УДК 517.95

Г. П. Лопушанська[1], О. М. М'яус[2]

ВІДНОВЛЕННЯ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ У ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ

Доведено коректність оберненої задачі про знаходження пари функцій: класичного розв'язку $u(x,t)$ першої крайової задачі для лінійного рівняння дифузії з регуляризованою дробовою похідною порядку $\alpha \in (1,2)$ за часом у прямокутній області $(0,\ell) \times (0,t_0]$ і невідомих початкових значень функції $u(x,t)$ при додатково заданих її значеннях у деякий фіксований момент часу t_0.

Вступ. Класична розв'язність задачі Коші для рівнянь з регуляризованою похідною [4, 16, 30] дробового порядку $\alpha \in (0,1)$ за часом була предметом досліджень у [2, 5, 6, 14, 15, 18, 19] та інших працях. У [7, 8, 10] доведено розв'язність задачі Коші у різних просторах узагальнених функцій.

Достатні умови класичної розв'язності першої крайової задачі для рівнянь вигляду

$$D_t^\alpha u(x,t) - a^2 \Delta u(x,t) = F_0(x,t), \qquad a^2 = \text{const} > 0$$

з регуляризованою похідною $D_t^\alpha u$ дробового порядку $\alpha \in (0,1)$ одержано в [23–26]. Розв'язки побудовано у вигляді рядів Фур'є за власними функціями відповідних задач Штурма – Ліувілля. Крайові задачі для рівнянь із декількома дробовими похідними досліджувались, наприклад, у [11, 12, 30]. Різні обернені задачі (див. [3]) для такого типу рівнянь вивчались, зокрема, у [9, 17, 20, 21, 25–27, 31, 32].

У цій статті встановлюємо коректність оберненої крайової задачі

$$D_t^\alpha u - u_{xx} = F_0(x,t), \qquad (x,t) \in (0,\ell) \times (0,t_0], \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \qquad t \in [0,t_0], \tag{2}$$

$$u(x,0) = F_1(x), \qquad u_t(x,0) = F_2(x), \qquad x \in [0,\ell], \tag{3}$$

$$u(x,t_0) = F_3(x), \qquad x \in [0,\ell], \tag{4}$$

де $\alpha \in (1,2)$; F_0, F_2, F_3 – задані функції; t_0 – задане додатне число; u, F_1 – невідомі функції.

1. Позначення і допоміжні твердження. Використовуємо позначення: $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $Q_0 = (0,\ell) \times (0,t_0]$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ – простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ – простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, (f,φ) – значення $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ на основній функції $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$. Через $f * g$ позначаємо згортку узагальнених функцій f і g [13, с. 111]. Використовуємо функцію $f_\lambda \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$:

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{\theta(t) t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & \lambda > 0, \\ f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \le 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(\lambda)$ – ґамма-функція, $\theta(t)$ – одинична функція Гевісайда. Виконуються такі співвідношення [1, с. 143]:

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}. \tag{5}$$

Нагадаємо, що похідна $v^{(\alpha)}(t)$ Рімана – Ліувілля функції $v(t)$ порядку $\alpha > 0$ визначається формулою [1, с. 143]

$$v^{(\alpha)}(t) = f_{-\alpha}(t) * v(t),$$

зокрема,

$$v^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} v(\tau)\, d\tau, \qquad n-1 < \alpha < n,$$

а регуляризована похідна функції v (похідна Капуто – Джрбашяна) – формулою [4, 29]

$$D^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} v(\tau)\, d\tau, \qquad n-1 < \alpha < n.$$

Тоді

$$D_t^\alpha v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau - \frac{v(x,0)}{t^\alpha} \right], \qquad \alpha \in (0,1),$$

$$D_t^\alpha v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{v_{\tau\tau}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-1}}\, d\tau - \frac{v_t(x,0)}{t^{\alpha-1}} \right], \quad \alpha \in (1,2),$$

та

$$D_t^\alpha v(x,t) = v_t^{(\alpha)}(x,t) - f_{1-\alpha}(t) v(x,0), \qquad \alpha \in (0,1),$$

$$D_t^\alpha v(x,t) = v_t^{(\alpha)}(x,t) - f_{1-\alpha}(t) v(x,0) - f_{2-\alpha}(t) v_t(x,0), \qquad \alpha \in (1,2),$$

вважаємо, що $D_t^1 u = \partial u / \partial t$.

Використовуємо функцію Міттаг – Леффлера [4] $E_{\alpha,\mu}(x) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{x^p}{\Gamma(p\alpha + \mu)}$.

Функція $E_{\alpha,\mu}(-x)$, $x > 0$, є нескінченно диференційовною при $\alpha \in (0,2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, і має оцінку

$$E_{\alpha,\mu}(-x) \le \frac{r_{\alpha,\mu}}{1+x}, \qquad x > 0,$$

де $r_{\alpha,\mu}$ – додатна стала.

Нехай $C(Q_0)$, $C(\bar{Q}_0)$, $C[0,t_0]$ – класи неперервних відповідно в Q_0, $\bar{Q}_0$ та на $[0,t_0]$ функцій; $C_{2,\alpha}(Q_0)$ – клас функцій $v \in C(Q_0)$ з неперервними похідними v_{xx}, $D_t^\alpha v$ в Q_0; $C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0) = \{v \in C_{2,\alpha}(Q_0) : v, v_t \in C(\bar{Q}_0)\}$ при $\alpha \in (1,2]$; $C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0) = C_{2,\alpha}(Q_0) \cap C(\bar{Q}_0)$ при $\alpha \in (0,1]$; $\tilde{C}^{2s+j}(0,\ell)$ – клас функцій $F \in C^{2s+j-1}[0,\ell]$ з обмеженою на $(0,\ell)$ похідною порядку $2s+j$ і таких, що

$$F(0) = F(\ell) = F''(0) = F''(\ell) = \ldots = F^{(2s)}(0) = F^{(2s)}(\ell) = 0,$$

$$\tilde{C}^{2s+j}(Q_0) = \{v \in C(\bar{Q}_0) : v(x,t) \in \tilde{C}^{2s+j}(0,\ell)\ \forall t \in (0,t_0]\}, \quad j \in \{1,2\},$$

$$\|v\|_{C(Q_0)} = \sup_{(x,t)\in Q_0} |v(x,t)|,$$

$$\|v\|_{C^r(0,\ell)} = \|v\|_{\tilde{C}^r(0,\ell)} = \max_{m=0,\ldots,r} \sup_{x\in(0,\ell)} \left|v^{(m)}(x)\right|,$$

$$\|v\|_{\tilde{C}^r(Q_0)} = \|v\|_{C^r(Q_0)} = \max_{m=0,\ldots,r} \sup_{(x,t)\in Q_0} \left| \frac{\partial^m v(x,t)}{\partial x^m} \right|, \qquad r \in \mathbb{Z}_+.$$

Означення 1. Розв'язком задачі (1)−(4) називаємо пару функцій

$$(u, F_1) \in \mathcal{M}_\alpha := C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0) \times \tilde{C}^1(0, \ell),$$

що задовольняє рівняння (1) в Q_0 та умови (2)−(4).

Лема 1. *При* $\alpha \in (1,2)$ *розв'язки рівняння*

$$D^\alpha T + \lambda T = 0 \tag{6}$$

описуються формулою

$$T(t) = C_1 E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) + C_2 t E_{\alpha,2}(-\lambda t^\alpha), \qquad t \geq 0, \tag{7}$$

де C_1, C_2 *− довільні сталі.*

Д о в е д е н н я. Використовуючи наведений вище зв'язок між похідними дробового порядку Капуто та Рімана − Ліувілля, запишемо рівняння (6) у вигляді

$$f_{-\alpha} * T + \lambda T = f_{1-\alpha} T(0) + f_{2-\alpha} T'(0).$$

Застосовуючи до обох частин цього рівняння оператор $f_\alpha *$ та використовуючи формулу (5), одержуємо рівняння, еквівалентне рівнянню (6):

$$T + \lambda f_\alpha * T = f_1 T(0) + f_2 T'(0), \qquad t \geq 0, \tag{8}$$

або в іншій формі

$$T(t) = -\lambda \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} T(\tau)\, d\tau + T(0)\theta(t) + T'(0) t \theta(t).$$

Одержане інтегральне рівняння Вольтерра другого роду розв'язуємо методом послідовних наближень:

$$T^0(t) = T(0)\theta(t) + T'(0)t\theta(t) = T(0) f_1(t) + T'(0) f_2(t),$$

$$T^{j+1}(t) = T^0(t) - \lambda f_\alpha(t) * T^j(t), \qquad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Знаходимо

$$T(t) = T(0)\sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda)^p f_{p\alpha+1}(t) + T'(0)\sum_{p=0}^{\infty} (-\lambda)^p f_{p\alpha+2}(t) =$$

$$= T(0)\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p t^{p\alpha}}{\Gamma(p\alpha+1)} + T'(0)\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^p t^{p\alpha+1}}{\Gamma(p\alpha+2)} =$$

$$= T(0)\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^p}{\Gamma(p\alpha+1)} + T'(0) t \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^p}{\Gamma(p\alpha+2)}.$$

Одержана функція має вигляд (7), де покладено $C_1 = T(0)$, $C_2 = T'(0)$. ♦

Зауважимо, що розв'язки рівняння (6) при $\alpha \in (0,1]$ мають вигляд

$$T(t) = C_1 E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha), \qquad t \geq 0,$$

де C_1 − довільна стала.

Лема 2. *При* $\alpha \in (0,2)$, $g \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ *рівняння*

$$T^{(\alpha)} + \lambda T = g \tag{9}$$

має (єдиний у $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$*) розв'язок*

$$T(t) = \theta(t) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha) * g(t), \qquad t \geq 0. \tag{10}$$

Д о в е д е н н я. Застосовуючи оператор $f_\alpha *$ до обох частин рівняння (9), як при доведенні леми 1, одержуємо інтегральне рівняння Вольтерра другого роду

$$T = -\lambda f_\alpha * T + f_\alpha * g\,,$$

яке розв'язуємо методом послідовних наближень:

$$T^0(t) = (f_\alpha * g)(t)\,,$$

$$T^{j+1}(t) = (f_\alpha * g)(t) - \lambda f_\alpha * (f_\alpha * T^j)(t), \qquad j \in \mathbb{Z}_+\,.$$

Знаходимо

$$T(t) = \sum_{p=1}^{\infty} (-\lambda)^{p-1} f_{p\alpha}(t) * g(t) = \theta(t) \sum_{m=0}^{\infty} (-\lambda)^m f_{m\alpha+\alpha}(t) * g(t) =$$

$$= \theta(t) \sum_{m=0}^{\infty} (-\lambda)^m \frac{t^{m\alpha+\alpha-1}}{\Gamma(m\alpha+\alpha)} * g(t) =$$

$$= \theta(t) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha) * g(t)\,.$$

Отже, показано, що $\omega(t) = \theta(t)t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha)$ – фундаментальна функція оператора $L: LT = T^{(\alpha)} + \lambda T$ у $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Єдиність розв'язку випливає з властивостей згортки у просторі $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. ♦

2. Розв'язність задачі. Розв'язок прямої задачі (1)–(3) шукатимемо у вигляді ряду Фур'є

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}, \qquad (x,t) \in Q_0 \tag{11}$$

за власними функціями $X_k(x) = \sin\dfrac{k\pi x}{\ell}$, що відповідають власним значенням $\lambda_k = \left(\dfrac{k\pi}{\ell}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$, задачі Штурма – Ліувілля

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad x \in (0,\ell), \qquad X(0) = X(\ell) = 0\,. \tag{12}$$

Далі через $F_{0k}(t)$, F_{jk} позначаємо коефіцієнти розвинень у ряди Фур'є за власними функціями задачі (12) відповідно функцій $F_0(x,t)$, $F_j(x)$, $j \in \{1,2,3\}$.

Для знаходження невідомих функцій $T_k(t)$ одержуємо задачі Коші

$$D^\alpha T_k + \lambda_k T_k = F_{0k}(t), \qquad t \in (0,t_0]\,, \tag{13}$$

$$T_k(0) = F_{1k}, \qquad T'_k(0) = F_{2k}, \qquad k \in \mathbb{N}\,. \tag{14}$$

З огляду на зв'язок між дробовими похідними (регуляризованою та в сенсі Рімана – Ліувілля) кожна із задач (13), (14) еквівалентна рівнянню

$$T_k^{(\alpha)} + \lambda_k T_k = F_{0k}(t) + f_{1-\alpha}(t)F_{1k} + f_{2-\alpha}(t)F_{2k}, \qquad t \in (0,t_0]\,. \tag{15}$$

Згідно з лемами 1, 2, знаходимо розв'язки рівнянь (15):

$$T_k(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * F_{0k}(t) + F_{1k}E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) + F_{2k} t E_{\alpha,2}(-\lambda_k t^\alpha)\,,$$

$$t \in (0,t_0], \qquad k \in \mathbb{N}\,. \tag{16}$$

Із зображення $E_{\alpha,\mu}(-\lambda_k t^\alpha)$ за допомогою H-функцій Фокса [14, 22] та теореми 1.7 із [22] одержуємо асимптотику

$$E_{\alpha,\mu}(-\lambda_k t^\alpha) = O\left(\frac{1}{\lambda_k t^\alpha}\right), \qquad \lambda_k t^\alpha \to \infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При неперервній та обмеженій в Q_0 функції $F_0(x,t)$ для перших доданків (позначимо їх через $T_{k0}(t)$) у формулах (16) маємо оцінки

$$\sup_{t\in(0,T]} |F_{0k}(t)| \int_0^t \tau^{\alpha-1} \left|E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha)\right| d\tau \le$$

$$\le K_0 r_{\alpha,\alpha} \int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1} d\tau}{1+\lambda_k \tau^\alpha} = \frac{K_0 r_{\alpha,\alpha} \ln(1+\lambda_k t^\alpha)}{\alpha \lambda_k} \le \frac{K_0 K_1}{k^{2-2s}}$$

при довільному $s > 0$. Тут $K_0 = \sup\limits_{(x,t)\in Q_0} |F_0(x,t)|$, K_1 (і далі K_2) − додатні сталі, які не залежать від даних задачі. Тоді при $0 < s < \frac{1}{2}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * F_{0k}(t)\right] \sin\frac{k\pi x}{\ell} \tag{17}$$

рівномірно та абсолютно збігається в $\bar{Q}_0$. Міркуючи далі подібним чином, одержуємо, що при $F_0 \in \tilde{C}^2(Q_0)$ продиференційований двічі за x ряд (17) рівномірно та абсолютно збігається в $\bar{Q}_0$. Оскільки (за лемою 2) функція $t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k t^\alpha) * F_{0k}(t)$ задовольняє рівняння (9) з $g(t) = F_{0k}(t)$, то при $F_0 \in$ $\in \tilde{C}^2(Q_0)$ одержуємо також існування неперервних похідних $T_{k0}^{(\alpha)}(t)$, $D^\alpha T_{k0}(t)$, $t \in [0,T]$, $k \in \mathbb{N}$.

При $F_j \in C[0,\ell]$ матимемо

$$\left|F_{jk} E_{\alpha,j}(-\lambda_k t^\alpha)\right| \le \frac{C_j}{1+\lambda_k \tau^\alpha}, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad j \in \{1,2\},$$

де C_j − додатні сталі (залежні від $\max\limits_{x\in[0,\ell]} |F_j(x)|$), $j \in \{1,2\}$. Тоді ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{jk} E_{\alpha,j}(-\lambda_k t^\alpha) \sin\frac{k\pi x}{\ell}, \qquad j \in \{1,2\}, \tag{18}$$

рівномірно й абсолютно збігаються в $\bar{Q}_0$. Якщо $F_j \in \tilde{C}^1(0,\ell)$, то

$$F_{jk} = \frac{2\int_0^\ell F_j'(x)\cos(\lambda_k^{1/2} x)\,dx}{\ell \lambda_k^{1/2}} = \frac{\tilde{F}_{jk}}{\lambda_k^{1/2}},$$

де $\tilde{F}_{jk}$, $k \in \mathbb{N}$, − коефіцієнти розвинення у ряд Фур'є функції $F_j'(x)$ за системою $\Phi = \left\{1, \{\cos(\lambda_k^{1/2} x)\}_{k\in\mathbb{N}}\right\}$. Одержуємо, що збіжність кожного з рядів (18) випливає зі збіжності відповідного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{|\tilde{F}_{jk}|}{\lambda_k^{1/2}(1+\lambda_k \tau^\alpha)}$, $j \in \{1,2\}$.

Отже, продиференційовані двічі за x ряди (18) збігаються рівномірно й абсолютно в $\bar{Q}_0$, а враховуючи, що кожен з рядів (18) задовольняє рівняння (9) із $g(t) = f_{j-\alpha}(t) F_{jk}$, $j \in \{1,2\}$, за лемою 2 одержуємо існування неперервних регуляризовних похідних (порядку α) відповідних доданків у формулі (16). Сформулюємо одержаний результат.

Теорема 1. *Нехай* $\alpha \in (1,2)$, $F_0 \in \tilde{C}^2(Q_0)$, $F_j \in \tilde{C}^1(0,\ell)$, $j \in \{1,2\}$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0)$ *задачі* (1)–(3), *який має вигляд* (11), *де* $T_k(t)$ *визначаються формулою* (16). *Справджуються оцінки*

$$\|u\|_{C(Q_0)} \le a_0 \|F_0\|_{C(Q_0)} + a_1 \|F_1\|_{C(0,\ell)} + a_2 \|F_2\|_{C(0,\ell)},$$

$$\|u_{xx}\|_{C(Q_0)} + \left\|D_t^\alpha u\right\|_{C(Q_0)} \le \hat{a}_0 \|F_0\|_{C^2(Q_0)} + \hat{a}_1 \|F_1\|_{C^1(0,\ell)} + \hat{a}_2 \|F_2\|_{C^1(0,\ell)},$$

де a_j, $\hat{a}_j$, $j \in \{0,1,2\}$, – *додатні сталі, які не залежать від даних задачі.*

Зауважимо, що єдиність розв'язку задачі та неперервна залежність його від даних задачі випливає з одержаних оцінок.

Оскільки у випадку $\alpha \in (0,1)$ функція $E_{\alpha,1}(-x)$ не має дійсних додатних нулів, $E_{\alpha,\mu}(-x) \ge 0$ при $x \ge 0$ для всіх $\mu \ge \alpha$ [28], то у випадку $\alpha \in$ $\in (0,1)$ можна послабити умови щодо функції F_0, за яких задача (1)–(3) має розв'язок в $C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0)$. При неперервності та обмеженості функції F_0 в Q_0 для першого доданка у формулі (16) маємо оцінку

$$\sup_{t\in(0,T]} |F_{0k}(t)| \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha)\, d\tau = \frac{K_0[1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_k \tau^\alpha)]}{\lambda_k} \le \frac{K_0 K_2}{\lambda_k}.$$

Одержуємо, що ряд (17) рівномірно й абсолютно збігається в $\bar{Q}_0$. Якщо $F_0 \in \tilde{C}^1(Q_0)$, то

$$F_{0k}(t) = \frac{2\int_0^\ell (F_0)_x(x,t)\cos(\lambda_k^{1/2} x)\, dx}{\ell \lambda_k^{1/2}} = \frac{F_k(t)}{\lambda_k^{1/2}},$$

де $F_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, – коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є функції $(F_0)_x(x,t)$ за системою Φ. Тоді продиференційований двічі за x ряд (17) збігається рівномірно та абсолютно в $\bar{Q}_0$.

Зауважимо, що у випадку $\alpha \in (0,1]$ замість умов (3) маємо одну умову

$$u(x,0) = F_1(x), \qquad x \in [0,\ell].$$

Враховуючи наведене та теорему 1, отримуємо

Наслідок 1. *Нехай* $\alpha \in (0,1]$, $F_0 \in \tilde{C}^1(Q_0)$, $F_1 \in \tilde{C}^1(0,\ell)$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0)$ *задачі* (1)–(3), *який має вигляд* (11), *де* $T_k(t)$ *визначаються формулами* (16), *які не містять доданків з* F_{2k}, $k \in \mathbb{N}$. *Правильні оцінки*

$$\|u\|_{C(Q_0)} \le a_0 \|F_0\|_{C(Q_0)} + a_1 \|F_1\|_{C(0,\ell)},$$

$$\|u_{xx}\|_{C(Q_0)} + \left\|D_t^\alpha u\right\|_{C(Q_0)} \le \hat{a}_0 \|F_0\|_{C^1(Q_0)} + \hat{a}_1 \|F_1\|_{C^1(0,\ell)},$$

де a_j, $\hat{a}_j$, $j \in \{0,1\}$, – *додатні сталі, що не залежать від даних задачі.*

У випадку $\alpha \in (0,1]$ функція $E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha) \ne 0$ при довільному $t_0 > 0$. При $\alpha \in (1,2)$ функція $E_{\alpha,1}(-x)$ має скінченну кількість дійсних додатних нулів [4, с. 142], а отже, існує таке додатне число t_0, що

$$E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha) \ne 0, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Теорема 2. *Нехай* $\alpha \in (1,2)$, $F_0 \in \tilde{C}^3(Q_0)$, $F_2 \in \tilde{C}^2(0,\ell)$, $F_3 \in \tilde{C}^4(0,\ell)$ *та число* t_0 *задовольняє умову* (19). *Тоді існує єдиний розв'язок* $(u, F_1) \in \mathcal{M}_\alpha$ *оберненої задачі* (1)–(4). *Функція* $u(x,t)$ *визначається формулами* (11), (16), *а*

$$F_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{1k} \sin \frac{k\pi x}{\ell}, \qquad x \in (0,\ell),$$

де

$$F_{1k} = \frac{F_{3k} - \left[\int\limits_0^{t_0} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) F_{0k}(t_0 - \tau)\, d\tau + F_{2k} t_0 E_{\alpha,2}(-\lambda_k t_0^\alpha) \right]}{E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha)}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Розв'язок (u, F_1) *задачі неперервно залежить від даних* (F_0, F_2, F_3) *і виконуються оцінки*

$$\|u\|_{C(Q_0)} + \|F_1\|_{C(0,\ell)} \le b_1 \|F_0\|_{C^2(Q_0)} + b_2 \|F_2\|_{C^1(0,\ell)} + b_3 \|F_3\|_{C^3(0,\ell)},$$

$$\|u_{xx}\|_{C(Q_0)} + \left\|D_t^\alpha u\right\|_{C(Q_0)} + \|F_1\|_{C^1(0,\ell)} \le$$

$$\le \hat{b}_1 \|F_0\|_{C^3(Q_0)} + \hat{b}_2 \|F_2\|_{C^2(0,\ell)} + \hat{b}_3 \|F_3\|_{C^4(0,\ell)},$$

де b_j, $\hat{b}_j$, $j \in \{1,2,3\}$, *– додатні сталі, що не залежать від даних задачі.*

Д о в е д е н н я. За теоремою 1 при відомій $F_1 \in \tilde{C}^1(0,\ell)$ існує єдиний розв'язок $u \in C_{2,\alpha}(\bar{Q}_0)$ прямої задачі (1)–(3), що має вигляд (11), а $T_k(t)$ визначаються формулою (16). Підставляючи цей розв'язок в додаткову умову (4), одержуємо

$$\int\limits_0^{t_0} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) F_{0k}(t_0 - \tau)\, d\tau +$$

$$+ F_{1k} E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha) + F_{2k} t_0 E_{\alpha,2}(-\lambda_k t_0^\alpha) = F_{3k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

звідки знаходимо вирази (20) для невідомих коефіцієнтів F_{1k}, $k \in \mathbb{N}$, розвинення функції $F_1(x)$ у ряд Фур'є. Обґрунтуємо рівномірну збіжність такого розвинення і належність суми ряду до класу $\tilde{C}^1(0,\ell)$.

Вище наведено асимптотику функцій Міттаг – Леффлера при великих значеннях аргумента, за якою функція $\dfrac{1}{E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha)}$ може зростати, як λ_k при $k \to \infty$. Однак при доведенні теореми 1 для $F_0 \in \tilde{C}^2(Q_0)$ одержуємо рівномірну та абсолютну збіжність в $\bar{Q}_0$ ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int\limits_0^{t_0} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) F_{0k}(t_0 - \tau)\, d\tau}{E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha)} \sin \frac{k\pi x}{\ell},$$

який при $F_0 \in \tilde{C}^3(Q_0)$ можна почленно диференціювати за x. Знову ж, як при доведенні теореми 1, враховуючи однаковий характер поведінки функцій $E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha)$ та $E_{\alpha,2}(-\lambda_k t_0^\alpha)$ при $\lambda_k \to \infty$, для $F_2 \in \tilde{C}^1(0,\ell)$ одержуємо, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{2k} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) \sin \frac{k\pi x}{\ell}}{E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha)}$$

рівномірно й абсолютно збігається в $\bar{Q}_0$, а для $F_2 \in \tilde{C}^2(0,\ell)$ допускає почленне диференціювання за x. Із подібних міркувань випливає, що при $F_3 \in \tilde{C}^3(0,\ell)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{3k} \sin \frac{k\pi x}{\ell}}{E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha)}$$

рівномірно й абсолютно збігається в $\bar{Q}_0$, а при $F_3 \in \tilde{C}^4(0,\ell)$ допускає почленне диференціювання за x. Із вигляду функції $F_1(x)$, формули (20), і сказаного вище одержуємо оцінки

$$\|F_1\|_{C(0,\ell)} \le c_1 \|F_0\|_{C^2(Q_0)} + c_2 \|F_2\|_{C^1(0,\ell)} + c_3 \|F_3\|_{C^3(0,\ell)},$$

$$\|F_1\|_{C^1(0,\ell)} \le \hat{c}_1 \|F_0\|_{C^3(Q_0)} + \hat{c}_2 \|F_2\|_{C^2(0,\ell)} + \hat{c}_3 \|F_3\|_{C^4(0,\ell)},$$

де c_j, $\hat{c}_j$, $j \in \{1,2,3\}$, – додатні сталі, які не залежать від даних задачі. Звідси та з формул (11), (16), як при доведенні теореми 1, одержуємо потрібні оцінки.

Єдиність розв'язку задачі (тільки за умови (19)) і неперервна залежність його від даних (F_0, F_2, F_3) випливає з одержаних оцінок. ♦

Наслідок 2. *Нехай* $\alpha \in (0,1)$, $F_0 \in \tilde{C}^2(Q_0)$, $F_3 \in \tilde{C}^4(0,\ell)$. *Тоді при довільному* $t_0 > 0$ *існує єдиний розв'язок* $(u, F_1) \in \mathcal{M}_\alpha$ *оберненої задачі* (1)–(4) *(без другої початкової умови). Функція* $u(x,t)$ *визначається формулами* (11), (16), *що не містять доданків із* F_{2k}, $k \in \mathbb{N}$, *а*

$$F_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_{1k} \sin \frac{k\pi x}{\ell}, \qquad x \in (0,\ell),$$

де

$$F_{1k} = \frac{F_3(x) - \int\limits_0^{t_0} \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k \tau^\alpha) F_{0k}(t_0 - \tau)\, d\tau}{E_{\alpha,1}(-\lambda_k t_0^\alpha)}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Розв'язок задачі неперервно залежить від даних (F_0, F_3) *і виконуються оцінки*

$$\|u\|_{C(Q_0)} + \|F_1\|_{C(0,\ell)} \le b_1 \|F_0\|_{C^1(Q_0)} + b_2 \|F_3\|_{C^3(0,\ell)},$$

$$\|u_{xx}\|_{C(Q_0)} + \left\|D_t^\alpha u\right\|_{C(Q_0)} + \|F_1\|_{C^1(0,\ell)} \le \hat{b}_1 \|F_0\|_{C^2(Q_0)} + \hat{b}_2 \|F_3\|_{C^4(0,\ell)},$$

де b_j, $\hat{b}_j$, $j \in \{1,2\}$, *– додатні сталі, які не залежать від даних задачі.*

Відомо, що при $\alpha = 1$ досліджувана обернена задача (з одною початковою умовою) є некоректною.

1. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
2. *Ворошилов А. А., Килбас А. А.* Условия существования классического решения задачи Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Докл. Акад. наук. – 2007. – **414**, № 4. – С. 451–454.
   Те саме: *Voroshilov A. A., Kilbas A. A.* Existence conditions for a classical solution of the Cauchy problem for the diffusion-wave equation with a partial Caputo derivative // Doklady Math. – 2007. – **76**, No. 3. – P. 407–410.
3. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. – Москва: Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
4. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – Москва: Наука, 1999. – 672 с.
5. *Кочубей А. Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 8. – С. 1359–1368.
6. *Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии // Доп. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 11–16.
7. *Лопушанская Г. П., Лопушанский А. О., Пасичник О. В.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций // Сиб. мат. журн. – 2011. – **52**, № 6. – С. 1288–1299.
   Те саме: *Lopushanska H. P., Lopushanskyj A. O., Pasichnik E. V.* The Cauchy problem in a space of generalized functions for the equations possessing the fractional time derivative // Sib. Math. J. – 2011. – **52**, No. 6. – P. 1022–1031.
8. *Лопушанська Г. П., Лопушанський А. О.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними в просторах узагальнених функцій // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 8. – С. 1067–1079.
   Те саме: *Lopushans'ka H. P., Lopushans'kyi A. O.* Space-time fractional Cauchy problem in spaces of generalized functions // Ukr. Math. J. – 2013. – **64**, No. 8. – P. 1215–1230.
9. *Лопушанський А. О., Лопушанська Г. П.* Одна обернена крайова задача для дифузійно-хвильового рівняння // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 5. – С. 666–678.
   Те саме: *Lopushanskyi A. O., Lopushanska H. P.* One inverse problem for the diffusion-wave equation in bounded domain // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, No. 5. – P. 743–757.
10. *Лопушанський А.* Розв'язок задачі Коші для рівнянь з дробовими похідними в просторах узагальнених функцій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77.– С. 132–144.
11. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. – Москва: Наука, 2005. – 199 с.
12. *Фильштинський Л. А., Мукомел Т. В., Кірічок Т. А.* Одновимірна початково-крайова задача для дробово-диференціального рівняння теплопровідності // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2010. – № 1. – С. 113–118.
13. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальний курс –Москва: Наука, 1965. – 328 с.
14. *Anh V. V., Leonenko N. N.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random data // J. Stat. Phys. – 2001. –**104**, No. 5-6. – P. 1349–1387.
15. *Baeumer B., Meerschaert M. M.* Stochastic solutions for fractional Cauchy problems // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2001. – **4**, No. 4. – P. 481–500.
16. *Caputo M.* Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent – II // Geophys. J. Int. (Geophys. J. Roy. Astron. Soc.) – 1967. – **13**, No. 5. – P. 529–539.
17. *Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M., Yamazaki T.* Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation // Inverse Probl. – 2009. – **25**, No. 11. – http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/25/11/115002.
18. *Duan Jun-Sheng.* Time- and space-fractional partial differential equations // J. Math. Phys. – 2005. – **46**, No. 1. – 13504–13511: http://dx.doi.org/10.1063/1.1819524.
19. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.).
20. *El-Borai Mahmoud M.* On the solvability of an inverse fractional abstract Cauchy problem // Int. J. Res. Rev. Appl. Sci. – 2010. – **4**, No. 4. – P. 411–415.
21. *Hatano Y., Nakagawa J., Wang S., Yamamoto M.* Determination of order in fractional diffusion equation // J. Math-for-Ind. – 2013. – **5A**. – P. 51–57.

22. *Kilbas A. A., Sajgo M.* H-Transforms: Theory and applications. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2004. – 408 p. – Ser.: Analytical Methods and Special Functions.
23. *Luchko Yu.* BVPs for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2009. – **12**, No 4. – P. 409–422.
24. *Luchko Yu.* Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation // J. Math. Anal. Appl. – 2009. – **351**, No 1. – P. 218–223.
25. *Luchko Yu., Rundell W., Yamamoto M., Zuo L.* Uniqueness and reconstruction of an unknown semilinear term in a time-fractional reaction–diffusion equation // Inverse Probl. – 2013. – **29**, No. 6. – http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/29/6/065019.
26. *Meerschaert M. M., Nane E., Vellaisamy P.* Fractional Cauchy problems on bounded domains // Ann. Probab. – 2009. – **37**, No 3. – P. 979–1007.
27. *Nakagawa J., Sakamoto K., Yamamoto M.* Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equations – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration // J. Math-for-Ind. – 2010. – **2A**. – P. 99–108.
28. *Pollard H.* The completely monotonic character of the Mittag-Leffler function $E_\alpha(-x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1948. – **54**, No 12. – P. 1115–1116.
29. *Povstenko Y.* Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers. New York: Birkhäuser, 2015. – xiv+460 p.
39. *Povstenko Y.* Theories of thermal stresses based on space–time-fractional telegraph equations // Comput. Math. Appl. – 2012. – **64**, No 10. – P. 3321–3328.
31. *Rundell W., Xu X., Zuo L.* The determination of an unknown boundary condition in a fractional diffusion equation // Appl. Anal. – 2013. – **92**, No. 7. – P. 1511–1526.
32. *Zhang Y., Xu X.* Inverse source problem for a fractional diffusion equation // Inverse Probl. – 2011. – **27,** No 3. – http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/27/3/035010.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

Доказана корректность обратной задачи об определении пары функций: классического решения $u(x,t)$ первой краевой задачи для линейного уравнения диффузии с регуляризованной дробной производной порядка $\alpha \in (1,2)$ по времени в прямоугольной области $(0,\ell) \times (0,t_0]$ и неизвестных начальных значений функции $u(x,t)$ при дополнительно заданных ее значениях в некоторый фиксированный момент времени t_0.

RESTORATION OF INITIAL VALUES IN PROBLEM FOR A TIME FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

It is proved the correctness of the inverse problem on determination of a pare of functions: classical solution $u(x,t)$ of the first boundary value problem for linear diffusion equation with regularized fractional derivative of order $\alpha \in (1,2)$ with respect to time on rectangular domain $(0,\ell) \times (0,t_0]$ and unknown initial values of function $u(x,t)$ and under additionally given it values in a fixed time t_0.

[1] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
14.10.15