно обойтись без вариационного подхода, воспользовавшись дифференциальной формой субстанционального уравнения баланса [6, с. 53]. При нетривиальных взаимодействиях, которые имеют место, например, в задаче усреднения периодически неоднородных континуумов, при построении непротиворечивых моделей теории оболочек, вариационный подход становится единственным способом построения физически разумных уравнений. Кроме того, вариационные принципы открывают естественный путь для сведения трёхмерных задач механики сплошных сред к двухмерным задачам теории пластин и оболочек.

В данной работе при выводе уравнения переноса тепла в упругом неоднородном анизотропном теле будем исходить из общей интегральной формы представления вариационного принципа наименьшего рассеяния энергии через силы [7, с. 150]

$$\delta\int_V (\tilde{S} - \Psi)_{\mathbf{q}}\, dV = 0, \qquad \delta\mathbf{q} = 0, \qquad \delta\mathbf{X} \neq 0\,, \tag{1}$$

где $\tilde{S}$ – производство энтропии в единице объёма V; Ψ – локальный потенциал рассеяния; $\mathbf{q}$ – плотность теплового потока; $\mathbf{X}$ – обобщённые термодинамические силы.

Термодинамическую силу $\mathbf{X}$, обуславливающую явление теплопроводности, и потенциал рассеяния Ψ зададим в представлении Фурье [7, с. 122, с. 147]:

$$\mathbf{X} \equiv -\nabla T, \qquad \Psi \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda} : (\nabla T \nabla T)\,. \tag{2}$$

Здесь ∇ – оператор Гамильтона; T – абсолютная температура; $\boldsymbol{\Lambda}$ – тензор теплопроводности второго ранга. Двумя точками здесь и далее обозначаем двукратную свёртку тензоров.

Локальное производство $\tilde{S}$ энтропии, связанное с теплопроводностью, имеет вид билинейного выражения [6, с. 52]:

$$\tilde{S} = -\mathbf{q}\cdot\nabla T\,. \tag{3}$$

С учётом соотношений (2), (3), равенства

$$\mathbf{q}\cdot\nabla T = \nabla\cdot(\mathbf{q}T) - T\nabla\cdot\mathbf{q}$$

и теоремы Гаусса:

$$\int_V \nabla\cdot(\mathbf{q}T)\, dV = \oint_\Omega (\boldsymbol{\nu}^* \times \mathbf{q})_{\mathbf{q}}\, T\, d\Omega\,, \tag{4}$$

вариационный принцип (1) преобразуем к следующему виду:

$$\delta\int_V \left[T\nabla\cdot\mathbf{q} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda} : (\nabla T\nabla T)\right]_{\mathbf{q}} dV - \delta\oint_\Omega (\boldsymbol{\nu}^*\cdot\mathbf{q})_{\mathbf{q}}\, T\, d\Omega = 0\,, \tag{5}$$

где Ω – поверхность, ограничивающая объём V; $\boldsymbol{\nu}^*$ – единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности $d\Omega$.

Чтобы описать протекающий во времени и в пространстве необратимый процесс переноса тепла в твёрдом теле, необходимо ввести в вариационное условие (5) вместо $T\nabla\cdot\mathbf{q}$ частную производную $\dot{S} = \dfrac{\partial S}{\partial\tau}$ от плотности энтропии S по времени τ из уравнения баланса энтропии [7, с. 107]:

$$\dot{S} + \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) = -\frac{\mathbf{q}\cdot\nabla T}{T^2} + \frac{w_T}{T}\,, \tag{6}$$

где w_T – удельная мощность объёмных источников диссипативного характера.

Для этого преобразуем второе слагаемое в левой части (6):

$$\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) = \frac{1}{T}\nabla\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\nabla\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{1}{T}\nabla\cdot\mathbf{q} - \frac{\mathbf{q}\cdot\nabla T}{T^2}\,,$$

подставим это выражение в уравнение(6) и умножим последнее на T^2. В результате получим

$$T\nabla \cdot \mathbf{q} = -T^2\dot{S} + Tw_T\,, \tag{7}$$

Условие вариации (5) с учётом соотношения (7) примет вид

$$\delta\int\limits_V \left[-T^2\dot{S} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda} : (\nabla T\nabla T) + Tw_T\right]_{\mathbf{q}} dV - \delta\oint\limits_{\Omega}(\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{q})_{\mathbf{q}}\,T\,d\Omega = 0\,, \tag{8}$$

где интегралы рассматриваются как функции только температуры.

Следовательно, в (8) варьирование должно производиться только по внутренней переменной силе $\mathbf{X} \equiv -\nabla T$, то есть только по температуре при постоянном потоке. Однако из (7) вытекает, что из постоянства потока $(\delta\mathbf{q} = 0)$ следует также постоянство $-T\dot{S} + w_T$. Таким образом, варьируя (8) по температуре при постоянстве $\mathbf{q}$ и $-T\dot{S} + w_T$, используя при этом (4) и очевидное тождество

$$\delta\frac{1}{2}\boldsymbol{\Lambda} : (\nabla T\nabla T) = \delta\frac{1}{2}\nabla T \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \nabla T = \nabla T \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \delta\nabla T =$$

$$= \nabla \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \nabla T\delta T) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \nabla T)\delta T\,,$$

приходим к выражению

$$\int\limits_V \left[T\dot{S} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \nabla T) - w_T\right]\delta T\,dV + \oint\limits_{\Omega}\left[\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{q} + \mathbf{v}^* \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \nabla T)\right]\delta T\,d\Omega = 0\,. \tag{9}$$

Для плотности энтропии имеем выражение [17, с. 86]

$$S = \beta^{tij}\varepsilon_{ij} + \int\limits_{T_0}^{T} c_\varepsilon\,\frac{d\theta}{\theta}\,,$$

где β^{tij}, ε_{ij} – компоненты тензоров температурных напряжений и деформаций соответственно, c_ε – объемная теплоёмкость материала при постоянной деформации (аналог теплоемкости c_v твердых тел при постоянном объеме), T_0 – абсолютная температура в исходном $(\varepsilon_{ij} = 0)$ состоянии.

Продифференцировав последнее равенство по времени и подставив его в уравнение (9), получим нелинейную форму принципа наименьшего рассеяния в представлении через независимые термодинамические силы:

$$\int\limits_V \left[T\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{T_0}^{T} c_\varepsilon\,\frac{d\theta}{\theta} + T\beta^{tij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \nabla \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \nabla T) - w_T\right]\delta T\,dV +$$

$$+\oint\limits_{\Omega}\left[\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{q} + \mathbf{v}^* \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \cdot \nabla T)\right]\delta T\,d\Omega = 0\,. \tag{10}$$

При низких температурах ($T < 0,\ 2\theta_D$, θ_D – характеристическая дебаевская температура, которая является постоянной для данного вещества) c_ε пропорциональна T^3, а при высоких температурах она становится постоянной и равной [24, с. 117] $c_\varepsilon = 3R_\Gamma$ (закон Дюлонга и Пти), где R_Γ – универсальная газовая постоянная.

Обычно экспериментально определяется объемная теплоемкость материала при постоянных напряжениях c_σ (аналог теплоемкости твердых тел при постоянном объеме), так как теплоёмкость измеряется для образцов материалов в ненагруженном состоянии. При фиксированном напряженном состоянии [8, с. 19] $c_\sigma = c_\varepsilon + 9K\alpha^2 T$, где K – модуль всестороннего сжатия материала тела; α – коэффициент линейного расширения. Величина разности $c_\sigma - c_\varepsilon$ весьма мала и не превышает 3–5% значения c_ε [24, с. 117]. При расчётах этой разницей можно пренебречь и принимать, что $c_\varepsilon = c_\sigma = C$. В дальнейшем будем считать, что C не зависит от температуры и полностью определяется индивидуальными свойствами вещества в заданной точке тела.

В аспекте сказанного можно представить уравнение (10) в окончательной редакции:

$$\int_V \left[C\frac{\partial T}{\partial \tau} + T\beta^{ij}\dot{\varepsilon}^{ij} - \nabla\cdot(\mathbf{\Lambda}\cdot\nabla T) - w_T \right]\delta T\,dV +$$

$$+\oint_\Omega \left[\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{q} + \mathbf{v}^*\cdot(\mathbf{\Lambda}\cdot\nabla T)\right]\delta T\,d\Omega = 0\,. \tag{11}$$

Следует подчеркнуть, что при выводе вариационного уравнения (11) на тензоры теплопроводности $\mathbf{\Lambda}$ и компоненты тензора температурных напряжений β^{ij} накладывались ограничения самого общего характера, следовательно, уравнение справедливо для неоднородных материалов с произвольной анизотропией свойств.

Физические составляющие эффективных коэффициентов тензора теплопроводности $\widehat{\lambda}_{(ij)}$ для элементарного однонаправленного армированного слоя (ЭОАС) выражаются через коэффициенты теплопроводности фаз композита и структурные параметры армирования следующим образом [4]:

$$\widehat{\lambda}_{(11)} = \varpi\varpi_z\lambda_a + (1-\varpi\varpi_z)\lambda_c, \qquad \widehat{\lambda}_{(22)} = \frac{\varpi_z\lambda_c\lambda_a}{\varpi\lambda_c + (1-\varpi)\lambda_a} + (1-\varpi_z)\lambda_c\,,$$

$$\widehat{\lambda}_{(33)} = \frac{\lambda_c(\varpi\lambda_a + (1-\varpi)\lambda_c)}{\varpi_z\lambda_c + (1-\varpi_z)(\varpi\lambda_a + (1-\varpi)\lambda_c)}, \qquad \widehat{\lambda}_{(ij)} = 0, \qquad i \neq j\,.$$

Выражения для эффективных компонент тензора теплопроводности для k-го полиармированного слоя (ПАС) получены авторами в работе [3]:

$$\Lambda^{(k)}_{(\alpha\beta)} = \sum_{\ell=1}^{\ell_k}\omega_z^{(k\ell)}\left\{\left[\varpi^{(k\ell)}(\lambda_a^{(k\ell)} - \lambda_c^{(k)}) + (\Omega_z^{(k)})^{-1}\lambda_c^{(k)}\right] + \right.$$

$$\left. + (-1)^{\alpha+\beta}\left[\frac{\lambda_c^{(k)}\lambda_a^{(k\ell)}}{\varpi^{(k\ell)}\lambda_c^{(k)} + (1-\varpi^{(k\ell)})\lambda_a^{(k\ell)}} + \lambda_c^{(k)}\left((\Omega_z^{(k)})^{-1} - 1\right)\right]\right\},$$

$$\Lambda^{(k)}_{(33)} = \left(\frac{\left(1-\Omega_z^{(k)}\right)}{\lambda_c^{(k)}} + \sum_{\ell=1}^{\ell_k}\frac{\omega_z^{(k\ell)}}{\left(\varpi^{(k\ell)}\lambda_a^{(k\ell)} + (1-\varpi^{(k\ell)})\lambda_c^{(k)}\right)}\right)^{-1},$$

$$\Lambda^{(k)}_{(\alpha 3)} = \Lambda^{(k)}_{(3\alpha)} = 0, \quad \alpha,\beta = 1,2, \quad \xi = 3-\alpha, \quad \zeta = 3-\beta, \quad k = 1,2,\ldots,m\,,$$

$$\Omega_z^{(k)} = \sum_{\ell=1}^{\ell_k}\omega_z^{(k\ell)}, \quad \alpha,\beta = 1,2, \quad \xi = 3-\alpha, \quad \zeta = 3-\beta, \quad \ell = 1,2,\ldots,\ell_k\,,$$

$$k = 1,2,\ldots,m\,,$$

где $\varpi^{(k\ell)}$ – интенсивности армирования в плоскости слоя; $\lambda_a^{(k\ell)}$ – коэффициент линейной теплопроводности арматуры ℓ-го семейства, $\ell = 1,2,\ldots,\ell_k$, ЭОАС в составе k-го ПАС; $\lambda_c^{(k)}$ – теплопроводность связующего k-го ПАС.

Здесь и далее греческие индексы принимают значения 1, 2, а латинские – 1, 2, 3.

Компоненты тензоров напряжений, деформаций и температура для k-го ПАС связаны зависимостью [3] (обобщенный закон Дюамеля – Неймана):

$$\bar{\sigma}^{\alpha\beta}_{(k)} = \sum_{\ell=1}^{\ell_k} \left[\omega_z^{(k\ell)} (\Omega_z^{(k)})^{-1} A^{\alpha\beta\lambda\mu}_{(k\ell)} \right] \bar{\varepsilon}^{(k)}_{\lambda\mu} - \sum_{\ell=1}^{\ell_k} \left[\omega_z^{(k\ell)} (\Omega_z^{(k)})^{-1} \beta^{\alpha\beta}_{t(k\ell)} \right] \bar{T}_{(k)} \ , \tag{12}$$

$$A^{(k\ell)}_{(\pi\omega\rho\delta)} = \frac{(1-\varpi_z^{(k\ell)})E_c^{(k)}}{1-(\nu_c^{(k)})^2} \left[\nu_c^{(k)} \delta_{\pi\omega}\delta_{\rho\delta} + \frac{1-\nu_c^{(k)}}{2} (\delta_{\pi\rho}\delta_{\omega\delta} + \delta_{\pi\delta}\delta_{\omega\rho}) \right] +$$

$$+ \varpi_z^{(k\ell)} E^{(k\ell)}_{(\pi\omega\rho\delta)} , \tag{13}$$

$$\hat{\beta}^{(k\ell)}_{t(\pi\omega)} = \frac{(1-\varpi_z^{(k\ell)})E_c^{(k)}\alpha_c^{(k)}}{1-\nu_c^{(k)}} \delta_{\pi\omega} + \varpi_z^{(k\ell)} E^{(k\ell)}_{(\pi\omega\rho\delta)} \alpha^{t(k\ell)}_{(\rho\delta)} , \quad \delta_{\alpha\delta} = \begin{cases} 0, & \alpha \ne \beta, \\ 1, & \alpha = \beta, \end{cases} \tag{14}$$

$$E^{(k\ell)}_{(1111)} = \varpi_{(k\ell)} E_a^{(k\ell)} + (1-\varpi_{(k\ell)}) E_c^{(k)} +$$

$$+ \frac{E_a^{(k\ell)} E_c^{(k)} \left[\varpi_{(k\ell)} \nu_{a(k\ell)} + (1-\varpi_{(k\ell)}) \nu_c^{(k)} \right]^2}{\varpi_{(k\ell)} (1-\nu^2_{a(k\ell)}) E_c^{(k)} + (1-\varpi_{(k\ell)}) (1-(\nu_c^{(k)})^2) E_a^{(k\ell)}} ,$$

$$E^{(k\ell)}_{(2222)} = \frac{E_a^{(k\ell)} E_c^{(k)}}{\varpi_{(k\ell)} (1-\nu^2_{a(k\ell)}) E_c^{(k)} + (1-\varpi_{(k\ell)}) (1-(\nu_c^{(k)})^2) E_a^{(k\ell)}} ,$$

$$E^{(k\ell)}_{(1122)} = E^{(k\ell)}_{(2211)} = \frac{\hat{\nu}_{(k\ell)} E_a^{(k\ell)} E_c^{(k)}}{\varpi_{(k\ell)} (1-\nu^2_{a(k\ell)}) E_c^{(k)} + (1-\varpi_{(k\ell)}) (1-(\nu_c^{(k)})^2) E_a^{(k\ell)}} ,$$

$$E^{(k\ell)}_{(1212)} = \frac{1}{2} \frac{E_a^{(k\ell)} E_c^{(k)}}{\varpi_{(k\ell)} (1+\nu_{a(k\ell)}) E_c^{(k)} + (1-\varpi_{(k\ell)}) (1+\nu_c^{(k)}) E_a^{(k\ell)}} ,$$

$$\hat{\nu}_{(k\ell)} = \varpi_{(k\ell)} \nu_{a(k\ell)} + (1-\varpi_{(k\ell)}) \nu_c^{(k)} ,$$

$$\alpha^{t(k\ell)}_{(11)} = \frac{\varpi_{(k\ell)} E_a^{(k\ell)} \alpha_a^{(k\ell)} + (1-\varpi_{(k\ell)}) E_c^{(k)} \alpha_c^{(k)}}{\varpi_{(k\ell)} E_a^{(k\ell)} + (1-\varpi_{(k\ell)}) E_c^{(k)}} ,$$

$$\alpha^{t(k\ell)}_{(22)} = \left[\varpi_{(k\ell)} \alpha_a^{(k\ell)} (1+\nu_{a(k\ell)}) + (1-\varpi_{(k\ell)}) \alpha_c^{(k)} (1+\nu_c^{(k)}) \right] - \left[\varpi_{(k\ell)} \nu_{a(k\ell)} + \right.$$

$$\left. + (1-\varpi_{(k\ell)}) \nu_c^{(k)} \right] \alpha^{t(k\ell)}_{(11)} \ , \quad \ell = 1,2,\ldots,\ell_k, \quad k = 1,2,\ldots,m . \tag{15}$$

В зависимостях (12)–(15) приняты следующие обозначения: $\varpi^{(k\ell)}$, $\varpi_z^{(k\ell)}$ – интенсивности армирования в плоскости слоя и по высоте соответственно; $\lambda_a^{(k\ell)}$, $\lambda_c^{(k)}$ – коэффициенты линейной теплопроводности; $E_a^{(k\ell)}$, $E_c^{(k)}$, $\nu_{a(k\ell)}$, $\nu_c^{(k)}$, $\alpha_a^{(k\ell)}$, $\alpha_c^{(k)}$ – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и температурного расширения для арматуры и связующего ℓ-го ЭОАС в составе k-го ПАС соответственно.

Для эффективной теплоёмкости k-го ПАС справедлива следующая зависимость от коэффициентов теплоёмкости субструктурных элементов:

$$c_{(k\ell)} = \varpi\varpi_z c_{a(k\ell)} + (1-\varpi\varpi_z) c_{c(k)} , \quad \ell = 1,2,\ldots,\ell_k, \quad k = 1,2,\ldots,m .$$

2. Уравнение теплопроводности многослойных полиармированных оболочек. Рассмотрим оболочку постоянной толщины $h = \sum_{k=1}^{m} h_k$, состоящую из m эквидистантных полиармированных слоёв (ПАС) также постоянной толщины h_j. На «нижней» ($z = z_1 = 0$) граничной поверхности $\widehat{\Omega}$ оболочки введём систему координат, нормально связанную с $\widehat{\Omega}$. В этой системе координат поверхности раздела k-го и $(k+1)$-го ПАС описываются уравнениями

$$z = z_{k+1}, \qquad z_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} h_j, \quad k = 1,2,\ldots,m-1. \tag{16}$$

Далее будем полагать, что термическим сопротивлением в зоне контакта полиармированных слоёв, обусловленным технологическими факторами [22, гл. 1], можно пренебречь и считать, что на поверхностях раздела (16) выполняются условия идеального теплового контакта:

$$T^{(k)}\Big|_{z=z_{k+1}-0} = T^{(k+1)}\Big|_{z=z_{k+1}+0},$$

$$\Lambda_{(33)}^{(k)}\nabla_3 T^{(k)}\Big|_{z=z_{k+1}-0} = \Lambda_{(33)}^{(k+1)}\nabla_3 T^{(k+1)}\Big|_{z=z_{k+1}+0}, \quad k = 1,2,\ldots,m-1. \tag{17}$$

Температуру и коэффициенты конвективного теплообмена с окружающей средой обозначим через $T^{(0)}$, μ_0 при $z = z_1 = 0$ и $T^{(m+1)}$, μ_{m+1} – при $z = z_{m+1} = h$.

На указанных поверхностях могут действовать поверхностные источники с удельной мощностью

$$\mathbf{q}\big|_{z=z_1} = \mathbf{q}_0, \qquad \mathbf{q}\big|_{z=z_{m+1}} = \mathbf{q}_{m+1}. \tag{18}$$

Введённые величины могут быть произвольными, но достаточно гладкими функциями координат x^1, x^2 и времени τ.

Полагаем, что на «лицевых» поверхностях ($z = z_1 = 0,\ z = z_{m+1} = h$) оболочки имеет место теплообмен по закону Ньютона при граничных условиях первого ($\mu_0,\ \mu_{m+1} \to \infty$), второго ($\mu_0,\ \mu_{m+1} = 0$) или третьего рода ($0 < \mu_0, \mu_{m+1} < \infty$):

$$\Lambda_{(33)}^{(1)}\nabla_3 T^{(1)} + \mu_0\left(T^{(0)} - T^{(1)}\right) + q_{(3)0} = 0, \qquad z = z_1 = 0, \tag{19}$$

$$-\Lambda_{(33)}^{(m)}\nabla_3 T^{(m)} + \mu_{m+1}\left(T^{(m+1)} - T^{(m)}\right) + q_{(3)m+1} = 0, \quad z = z_{m+1} = h, \tag{20}$$

где $q_{(3)0}$, $q_{(3)m+1}$ – нормальные составляющие вектора удельной мощности поверхностных источников при $z = z_1 = 0$, $z = z_{m+1} = h$ соответственно.

При определении температурного поля многослойных анизотропных тонкостенных элементов конструкций, работающих в условиях термосилового воздействия, естественно, по аналогии с общей теорией оболочек, возникает вопрос о возможности редукции трехмерной пространственной задачи теплопроводности к двухмерной задаче теории оболочек.

Так, например, в работах [10, 11, 18], в предположении линейного распределения температуры по толщине стенки, выводятся уравнения двухмерной термоупругости относительно приведенной к срединной поверхности усредненной температуры. В [21] упомянутый метод усреднения авторы используют для вывода уравнения переноса тепла для тонких пластин, обладающих прямолинейной анизотропией свойств. Квадратичный закон распределения температуры по нормали к отсчетной поверхности оболочки принят в [5]. Предположение о полиномиальном законе распределения температуры по нормальной координате к отсчётной поверхности используется в статье [12]. Подход, основанный на разложении функций, описывающих термодинамическое состояние упругого тела в ряды Фурье по полиномам Лежандра по толщине оболочки, используется в работе [31].

Все перечисленные приемы приводят к повышению порядка разрешающей системы уравнений при увеличении количества слоёв, что неудобно при практических расчётах, так как требует каждый раз создания новой программы численной реализации поставленной задачи. В работе [15] редукция трёхмерной задачи теплопроводности для полиармированных оболочек и пластин к двухмерной успешно осуществляется при помощи метода Бубнова − Галёркина, но авторами не рассматривается фактор многослойности конструкции.

В работах [1, 13] авторами была предложена методика приведения трёхмерной задачи теории упругости к двухмерной задаче теории оболочек, при которой порядок разрешающей системы уравнений не зависит от числа слоёв в многослойной оболочке.

Следуя упомянутой методике, дифференциальное уравнение теплопроводности будем выводить, приняв следующую аппроксимацию распределения температуры по толщине пакета, состоящего из m полиармированных слоёв [14]:

$$T^{(k)} = \Theta^{(k)} + f(z)\Pi, \qquad z_k \le z \le z_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \dots, m. \tag{21}$$

Здесь $\Theta^{(k)} = \Theta^{(k)}(x^1, x^2, z, \tau)$ − функции класса C^2, допускающие представление в замкнутом виде; $\Pi = \Pi(x^1, x^2, \tau)$ − независимая термодинамическая характеристика, учитывающая нелинейное распределение температуры на отсчётной поверхности $\widehat{\Omega}$; $f(z)$ − непрерывно дифференцируемая функция, вид которой зависит от закона взаимодействия между окружающей средой и поверхностями оболочки $z = z_1 = 0$, $z = z_{m+1} = h$.

Если на указанных поверхностях заданы граничные условия (19), (20) первого рода, то функция $f(z)$ должна удовлетворять ограничениям

$$f(z_1) = f(z_{m+1}) = 0, \qquad f'(z_k) = 0, \qquad k = 2, \dots, m. \tag{22}$$

Возможны комбинации граничных условий и соответственно типов ограничений на функцию $f(z)$.

После подстановки выражения (21) в соотношения (19), (20), с учётом ограничений (22), приходим к следующим условиям на границах раздела ПАС:

$$\Theta^{(k)}\Big|_{z=z_{k+1}-0} = \Theta^{(k+1)}\Big|_{z=z_{k+1}+0}, \tag{23}$$

$$\Lambda_{(33)}^{(k)} \frac{\partial \Theta^{(k)}}{\partial z}\bigg|_{z=z_{k+1}-0} = \Lambda_{(33)}^{(k+1)} \frac{\partial \Theta^{(k+1)}}{\partial z}\bigg|_{z=z_{k+1}+0}, \qquad k = 1, 2, \dots, m-1, \tag{24}$$

и на лицевых поверхностях

$$-\Lambda_{(33)}^{(1)} \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial z} - \mu_0\left(T^{(0)} - \Theta^{(1)}\right) + q_{(3)0} = 0, \qquad z = z_1 = 0, \tag{25}$$

$$-\Lambda_{(33)}^{(m)} \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial z} + \mu_{m+1}\left(T^{(m+1)} - \Theta^{(m)}\right) + q_{(3)m+1} = 0, \qquad z = z_{m+1} = h. \tag{26}$$

Функции $\Theta^{(k)}$ найдем из решения уравнения одномерной контактной задачи теплопроводности для оболочки, состоящей из m ПАС [14]:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,\Lambda_{(k)}^{33} \frac{\partial \Theta^{(k)}}{\partial z}\right) + \sqrt{\frac{g}{a}}\, w_T^{(k)} = 0, \qquad k = 1, \dots, m, \tag{27}$$

где $w_T^{(k)}$ − удельная мощность объёмных источников диссипативного характера в k-м ПАС. Дискриминанты метрических тензоров пространства g и поверхности a связаны соотношением [9, с. 201]

$$g = a(1 - 2Hz + Kz^2)^2,$$

где H – средняя, а K – гауссова кривизны поверхности $\widehat{\Omega}$.

Граничные условия (23), (24) остаются прежними, а условия на лицевых поверхностях (25), (26) запишем в формализованном виде:

$$Q_1 \frac{\partial \Theta^{(1)}}{\partial z} + Q_2 \Theta^{(1)} = Q_3, \qquad \text{при} \quad z = z_1 = 0, \tag{28}$$

$$P_1 \frac{\partial \Theta^{(m)}}{\partial z} + P_2 \Theta^{(m)} = P_3 \qquad \text{при} \quad z = z_{m+1} = h, \tag{29}$$

где

$$Q_1 = \Lambda^{(1)}_{(33)}, \qquad Q_2 = -\mu_0, \qquad Q_3 = -\mu_0 T^{(0)} - q_{(3)0},$$

$$P_1 = \Lambda^{(m)}_{(33)}, \qquad P_2 = \mu_{m+1}, \qquad P_3 = \mu_{m+1} T^{(m+1)} + q_{(3)m+1}.$$

Решение контактной задачи (23), (24), (27)–(29) было получено авторами статьи ранее [14], поэтому приведем лишь конечные выражения для искомых функций:

$$\Theta^{(k)} = \Phi_{(k)} - \bar{S}_{k-2} + \left(K^{(k)}_{\lambda} \varphi - (\Lambda^{(k)}_{(33)})^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{W'^{(j)}_T (z_{j+1})}{\vartheta'(z_{j+1})} \right) [\vartheta(z) - \vartheta(z_k)] -$$

$$- W^{(k)}_T (z), \qquad z_k \le z \le z_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{30}$$

где

$$\Phi_{(k)} = \frac{Q_3}{Q_2} + \varphi \left(S_{k-1} - \frac{Q_1}{Q_2} \vartheta'(z_1) \right), \qquad K^{(k)}_{\lambda} = \frac{\Lambda^{(1)}_{(33)}}{\Lambda^{(k)}_{(33)}}, \qquad Q_2 \ne 0,$$

$$\bar{S}_{\ell} = \sum_{j=1}^{\ell} \left\{ (\Lambda^{(j+1)}_{(33)})^{-1} [\vartheta(z_{j+2}) - \vartheta(z_{j+1})] \sum_{i=1}^{j} \frac{W'^{(j)}_T (z_{i+1})}{\vartheta'(z_{i+1})} \right\} + \sum_{j=1}^{\ell+1} W^{(j)}_T (z_{j+1}),$$

$$\bar{\varphi} = P_2 \bar{S}_{m-1} + P_1 \left[\vartheta'(z_{m+1}) (\Lambda^{(m)}_{(33)})^{-1} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{W'^{(j)}_T (z_{j+1})}{\vartheta'(z_{j+1})} - W'^{(m)}_T (z_{m+1}) \right],$$

$$S_{\ell} = \sum_{j=1}^{\ell} K^{(j)}_{\lambda} [\vartheta(z_{j+1}) - \vartheta(z_j)],$$

$$\varphi = \frac{P_3 - P_2 Q_3 Q_2^{-1} + \bar{\varphi}}{P_1 K^{(m)}_{\lambda} \vartheta'(z_{m+1}) + P_2 [S_m - \vartheta'(z_1) Q_1 Q_2^{-1}]},$$

$$\vartheta(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{E}} \ln \left| \dfrac{Kz - H - \sqrt{E}}{Kz - H + \sqrt{E}} \right|, & K \ne 0, \quad E > 0, \\ -(Kz - H)^{-1}, & K \ne 0, \quad E = 0, \\ \ln |1 - 2Hz|, & K = 0, \quad E > 0, \\ z, & K = 0, \quad E = 0, \end{cases}$$

$$W^{(k)}_T (z) = (\Lambda^{(k)}_{(33)})^{-1} \left[\int_{z_k}^{z} \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{z_k}^{z} w^{(k)}_T \sqrt{\frac{g}{a}} \, d\zeta \right] d\zeta.$$

Аналитическое выражение (30) для функций $\Theta^{(k)}$ совместно с условиями (22) позволяет температуру, заданную выражением (21), считать непрерывной функцией в каждой точке стенки оболочки, в том числе и на поверхностях раздела слоев (16). Кроме того, она будет удовлетворять условиям теплообмена (19), (20) на «лицевых» поверхностях многослойного пакета.

Найдём вариацию температуры в k-м ПАС с учетом (30):

$$\delta T_{(k)} = f(z)\delta\Pi, \qquad z_k \le z \le z_{k+1}, \qquad k = 1,\dots,m\,. \tag{31}$$

Подставляя выражения (21), (30), (31) в вариационное уравнение (11) и приравнивая нулю множители при независимой вариации $\delta\Pi$ отдельно в поверхностном и контурном интегралах, получаем разрешающее уравнение относительно искомой функции $\Pi(x^1, x^2, \tau)$:

$$\bar{C}\frac{\partial\Pi}{\partial\tau} - \nabla_\alpha\bar{\lambda}^{\alpha\beta}\nabla_\beta\Pi + \bar{\lambda}^{33}\Pi + \bar{E}\Pi - \nabla_\alpha\bar{\lambda}^\alpha + \bar{\bar{C}} + \bar{\bar{E}} = 0 \tag{32}$$

и соответствующие граничные условия на контуре Γ:

$$Q_\nu + \bar{\lambda}_{\nu\nu}\nabla_\nu\Pi + \bar{\lambda}_{\nu s}\nabla_s\Pi + \bar{\bar{\lambda}}_{\nu\nu} + \bar{\bar{\lambda}}_{\nu s} -$$

$$- \tau_s\left(Q_s + \bar{\lambda}_{s\nu}\nabla_\nu\Pi + \bar{\bar{\lambda}}_{ss}\nabla_s\Pi + \bar{\bar{\lambda}}_{ss} + \bar{\bar{\lambda}}_{s\nu}\right) = 0\,. \tag{33}$$

В (32), (33) приняты следующие обозначения:

$$\bar{\bar{E}} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\Theta^{(k)}\beta^{(k)}_{t(ij)}\dot{\varepsilon}^{(k)}_{(ij)}f(z)\sqrt{\frac{g}{a}}\,dz, \qquad \bar{E} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\beta^{(k)}_{t(ij)}\dot{\varepsilon}^{(k)}_{(ij)}f^2(z)\sqrt{\frac{g}{a}}\,dz\,,$$

$$\bar{\lambda}^{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\Lambda^{\alpha\beta}_{(k)}f^2(z)\sqrt{\frac{g}{a}}\,dz, \qquad \bar{\lambda}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\Lambda^{\alpha\beta}_{(k)}\frac{\partial\Theta^{(k)}}{\partial x^\beta}f(z)\sqrt{\frac{g}{a}}\,dz\,,$$

$$\bar{\lambda}^{33} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\Lambda^{33}_{(k)}[f'(z)]^2\sqrt{\frac{g}{a}}\,dz\,,$$

$$Q_{(\nu)} = \int_0^h(1 - zk_s)\mathbf{\nu}\cdot\mathbf{q}^\Sigma f(z)\,dz, \qquad Q_{(s)} = \int_0^h(1 - zk_s)\mathbf{s}\cdot\mathbf{q}^\Sigma f(z)\,dz\,,$$

$$\bar{\lambda}_{(\nu\nu)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}(1 - zk_s)\Lambda^{(k)}_{(\nu\nu)}f^2(z)\,dz\,,$$

$$\bar{\lambda}_{(\nu s)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}(1 - zk_s)\Lambda^{(k)}_{(\nu s)}f^2(z)\,dz\,,$$

$$\bar{\bar{\lambda}}_{(\nu\nu)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}(1 - zk_s)\Lambda^{(k)}_{(\nu\nu)}\nabla_\nu\Theta^{(k)}f(z)\,dz\,,$$

$$\bar{\bar{\lambda}}_{(\nu s)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}(1 - zk_s)\Lambda^{(k)}_{(\nu s)}\nabla_s\Theta^{(k)}f(z)\,dz\,,$$

$$\bar{\lambda}_{(s\nu)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\Lambda^{(k)}_{(s\nu)}f^2(z)z\,dz, \qquad \bar{\lambda}_{(ss)} = \sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\Lambda^{(k)}_{(ss)}f^2(z)z\,dz\,,$$

$$\overline{\overline{\lambda}}_{(s\nu)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(s\nu)}^{(k)} \nabla_\nu \Theta^{(k)} f(z) z\, dz, \qquad \overline{\overline{\lambda}}_{(ss)} = \sum_{k=1}^{m} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \Lambda_{(ss)}^{(k)} \nabla_s \Theta^{(k)} f(z) z\, dz\,.$$

Здесь $Q_{(\nu)}, \overline{\lambda}_{(\nu\nu)}, \ldots, \overline{\overline{\lambda}}_{(s\nu)}, \overline{\overline{\lambda}}_{(ss)}$ – физические составляющие соответствующих векторов и тензоров в системе координат ℓ_s, ℓ_ν, связанной с контуром Γ; $\mathbf{q}^\Sigma = \mathbf{q}^\Sigma(\ell, z, \tau)$ – заданный вектор плотности теплового потока через боковую поверхность Σ оболочечного элемента.

3. Кинематика деформирования многослойной анизотропной оболочки. Соотношения между деформациями и перемещениями. Уравнения динамики. Неклассические дифференциальные уравнения теории упругих многослойных оболочек будем строить на основе следующего допущения о законе распределения поперечных компонент тензора деформаций по толщине оболочки [2, гл. 3, п. 3.1]

$$\gamma_{\alpha 3}^{\circ(k)} = q_{\alpha\beta}^{\circ(k)} \left[\tau_0^{3\beta} + z h^{-1} \left(\tau_h^{\circ 3\beta} - \tau_0^{3\beta} \right) + f'(z) \pi^\beta \right], \qquad \varepsilon_{33}^{\circ(k)} = 0\,. \tag{34}$$

Здесь $k = 1, 2 \ldots, m$, – порядковый номер слоя, $\gamma_{\alpha 3}^{\circ(k)}$, $\varepsilon_{33}^{\circ(k)}$, $q_{\alpha\beta}^{\circ(k)}$ и $\tau_h^{\circ 3\beta}$ – компоненты (в базисе $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{n}$ поверхности Ω) тензоров деформаций, поперечных сдвиговых податливостей и напряжений, определенных, соответственно, в k-м слое оболочки и на ее лицевой поверхности $z = h$.

В (34) $\pi^\beta = \pi^\beta(x^1, x^2)$ – независимые кинематические характеристики, учитывающие наличие поперечных сдвигов, а $f(z)$ – непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$f'(0) = f'(h) = 0\,. \tag{35}$$

Распределение компонент вектора перемещений по толщине многослойного пакета, соответствующее кинематическому постулату (34), строим в виде [2, с. 41]

$$v_3^{\circ(k)} = w(x^1, x^2), \quad v_\alpha^{\circ(k)} = u_\alpha(x^1, x^2) + z\eta_\alpha(x^1, x^2) + \psi_\alpha^{\circ(k)}(x^1, x^2, z)\,,$$

$$u_\alpha = v_\alpha\big|_{z=0}\,, \qquad \eta_\alpha = -\nabla_\alpha w - b_\alpha^\beta u_\beta\,. \tag{36}$$

Систему нелинейных дифференциальных уравнений движения элемента оболочки запишем в виде [2, с. 66]

$$\ddot{X}^\beta - b_\alpha^\beta \ddot{Y}^\alpha - \nabla_\alpha \mathbf{T}^{\alpha\beta} + b_\lambda^\beta \nabla_\alpha \mathbf{M}^{\alpha\lambda} - b_\alpha^\beta \mathbf{H}^{\alpha\lambda} \eta_\lambda = \tau_+^{3\beta} - \tau_0^{3\beta} - h b_\lambda^\beta \tau_+^{3\lambda}\,,$$

$$\ddot{I} + \nabla_\beta \ddot{Y}^\beta - b_{\alpha\beta} \mathbf{T}^{\alpha\beta} - \nabla_\beta \nabla_\alpha \mathbf{M}^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \left(\mathbf{H}^{\alpha\beta} \eta_\beta \right) =$$

$$= \sigma_+^{33} - \sigma_0^{33} + \left(\tau_0^{3\beta} - \tau_+^{3\beta} \right) \eta_\beta + h \nabla_\beta \tau_+^{3\beta}\,,$$

$$\ddot{Z}^\beta - \nabla_\alpha \mathbf{S}^{\alpha\beta} + \mathbf{Q}^\beta = \overset{+}{\tau}_{3\alpha} \mu_{(m)}^{\circ\alpha\beta}(x^1, x^2, h)\,. \tag{37}$$

Соответствующая система граничных условий требует задания в каждой точке граничного контура Γ значений семи величин, альтернативно выбираемых из следующих семи пар:

$$\left(\mathbf{T}_{\nu s} - k_s \mathbf{M}_{\nu s},\ u_s \right), \quad \left(\mathbf{T}_{\nu\nu} + \tau_s \mathbf{M}_{\nu s},\ u_\nu \right), \quad \left(\mathbf{M}_{\nu\nu},\ \eta_\nu \right),$$

$$\left(\nu_\alpha \nabla_\beta \mathbf{M}^{\beta\alpha} + \partial \mathbf{M}_{\nu s} / \partial \ell_s - \mathbf{H}_{\nu s} \eta_s - \mathbf{H}_{\nu\nu} \eta_\nu - \ddot{Y}_\nu,\ w \right),$$

$$\left(S_{\nu s},\ \pi_s \right), \quad \left(S_{\nu\nu},\ \pi_\nu \right), \quad \left(\nu_\alpha \left(\Phi^{\alpha\beta} \nabla_\beta \Pi + \Psi^\alpha \right),\ \Pi \right). \tag{38}$$

Начальные условия для системы дифференциальных уравнений (37) записываем в таком виде:

$$u_\alpha\big|_{t=0} = u_\alpha^0, \qquad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \dot{u}_\alpha^0, \qquad w\big|_{t=0} = w^0, \qquad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \dot{w}^0,$$

$$\pi_\alpha\big|_{t=0} = \pi_\alpha^0, \qquad \frac{\partial \pi_\alpha}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \dot{\pi}_\alpha^0, \qquad \Pi\big|_{t=0} = \Pi^0. \tag{39}$$

Таким образом, установлена замкнутая система линейных дифференциальных уравнений с частными производными, описывающая процесс термоупругого деформирования многослойной композитной оболочки с конечной сдвиговой жесткостью. Эта система включает следующие зависимости:

- физические соотношения (12);
- закон (36) распределения компонент вектора перемещений по толщине пакета слоев;
- зависимости (34);
- уравнения движения (37) и теплопроводности (32).

Подстановка в последние указанных соотношений приводит к системе шести линейных дифференциальных уравнений в частных производных с тремя независимыми переменными x^1, x^2, t относительно шести искомых функций – пяти обобщенных перемещений u_1, u_2, w, π_1, π_2 и функции температуры Π. Структура уравнений этой системы и ее порядок от числа слоев оболочки не зависит и равен четырнадцати. В корректно поставленной задаче такой порядок системы требует задания на границе области семи краевых условий; число краевых условий (38) удовлетворяет этому требованию.

Замкнутая система уравнений термоупругого деформирования слоистой композитной оболочки, позволяет учесть сопряжение полей деформаций и температур в теле оболочки, явление поперечных сдвигов в ее слоях, нелинейный закон распределения температуры по поперечной координате.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №15-01-00825.

1. *Андреев А. Н., Немировский Ю. В.* К теории упругих многослойных анизотропных оболочек // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. – № 5. – С. 87–96.
2. *Андреев А. Н., Немировский Ю. В.* Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
3. *Бабин А. И., Немировский Ю. В.* Температурные напряжения в коллекторах машин постоянного тока // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XVII Межресп. конф., Новосибирск, 3–5 июля 2001 г. / Под ред. В. М. Фомина. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. – С. 12–26.
4. *Бабин А. И., Немировский Ю. В.* Численное решение несвязной задачи термоупругости многослойных полиармированных оболочек // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Тр. XVI Межресп. конф., Новосибирск, 6–8 июля 1999 г. / Под ред. В. М. Фомина. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – С. 17–25.
5. *Даниловская В. И.* Приближённое решение задачи о нестационарном тепловом температурном поле в тонкой оболочке произвольной формы // Изв. АН СССР. ОТН. – 1957. – № 9. – С. 157–158.
6. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – Москва: Мир, 1964. – 456 с.
   То же: *Groot de S. R., Mazur P.* Non-equilibrium thermodynamics. – Amsterdam: North-Holland, 1962. – x+510 p.
7. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. – Москва: Мир, 1975. – 304 с.
   То же: *Gyarmati I.* Non-equilibrium thermodynamics. Field theory and variational principles. – Berlin – New York: Springer, 1970. – xi + 184 p.
8. *Зарубин В. С.* Прикладные задачи термопрочности элементов конструкций. – Москва: Машиностроение, 1985. – 296 с.

9. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1. Аппарат исследования. Общие основания теории и внутренняя геометрия поверхности / Под ред. Г. Б. Гуревича. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1947. – 512 с.
10. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Жидик У. В., Флячок В. М.* Термомеханічна модель неоднорідних анізотропних оболонок з початковими деформаціями // Доп. НАН України. – 2010. – № 11. – С. 45–50.
11. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
12. *Мотовиловецъ І. О.* Про виведення рівнянь теплопровідності пластини // Прикл. механіка. – 1960. – **6**, № 3. – С. 343–346.
13. *Немировский Ю. В.* К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин // Механика полимеров. – 1972. – № 5. – С. 861–873.
   То же: *Nemirovskii Yu. V.* On the theory of thermoelastic bending of reinforced shells and plates // Polymer Mech. – 1972. – **8**, No. 5. – P. 750–759.
14. *Немировский Ю. В., Бабин А. И.* Нестационарная теплопередача в многослойных анизотропных оболочках вращения // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 35. – С. 106–114.
   То же: *Nemirovskii Yu. V., Babin A. I.* Nonstationary heat transfer in multilayer anisotropic shells of revolution // J. Math. Sci. – 1992. – **67**, No. 2. – P. 2917–2924.
15. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Теплопроводность волокнистых оболочек // Теплофизика и аэромеханика. – 1998. – **5**, № 2. – С. 215–235.
16. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – Москва: Мир, 1970. – 256 с.
   То же: *Nowacki W.* Dynamic problems of thermoelasticity. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1986. – iii + 566 p.
17. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
   То же: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – Reading: Addison-Wesley, 1963. – 288 p.
18. *Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В.* К решению краевых задач для термоупругих анизотропных оболочек при локализованных воздействиях // Теоретическая и прикладная механика: V-й Национальный конгресс. – Варна, 1985. – Кн. 4. – С. 231–236.
19. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 310 с.
20. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовык В. И., Лозбень В. Л.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. – Киев: Наук. думка, 1977. – 160 с.
21. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
22. *Попов В. М.* Теплообмен в зоне контакта разъёмных и неразъёмных соединений. – Москва: Энергия, 1971. – 216 с.
23. *Попов В. М.* Теплообмен через соединения на клеях. – Москва: Энергия, 1974. – 304 с.
24. *Теоретические* основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: Справочник / Под общ. ред. В. А. Григорьева, В. М. Зорина. – Москва: Энергоатомиздат, 1988. – 560 с. – (Теплоэнергетика и теплотехника; Кн. 2.)
25. *Koiter W. T.* Foundations and basic equations of shell theory. A survey of recent progress // Proc. 2-nd IUTAM Symp. on the Theory of Thin Shells (Copenhagen, Denmark, Sept. 1967) / Ed. by F. I. Niordson. – Berlin etc.: Springer, 1969. – P. 93–105.
26. *Noor A. K.* Bibliography of monographs and surveys on shells // Appl. Mech. Rev. – 1990. – **43**, No. 9. – P. 223–234.
27. *Pietraszkiewicz W.* Addendum to: Bibliography of monographs and surveys on shells // Appl. Mech. Rev. – 1992. – **45**, No. 6. – P. 249–250.
28. *Reddy J. N.* Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 856 p.
29. *Shell-like* structures. Non-classical theories and applications / Ed. by H. Altenbach, V. A. Eremeyev. – New York etc.: Springer, 2011. – Ser. Advanced Structured Materials, Vol. 15. – xi + 750 p.
30. *Shen H.-S.* Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 280 p.
31. *Zozulya V. V.* A high order theory for linear thermoelastic shells: Comparison with classical theories // J. Eng. – 2013. – **2013**. – Article ID 590480. – 19 p.

ЗВ'ЯЗАНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ. I. ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ПРОБЛЕМИ

На основі загальної інтегральної форми варіаційного принципу найменшого розсіювання енергії нерівноважної термодинаміки виведено некласичне нестаціонарне рівняння теплопровідності для багатошарових поліармованих оболонок довільної форми. Розроблено методику визначення інтегральних коефіцієнтів теплопровідності армованого шару і побудовано ефективні визначальні рівняння його термопружної поведінки. Побудовано некласичної модель деформування шаруватої оболонки і нелінійну модель розподілу теплового потоку по товщині оболонки, що дозволяє врахувати поперечні зсувні деформації, забезпечити умови механічного та теплового контакту шарів і умови термомеханічного навантаження на лицьових поверхнях оболонки. Побудовано замкнуту система диференціальних рівнянь і відповідних їм крайових і початкових умов зв'язаної задачі термопружного деформування шаруватих композитних оболонок і пластин.

COUPLED THERMOELASTICITY PROBLEM FOR MULTILAYERED COMPOSITE SHELLS OF REVOLUTION. I. THEORETICAL ASPECTS OF THE PROBLEM

On the basis of general integral form of the variation principle of the least dissipation of energy of the non-equilibrium thermodynamics, the nonclassical nonsteady heat conduction equation is deducted for multilayered arbitrary shape polyreinforced shells. The method for determination of the integral heat conductivities of a reinforsed layer is developed and the effective constitutive equations of its thermoelastic behavior are constructed. The non-classical model of deformation of the multilayer shell and nonlinear model of heat flux distribution along its thickness are formulated which allows to take into account the transverse shear deformations, and ensure the conditions of mechanical and thermal contact of the layers and thermomechanical loading on the facial surfaces of the shell. The closed system of differential equations and corresponding initial and boundary conditions of a coupled problem of thermoelastic deformation of layered composite shells and plates is constructed.

[1] Ин-т теорет. и прикл. механики
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия,
[2] Кузбасс. гос. техн. ун-т, Кемерово, Россия

Получено
27.03.16