УДК 539.3: 517.5

М. А. Сухорольський

ОРТОГОНАЛЬНІ ПО ОБЛАСТІ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Сформульовано граничну задачу про власні значення і власні функції для рівняння Гельмгольца в комплексній області з використанням взаємно спряжених комплексних змінних. Одержані системи функцій є ортогональними по області і сконструйовані з використанням функцій Бесселя і степенів конформних відображень розглядуваних областей на круг. Розв'язки крайових задач для основних рівнянь математичної фізики (гіперболічного, параболічного та еліптичного типів) одержано у вигляді сум рядів за ортогональними по області системами функцій.

Вступ. Системи многочленів двох і більше змінних, ортогональні по області, їх властивості та застосування до розв'язування крайових задач математичної фізики досліджено у роботах [4, 7, 8]. У роботі [5] розглянуто загальний підхід до побудови розв'язків крайових задач для рівняння Гельмгольца за біортогональними системами функцій двох комплексних взаємно спряжених змінних. Біортогональні системи конструюються з систем функцій Бесселя і систем степенів конформних відображень областей, в яких шукаються розв'язок, на круг. Граничні значення розв'язків задаються через граничні значення аналітичних в розглядуваній області функцій. У цій роботі з використанням результатів цих робіт побудовано системи ортогональних по області систем функцій, які є власними функціями відповідних граничних задач для рівняння Гельмгольца. Розв'язки крайових задач для рівнянь із частинними похідними, сформульованих з використанням взаємно спряжених комплексних та часової змінних, подано у вигляді рядів за ортогональними системами функцій.

1. Формулювання крайових задач з використанням комплексних змінних. Розглянемо рівняння з частинними похідними

$$4a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial w \partial \bar{w}} = \alpha_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial t} + Q(w, \bar{w}, t), \tag{1}$$

де $w = u + iv$, $\bar{w} = u - iv$ ($w = re^{i\psi}$, $-\pi \le \psi \le \pi$) – комплексні змінні; $U(w, \bar{w}, t)$, $Q(w, \bar{w}, t)$ – дійсні функції, означені у циліндрі $K \times (0, \infty)$; $K : |w| < 1$ – одиничний круг; a, α_1, α_2 – дійсні сталі.

Рівняння (1) за певних значень сталих описують коливання мембрани, поширення тепла (дифузію) у циліндричному тілі, електромагнітні коливання в циліндричному провіднику тощо.

Нехай [2, с. 218; 3, с. 97]

$$w = \varphi(z) \tag{2}$$

– конформне відображення однозв'язної області $\bar{D}$ розширеної комплексної площини $z = x + iy$ ($z = \rho e^{i\omega}$, $-\pi \le \omega \le \pi$) на круг $\bar{K}$ і $z = h(w)$ – обернене до нього відображення; $L = \partial D$ – жорданова гладка крива відображується на коло $C = \partial K$.

Перейдемо в (1) до нових змінних $z = h(w)$, $\bar{z} = \bar{h}(w)$ і, оскільки $\varphi'(z) \ne$ $\ne 0$, $z \in D$, одержимо таке рівняння:

$$\frac{4a^2}{|\varphi'(z)|^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = \alpha_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial t} + Q(z, \bar{z}, t), \quad (z, t) \in D \times (0, \infty). \tag{3}$$

Розглянемо крайову задачу про відшукання розв'язку рівняння (3) за виконання умов

$$U\big|_L = 0 \qquad \text{або} \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_L = 0, \qquad t \geq 0\,, \tag{4}$$

$$U\big|_{t=0} = f(z,\bar{z}), \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = g(z,\bar{z}), \qquad z \in D\,, \tag{5}$$

де $\partial/\partial n$ – похідна за напрямком нормалі до L; $f(z,\bar{z})$, $g(z,\bar{z})$ і $Q(z,\bar{z},t) = Q\big(\varphi(z),\overline{\varphi(z)},t\big)$ – дійсні функції, означені, відповідно, в області $\bar{D}$ і циліндрі $D \times (0,\infty)$ [1]. Якщо $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$, то формулюється тільки перша умова (5), а якщо $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, то умови (5) взагалі не формулюються.

2. Ортогональні по області системи функцій. Розглянемо рівняння Гельмгольца

$$4\frac{\partial^2 V}{\partial w \partial \bar{w}} + \lambda^2 V = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial^2 u} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 v} + \lambda^2 V = 0\,, \tag{6}$$

де $V = V(w,\bar{w})$ – комплексна функція; λ – дійсна стала.

Розв'язки рівняння (6) у крузі $K : |w| < 1$ запишемо у вигляді [5]

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} c_m J_m(\lambda w, \lambda\bar{w}) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} J_m(\lambda\bar{w}\lambda w,)\,, \tag{7}$$

де c_m – комплексні сталі,

$$J_m(w,\bar{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{n+m}\bar{w}^n}{2^{2n+m}(n+m)!\,n!}\,. \tag{8}$$

Функції $J_m(w,\bar{w})$ виражаються через функції Бесселя першого роду m-го порядку: $J_m(w,w) = J_m(w)$.

Безпосередньо з формули (8) одержуємо такі формули:

$$\overline{J_m(w,\bar{w})} = J_m(\bar{w},w), \qquad J_{-m}(w,\bar{w}) = (-1)^m J_m(\bar{w},w)\,,$$

$$\frac{\partial J_m(w,\bar{w})}{\partial w} = \frac{1}{2} J_{m-1}(w,\bar{w}), \qquad \frac{\partial J_m(w,\bar{w})}{\partial \bar{w}} = -\frac{1}{2} J_{m+1}(w,\bar{w})\,,$$

$$w J_{m-1}(w,\bar{w}) + \bar{w} J_{m+1}(w,\bar{w}) = 2m J_m(w,\bar{w})\,. \tag{9}$$

Твірну для системи функції двох комплексних змінних одержимо з виразу твірної для системи функцій Бесселя [2]:

$$e^{(zw-\bar{z}/w)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z,\bar{z}) w^n\,.$$

Рівняння (6) у нових змінних $z = h(w)$, $\bar{z} = \bar{h}(w)$ набуде вигляду

$$\frac{4}{|\varphi'(z)|^2} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} + \lambda^2 V = 0\,. \tag{10}$$

Розв'язки рівняння (10) одержимо з формули (8):

$$V(z,\bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m J_m\big(\lambda\varphi(z), \lambda\overline{\varphi(z)}\big) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} J_m\big(\lambda\overline{\varphi(z)}, \lambda\varphi(z)\big)\,. \tag{11}$$

Знайдемо також похідну від функції $V(z,\bar{z})$ за напрямком нормалі до лінії L Спочатку знайдемо похідну від цієї функції за напрямком нормалі до лінії L_r – прообразу кола $|w| = r$, $0 \leq r \leq 1$. Враховуючи формули $\partial_n \varphi(z) = -i\partial_\tau \varphi(z)$, $r = |\varphi(z)|$, $h'(w)\varphi'(z) = 1$, $w = re^{i\psi}$, де $\partial_\tau = \partial/\partial\tau$ – похідна за напрямком дотичної до лінії L_r, маємо

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial n} = -i\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial\tau} = -\frac{i\varphi'(z)\partial_\psi z}{|\partial_\psi z|} = \varphi'(z)\frac{h'(w)e^{i\psi}}{|h'(w)|} =$$

$$= \frac{e^{i\psi}}{|h'(w)|} = \frac{1}{|h'(w)|}\frac{w}{r} = \frac{|\varphi'(z)|}{|\varphi(z)|}\varphi(z).$$

Тепер вираз похідної від функції (11) за напрямком нормалі до лінії L_r з урахуванням одержаного співвідношення і формул (9) запишемо як

$$\frac{\partial V(z,\bar z)}{\partial n} = \frac{|\varphi'(z)|}{|\varphi(z)|}\sum_{m=0}^{\infty} c_m\left[mJ_m\left(\lambda\varphi(z),\lambda\overline{\varphi(z)}\right) - \lambda\overline{\varphi(z)}\,J_{m+1}\left(\lambda\varphi(z)\lambda\overline{\varphi(z)}\right)\right] +$$

$$+\frac{|\varphi'(z)|}{|\varphi(z)|}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m c_{-m}\left[mJ_m\left(\lambda\overline{\varphi(z)},\lambda\varphi(z)\right) -\right.$$

$$\left.-\lambda\varphi(z)\,J_{m+1}\left(\lambda\overline{\varphi(z)},\lambda\varphi(z)\right)\right].$$

Приймаючи тут $|\varphi(z)|=1$ і враховуючи формулу $mJ_m(\lambda)-\lambda J_{m+1}(\lambda)=\lambda J'_m(\lambda)$, знайдемо вираз похідної від заданої функції за напрямком нормалі до лінії L і запишемо вираз самої функції (11) на цій лінії:

$$\left.\frac{\partial V(z,\bar z)}{\partial n}\right|_L = |\varphi'(z)|_L\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi}\left[mJ_m(\lambda)-\lambda J_{m+1}(\lambda)\right] +$$

$$+|\varphi'(z)|_L\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} e^{-im\psi}\left[mJ_m(\lambda)-\lambda J_{m+1}(\lambda)\right] =$$

$$= |\varphi'(z)|_L\sum_{m=0}^{\infty} c_m\lambda J'_m(\lambda)e^{im\psi} + |\varphi'(z)|_L\sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}\lambda J'_m(\lambda)e^{im\psi},$$

$$V|_L = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi}J_m(\lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}e^{-im\psi}J_m(\lambda). \qquad (12)$$

Відповідно до умов (4) розглянемо дві граничні задачі на власні значення і власні функції:

(***I***): знайти ненульовий розв'язок рівняння (10) в області D за умови $V|_L = 0$;

(***II***): знайти ненульовий розв'язок рівняння (10)) в області D за умови $\partial V/\partial n|_L = 0$.

З умови рівності нулеві розв'язку або похідної від цього розв'язку на границі області D, що задаються формулами (12), одержимо рівняння

$$J_m(\lambda) = 0, \qquad J'_m(\lambda) = 0. \qquad (13)$$

Позначимо через $\lambda_{k(m)}$, $k = 1,2,\ldots$, додатні корені (власні числа) першого або другого рівнянь (13) і запишемо системи власних функцій цих граничних задач:

$$\{\Phi_{m,k(m)}(z,\bar z)\} = \{J_m\left(\lambda_{k(m)}\varphi(z),\lambda_{k(m)}\overline{\varphi(z)}\right)\},$$

$$k = 1,2,\ldots, \quad m = 0,\pm1,\ldots, \qquad (14)$$

де

$$J_{-m}\left(\lambda_{k(-m)^w},\lambda_{k(-m)^{\bar w}}\right) \stackrel{\text{def}}{=} J_m\left(\lambda_{k(m)^{\bar w}},\lambda_{k(m)^w}\right),$$

$$\Phi_{-m,k(-m)}(z,\bar z) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{m,k(m)}(z,\bar z).$$

Теорема 1. *Система функцій* (14) *є ортогональною по області* D *з вагою* $|\varphi(z)|^2 = \varphi(z)\overline{\varphi(z)}$ *і виконуються рівності*

$$\left\|\Phi_{m,k(m)}\right\|^{-2} \iint_D \Phi_{m,k(m)}(z,\overline{z})\Phi_{-n,\ell(n)}(z,\overline{z})\left|\varphi'(z)\right|^2 dx, dy = \delta_{mn}\delta_{k\ell}, \tag{15}$$

де

$$\left\|\Phi_{m,k(m)}\right\|^{-2} \iint_D \Phi_{m,k(m)}(z,\overline{z})\Phi_{-m,k(m)}(z,\overline{z})\left|\varphi'(z)\right|^2 dx, dy = 2\pi\, {}^{I,II}d_{k(n)}^2,$$

$$2\pi\, {}^{I}d_{k(m)}^2 = \pi[J_m'(\lambda_{k(m)})]^2, \qquad 2\pi\, {}^{II}d_{k(m)}^2 = \pi\left(1-\frac{m^2}{\lambda_{k(m)}^2}\right)J_m^2(\lambda_{k(m)})$$

$2\pi\, {}^{I,II}d_{k(n)}^2$ – *квадрати норм функцій, що відповідають задачам* (***I***) *або* (***II***).

Д о в е д е н н я. Перетворимо інтеграл у лівій частині формули (15) з використанням формули (2) і співвідношень ортогональності систем циліндричних функцій $\{J_m(\lambda_{k(m)}r)\}_{k=1}^{\infty}$ в області $[0, 1]$ та ортогональності в області $[-\pi, \pi]$ системи функцій $\{e^{ik\psi}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ [3, 6]:

$$\frac{1}{d_{k(m)}^2}\int_0^1 J_m(\lambda_{k(m)}r)J_m(\lambda_{n(m)}r)r\,dr = \delta_{kn}, \quad m = 0,1,\ldots, \quad k,n = 1,2,\ldots,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\psi}e^{-in\psi}\,d\psi = \delta_{kn}, \qquad k,n = 0,\pm1,\ldots.$$

В результаті отримаємо

$$\iint_D \Phi_{m,k(m)}(z,\overline{z})\Phi_{-n,\ell(n)}(z,\overline{z})\left|\varphi'(z)\right|^2 dx\,dy =$$

$$= \iint_D \varphi^m(z)J_m\left(\lambda_{k(m)}\varphi(z),\lambda_{k(m)}\overline{\varphi(z)}\right)\times$$

$$\times J_n\left(\lambda_{\ell(n)}\overline{\varphi(z)},\lambda_{\ell(n)}\varphi(z)\right)\left|\varphi'(z)\right|^2 dx\,dy =$$

$$= \iint_{|w|\le1} J_m(\lambda_{k(m)}w,\lambda_{k(m)}\overline{w})J_n(\lambda_{\ell(n)}\overline{w},\lambda_{\ell(n)}w)\,du\,dv =$$

$$= \iint_{|r|\le1} e^{im\psi}J_m(\lambda_{k(m)})e^{-in\psi}J_n(\lambda_{\ell(n)}r)r\,dr\,d\psi =$$

$$= \int_0^1 J_m(\lambda_{k(m)}r)J_n(\lambda_{\ell(n)}r)r\,dr\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\psi}\,d\psi = 2\pi d_{k(m)}^2\delta_{mn}\delta_{k\ell}.$$

Тут враховано подання елемента площі у вигляді

$$du\,dv = r\,dr\,d\psi = \left|\varphi'(z)\right|^2 dx\,dy.$$

Отже, співвідношення (15) виконуються. ♦

З теореми 1 випливають такі твердження.

Наслідок 1. *Система функцій*

$$\{J_m(\lambda_{k(m)}w,\lambda_{k(m)}\overline{w})\}, \qquad k = 1,2,\ldots, \qquad m = 0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

є ортогональною по області $\overline{K}$.

Наслідок 2. *Нехай функція* $f^*(r,\psi)=f(w,\bar w)$ *розвивається у рівномірно збіжний у крузі* $\bar K$ *ряд*:

$$f(w,\bar w)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}A_{0,k}J_0(\lambda_{k(0)}r)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{n,k}\cos n\psi+ \\ +B_{k(n)}\sin n\psi(\lambda_{k(n)}r), \qquad (16)$$

де

$$A_{n,k}=\frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\psi)J_n(\lambda_{k(n)}r)\cos n\psi r\,dr\,d\psi,$$

$$B_{n,k}=\frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\psi)J_n(\lambda_{k(n)}r)\sin n\psi r\,d\rho\,d\psi,$$

і нехай конформне відображення однозв'язної області $\bar D$ *на круг* $\bar K$ *задається виразом* (2). *Тоді функція* $f_0(z,\bar z)=f\big(\varphi(z),\overline{\varphi(z)}\big)$ *розвивається у рівномірно збіжний в області* $\bar D$ *ряд за системою функцій* (14):

$$f_0(z,\bar z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_{n,k}\Phi_{n,k(n)}(z,\bar z), \qquad (17)$$

де

$$C_{n,k}=\left\|\Phi_{n,k(n)}\right\|^{-2}\iint_D f_0(z,\bar z)\Phi_{n,k(n)}(\bar z,z)\left|\varphi'(z)\right|^2dx\,dy. \qquad (18)$$

Д о в е д е н н я. Спочатку перетворимо рівномірно збіжний в $\bar K$ ряд (16) і його коефіцієнти з використанням комплексного подання тригонометричних функцій:

$$f(w,\bar w)=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{2}A_{0,k}J_0(\lambda_{k(0)}r)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big((A_{n,k}-iB_{n,k})e^{in\psi}+ \\ +(A_{n,k}+iB_{n,k})e^{-in\psi}\big)J_n(\lambda_{k(n)}r)\Bigg]= \\ =\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}C_{n,k}J_n(\lambda_{n(k)}w,\lambda_{n(k)}\bar w)+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{C_{n,k}}\,J_n(\lambda_{n(k)}\bar w,\lambda_{n(k)}w),$$

$$C_{n,k}=\frac{1}{2}(A_{n,k}-iB_{n,k})= \\ =\frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\iint_{|w|\le 1}f(w,\bar w)J_n(\lambda_{n(k)}w,\lambda_{n(k)}\bar w)r\,dr\,d\psi= \\ =\frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\iint_{|w|\le 1}f(w,\bar w)J_n(\lambda_{n(k)}w,\lambda_{n(k)}\bar w)\,du\,dv,$$

$$\overline{C_{n,k}}=\frac{1}{2}(A_{n,k}+iB_{n,k})= \\ =\frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\iint_{|w|\le 1}f(w,\bar w)J_n(\lambda_{n(k)}\bar w,\lambda_{n(k)}w)r\,dr\,d\psi= \\ =\frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\iint_{|w|\le 1}f(w,\bar w)J_n(\lambda_{n(k)}\bar w,\lambda_{n(k)}w)\,du\,dv.$$

Отже, функція $f(w,\bar{w})$ також розвивається за системою функцій $\{J_m(\lambda_{k(m)}\bar{w},\lambda_{k(m)}w)\}$ у рівномірно збіжний ряд у крузі $\bar{K}$.

Тепер перетворимо одержаний ряд і його коефіцієнти, замінивши змінні з використанням перетворення (2):

$$f(w,\bar{w}) = f\left(\varphi(z),\overline{\varphi(z)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} C_{n,k}J_n\left(\lambda_{n(k)}w,\lambda_{n(k)}\bar{w}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{C_{n,k}}\,J_n\left(\lambda_{n(k)}\bar{w},\lambda_{n(k)}w\right) =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} C_{n,k}\Phi_{n,k(n)}(z,\bar{z}) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\overline{C_{n,k}}\,\Phi_{n,k(n)}(z,\bar{z}) =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{n,k}\Phi_{n,k(n)}(z,\bar{z}),$$

$$C_{n,k} = \frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\iint\limits_{|w|\le 1} f(r,\psi)J_n\left(\lambda_{n(k)}\bar{w},\lambda_{n(k)}w\right)du\,dv =$$

$$=\frac{1}{2\pi d_{k(n)}^2}\iint\limits_{D} f_0(z,\bar{z})\Phi_{-n,k(n)}(z,\bar{z})\left|\varphi'(z)\right|^2 dx\,dy.$$

Аналогічно одержимо відповідний вираз для коефіцієнтів $\overline{C_{n,k}}$. Враховуючи тут позначення $C_{-n,k} = \overline{C_{n,k}}$, одержимо ряд (16) у формі (17) і відповідні подання (18) його коефіцієнтів.

Ряд (17) рівномірно збігається в області $\bar{D}$, оскільки він одержаний з рівномірно збіжного в області $\bar{K}$ ряду (16) заміною змінних $w=\varphi(z)$, $\bar{w}=\overline{\varphi(z)}$. ♦

Приклад 1. Знайдемо розвинення аналітичної в області $\bar{D}$ функції $G(z)$ у ряд за системою функцій (14). Вважаємо, що функція $G(z)$ розвивається у рівномірно збіжний в цій області [5] ряд за системою функцій $\{1,\ \varphi^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$G(z) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n\varphi^n(z). \tag{19}$$

Використаємо розвинення функції $|w|^n = r^n$, $0\le r\le 1$, $n>0$, у рівномірно збіжний ряд [6] за системою власних функцій задачі (***II***):

$$r^n = \sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_{n,k(n)}J_n\left(\lambda_{k(n)}r\right),$$

де

$$\Lambda_{n,k(n)} = \frac{2\lambda_{k(n)}J_{n+1}(\lambda_{k(n)})}{(\lambda_{k(n)}^2 - n^2)J_n^2(\lambda_{k(n)})}.$$

Звідси одержимо

$$w^n = r^n e^{in\psi} = \sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_{n,k(n)}J_n\left(\lambda_{k(n)}w,\lambda_{k(n)}\bar{w}\right),$$

$$\varphi^n(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_{n,k(n)}\Phi_{n,k(n)}(z,\bar{z}). \tag{20}$$

Враховуючи формули (20) у виразі для функції $G(z)$, отримаємо подвійний ряд за системою функцій (14):

$$G(z) = G_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} G_n \Lambda_{n,k(n)} \Phi_{n,k(n)}(z,\bar{z}). \tag{21}$$

Внаслідок рівномірної збіжності рядів (19) і (20) ряд (21) збігається в області $\bar{D}$.

Приклад 2. Якщо

$$\Lambda_{n,k(n)} = 2\left[\lambda_{k(n)} J_{n+1}(\lambda_{k(n)})\right]^{-1},$$

то формули (20) задають в області D розвинення степенів конформних відображень за системою власних функцій задачі (***I***).

3. Побудова розв'язків крайових задач. Розглянемо крайову задачу (3)−(5). Вважаємо, що існує [1, с. 464] узагальнений розв'язок задачі і функції $U(z,\bar{z},t)$, $Q(z,\bar{z},t)$ та відповідні похідні функції $U(z,\bar{z},t)$ розвиваються за системою функцій (14) у рівномірно збіжні ряди в області $\bar{D}\times(0 \le t \le$ $\le T < \infty)$, а функції $f(z,\bar{z})$, $g(z,\bar{z})$ − у рівномірно збіжні ряди в області $\bar{D}$:

$$U(z,\bar{z},t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{k(m)}(t)\Phi_{m,k(m)}(z,\bar{z}),$$

$$Q(z,\bar{z},t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} q_{k(m)}(t)\Phi_{m,k(m)}(z,\bar{z}),$$

$$f(z,\bar{z}) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{k(m)}\Phi_{m,k(m)}(z,\bar{z}),$$

$$g(z,\bar{z}) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{k(m)}\Phi_{m,k(m)}(z,\bar{z}), \tag{22}$$

де

$$q_{k(n)}(t) = \frac{1}{2\pi d_{k(m)}^2}\iint_D Q(z,\bar{z},t)\Phi_{n,k(n)}(\bar{z},z)\left|\varphi'(z)\right|^2 dx\,dy,$$

$$f_{k(n)} = \frac{1}{2\pi d_{k(m)}^2}\iint_D f(z,\bar{z})\Phi_{n,k(n)}(\bar{z},z)\left|\varphi'(z)\right|^2 dx\,dy,$$

$$g_{k(n)} = \frac{1}{2\pi d_{k(m)}^2}\iint_D g(z,\bar{z})\Phi_{n,k(n)}(\bar{z},z)\left|\varphi'(z)\right|^2 dx\,dy.$$

Підставляючи вирази функцій (22) у рівняння (3) та умови (4), (5) і враховуючи, що функції системи (14) задовольняють рівняння (13) і, відповідно, умови (4), зведемо задачу (3)−(5) до таких задач:

$$\alpha_1 \frac{d^2 u_{k(m)}(t)}{dt^2} + \alpha_2 \frac{du_{k(m)}(t)}{dt} + \alpha^2\lambda_{k(m)}^2 u_{k(m)}(t) = -q_{k(m)}(t),$$

$$u_{k(m)}\Big|_{t=0} = f_{k(m)}, \qquad \left.\frac{du_{k(m)}}{dt}\right|_{t=0} = g_{k(m)}. \tag{23}$$

Розв'язки задач (23) побудовано операційним методом [3]. Запишемо розв'язки цих крайових задач і задачі (3)−(5), що відповідають окремим фізичним процесам:

– коливання мембрани ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$)

$$u_{k(m)} = f_{k(m)} \cos \alpha\lambda_{k(m)} t + \frac{g_{k(m)}}{\lambda_{k(m)}} \sin \alpha\lambda_{k(m)} t -$$

$$- \frac{1}{\alpha\lambda_{k(m)}} \int_0^t \sin \alpha\lambda_{k(m)} (t - \tau) q_{k(m)}(\tau)\, d\tau ,$$

$$U(z, \overline{z}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{k(m)} \Phi_{m,k(m)}(z, \overline{z}) \cos \alpha\lambda_{k(m)} t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{g_{k(m)}}{\lambda_{k(m)}} \Phi_{m,k(m)}(z, \overline{z}) \sin \alpha\lambda_{k(m)} t -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{m,k(m)}(z, \overline{z})}{\alpha\lambda_{k(m)}} \int_0^t \sin \alpha\lambda_{k(m)} (t - \tau) q_{k(m)}(\tau)\, d\tau ; \qquad (24)$$

– плоска задача теплопровідності ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$)

$$u_{k(m)} = f_{k(m)} e^{-\alpha^2 \lambda_{k(m)}^2 t} - \int_0^t e^{-\alpha^2 \lambda_{k(m)}^2 (t-\tau)} q_{k(m)}(\tau)\, d\tau ,$$

$$U(z, \overline{z}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_{k(m)} \Phi_{m,k(m)}(z, \overline{z}) e^{-a^2 \lambda_{k(m)}^2 t} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_{m,k(m)}(z, \overline{z}) \int_0^t e^{-a^2 \lambda_{k(m)}^2 (t-\tau)} q_{k(m)}(\tau)\, d\tau ; \qquad (25)$$

– прогин мембрани ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $g_{k(m)}(t) = g_{k(m)}$ – стаціонарна задача)

$$u_{k(m)} = - \frac{q_{k(m)}}{\alpha^2 \lambda_{k(m)}^2} ,$$

$$U(z, \overline{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_{k(m)}}{\alpha^2 \lambda_{k(m)}^2} \Phi_{m,k(m)}(z, \overline{z}) .$$

Розв'язки часткових випадків розглянутих задач, коли $D = K$, співпадають з розв'язками відповідних задач для кругового циліндра [3, 6].

Приклад 3. Знайдемо розв'язок рівняння, однорідного до (3):

$$\frac{4}{|\varphi'(z)|^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} , \qquad (z, t) \in D \times (0 < t < \infty) ,$$

за виконання другої з граничних умов (4) і таких початкових умов:

$$U\big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \operatorname{Re} z^m , \qquad m = 2, 3, \ldots ,$$

де $w = \varphi(z)$ – конформне відображення (2) області $\overline{D}$ на круг $\overline{K}$.

Степені змінної z однозначно виражаються [5] через базис у просторі аналітичних в D функцій $\{1, \varphi^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$z^m = \sum_{\ell=m}^{\infty} b_{\ell,m} \varphi^{\ell}(z) . \qquad (26)$$

Враховуючи тут формули (20), одержимо

$$z^m = \sum_{\ell=m}^{\infty} b_{\ell,m}\varphi^{\ell}(z) = \sum_{\ell=m}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{\ell,m}\Lambda_{\ell,k(\ell)}\Phi_{\ell,k(\ell)}(z,\overline{z})$$

і запишемо другу з початкових умов задачі у вигляді

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \mathrm{Re}\, z^m =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\ell=m}^{\infty}\sum_{k=\ell}^{\infty}\Lambda_{\ell,k(\ell)}\left[b_{\ell,m}\Phi_{\ell,k(\ell)}(z,\overline{z}) + \overline{b_{\ell,m}}\,\Phi_{\ell,k(\ell)}(\overline{z},z)\right].$$

Підставляючи коефіцієнти розвинення функцій $\mathrm{Re}\, z^m$ у другу з формул (24), отримаємо розв'язок задачі у вигляді суми ряду

$$U(z,\overline{z},t) = \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda_{\ell,k(\ell)}}{\lambda_{k(\ell)}}\left[b_{\ell,m}\Phi_{\ell,k(\ell)}(z,\overline{z}) + \overline{b_{\ell,m}}\,\Phi_{\ell,k(\ell)}(\overline{z},z)\right]\sin\lambda_{k(\ell)}t\,,$$

який внаслідок рівномірної збіжності рядів (20), (26) збігається у розглядуваній області.

Приклад 4. Знайдемо розподіл температури у пластині (області D) за умови, що температура на границі пластини і початкова температура дорівнюють нулеві, а зовнішні джерела тепла задаються функцією $Q = A\sin\lambda_0 t$, де A, λ_0 – сталі величини. Запишемо крайову задачу:

$$\frac{4}{|\varphi'(z)|^2}\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\overline{z}} = \frac{\partial U}{\partial t} + A\sin\lambda_0 t, \qquad (z,t)\in D\times(0<t<\infty)\,,$$

$$U|_{t=0} = 0, \quad z\in D, \qquad U|_{z\in L} = 0, \quad z\in D\,.$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді суми ряду за системою власних функцій задачі. Згідно з (22) маємо

$$Q(z,\overline{z},t) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Phi_{0,k(0)}(z,\overline{z})}{\lambda_{k(0)}J_1(\lambda_{k(0)})}\sin\lambda_0 t = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_{k(0)}|\varphi(z)|)}{\lambda_{k(0)}J_1(\lambda_{k(0)})}\sin\lambda_0 t$$

і за другою з формул (25) знайдемо

$$U(z,\overline{z},t) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_{k(0)}|\varphi(z)|)}{\lambda_{k(0)}J_1(\lambda_{k(0)})}\int_0^t e^{-\lambda_{k(0)}^2(t-\tau)}\sin\lambda_0(\tau)\,d\tau =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_{k(0)}|\varphi(z)|)}{\lambda_{k(0)}J_1(\lambda_{k(0)})(\lambda_0^2+\lambda_{k(0)}^4)}\times$$

$$\times\left(\lambda_{k(0)}^2\sin\lambda_0 t - \lambda_0\cos\lambda_0 t + e^{-\lambda_{k(0)}^2 t}\right).$$

Одержаний ряд внаслідок збіжності ряду функції $Q(z,\overline{z},t)$ збігається у розглядуваній області.

Висновки. Функції Бесселя інших (ніж розглянуті в роботі) типів також задовольняють за певних значень параметрів рівняння Гельмгольца (6) і (10), тому можна розширити клас крайових задач, що використовують відповідні функції двох комплексно спряжених змінних.

Одержані у роботі результати можуть бути також поширені на крайові задачі для рівнянь із частинними похідними вищих порядків, які містять добутки диференціальних операторів Лапласа чи Гельмгольца. Згідно з формулами (9) другі змішані похідні від базових функцій (14) повертають до цих же функцій (існує деяка аналогія з другими похідними від тригонометричних функцій), що дозволяє відокремити змінні у розглядуваному диференціальному рівнянні.

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1974. – 831 с.
   Те саме: *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems, and formulas for reference and review. – New York: Dover Publ. Inc., 2000. – 1151 p.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1987. – 698 с.
4. *Суетин П. К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. – Москва: Наука, 1988. – 384 с.
5. *Сухорольський М. А.* Розв'язки крайових задач для рівняння Гельмгольца в однозв'язних областях комплексної площини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 4. – С. 34–46.
6. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
7. *Dunkl C. F., Xu Y.* Orthogonal polynomials of several variables. – Cambridge Univ. Press, 2014. – 426 p.
8. *Koornwinder T. H.* Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials // In: Theory and application of special functions / Ed. by R. A. Askey. – New York: Acad. Press, 1975. – P. 435–495.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПО ОБЛАСТИ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Сформулирована граничная задача о собственных значениях и собственных функциях для уравнения Гельмгольца в комплексной области с использованием взаимно сопряженных комплексных переменных. Полученные системы функций ортогональны по области и сконструированы с использованием функций Бесселя и степеней конформных отображений рассматриваемых областей на круг. Решения краевых задач для основных уравнений математической физики (гиперболического, параболического и эллиптического типов) получены в виде рядов по ортогональным по области системам функций.

ORTHOGONAL OVER THE DOMAIN SYSTEMS OF FUNCTIONS AND THEIR APPLICATION IN BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Boundary value problem on eigenvalues and eigenfunctions for Helmholtz's equation in the complex domain with the application of mutually conjugated complex variables is formulated. The obtained systems of functions are orthogonal over the domain and constructed with the application of Bessel functions and the power of conforming mappings of the considered domains onto the circle. Solutions of boundary problems for the main equations of mathematical physics (hyperbolic, parabolic and elliptical types) are obtained in the form of series in orthogonal over the domain systems of functions.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
18.01.16