УДК 537.876.23+517.952+514.744

В. О. Пелих, Ю. В. Тайстра

КЛАС ЗАГАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ МАКСВЕЛЛА У ПРОСТОРІ КЕРРА

Розглянуто ізотропні однонапрямлені електромагнітні поля у просторі типу $\mathcal{D}$ і в просторі Керра. У класі таких полів знайдено загальний розв'язок рівнянь Максвелла.

Вступ. Актуальною і складною проблемою сучасної математичної, теоретичної фізики та астрофізики є дослідження взаємодії класичних фізичних полів з гравітаційним полем. Такими полями є скалярне поле (спін 0), поле Дірака – Вейля (спін 1/2), поле Максвелла (спін 1), поле Раріти – Швінгера (спін 3/2), гравітаційне поле (спін 2) тощо. Навіть у випадку, коли поля вважають слабкими порівняно з гравітаційним полем (пробними або ж збуреннями), не зникає головна причина складності дослідження – неусувна жодними калібрувальними умовами (наприклад, умовою Лоренца) зв'язаність усіх рівнянь, за винятком, звичайно, скалярного поля, яке, з огляду на це, найчастіше розглядалося.

Упродовж усіх років досліджень найбільшу увагу приділялось дослідженню поведінки фізичних полів у просторах, що описують чорні діри – у просторах Шварцшільда, Керра, Керра – Ньюмена. Очікувана найближчим часом публікація з повідомленням про відкриття гравітаційних хвиль [17] доведе, найбільш імовірно, існування саме чорних дір Керра, оскільки зорі, як правило, швидко обертаються. Ця обставина підтверджує актуальність дослідження процесів в їх околах. Слід зазначити, що хоча амплітудно-частотна характеристика фінальної стадії зближення і злиття (ringdown) двох чорних дір Керра була отримана шляхом поєднання наближених методів загальнорелятивістської динаміки і числових методів, це не може применшувати значення точних або аналітичних методів. Наприклад, числовими методами принципово не може бути розв'язана проблема стійкості чорних дір та істотно ускладнюється аналіз якісної поведінки розв'язків.

Методи побудови розв'язків для збурень у полі Керра розвивалися у роботах [2, 7, 9, 10, 12, 13, 31]. Початковим етапом кожної з цих робіт був пошук способів розщеплення системи рівнянь. Для електромагнітного поля розщеплення можливе при різних підходах: підхід з використанням поля Максвелла (тензор, спінор Максвелла), підхід з використанням 4-потенціалу та підхід з використанням потенціалів Герца (тензор Герца, спінор Герца).

Коген і Кеґелес [11, 12] вперше провели розщеплення системи рівнянь другого порядку для тензора (спінора) Герца у просторі типу $\mathcal{D}$ за класифікацією Петрова. Автори вибрали спінор Герца вздовж кратних головних ізотропних напрямків спінора Вейля і наклали калібрувальні умови третього роду. У роботі Стюарта [24] такий вибір спінора названо «вибором виродженого спінора», але більш відповідною для таких збурень є назва «алгебраїчно спеціальний розв'язок».

Розщеплене рівняння для компоненти спінора Максвелла φ_1 у метриці Керра вперше отримано Фекерелом та Іпсером [13] у формалізмі Ньюмена – Пенроуза [20]. Проте отримати розв'язок не вдалось через неможливість відокремлення змінних.

Вдалий вибір способу розщеплення дозволив Тьюкольському [27, 28] (див. також [29]) перетворити у координатах Бойєра – Ліндквіста систему до незалежних рівнянь для двох функцій, які допускали розв'язок з відокремленими змінними (анзац Тьюкольського). Цим розпочато новий етап досліджень в цій області. Зокрема, Старобінським і Чуріловим [3] з використанням результату Тьюкольського описано супервипромінювання від чорної діри Керра.

Після розщеплення рівнянь Максвелла та відокремлення змінних на основі анзацу отримання розв'язку для складових φ_2, φ_0 зводиться до розв'язання та аналізу двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку: радіального рівняння Тьюкольського і кутового рівняння Тьюкольського.

Припущення, зроблені Тьюкольським при введенні анзацу (наприклад, про регулярність часткового розв'язку в усіх точках), не є цілком загальними і можуть виключати чи не охоплювати фізично змістовні розв'язки, як це зауважено різними авторами (див., наприклад, [14]). З огляду на це розвиваються доповнюючі чи альтернативні до методу Тьюкольського методи побудови класів часткових розв'язків: алгебраїчно спеціальних і точних за Фізієвим [5, 14, 15, 22]. Точними Фізієв назвав такі розв'язки рівняння Тьюкольського, які виражаються через розв'язки рівняння Гойна (Heun). При цьому дослідження властивостей і побудова розв'язків рівняння Гойна залишаються самостійними складними математичними проблемами.

У попередніх роботах автори встановили умови на скаляри Ньюмена – Пенроуза, достатні для розщеплення системи рівнянь другого порядку для 4-потенціалу у формалізмі Ньюмена – Пенроуза [1]. Менш жорсткі достатні умови вдалось отримати у роботі [25] при розгляді обмежень на поле Максвелла у вигляді виродженого спінора [24] або ізотропного поля Максвелла [23, с. 102]. Розгляд ізотропного з однією істотною компонентою спінора Максвелла дозволяє відразу отримати розщеплену систему з двох рівнянь першого порядку.

Метою цієї роботи є отримання розв'язків такої системи, які були виключені з розгляду Тькольським; вони є загальними в певному класі полів Максвелла.

Істотних спрощень досягаємо, орієнтуючи два головні спінори Максвелла вздовж одного з кратних головних спінорів спінора Вейля (це можливо, оскільки простір Керра належить до типу $\mathcal{D}$ за Петровим). Такі поля є однонапрямленими (one-way) вхідними (ingoing) або вихідними (outgoing) ізотропними полями (ОІП). Подібний випадок виродженого (алгебраїчно спеціального) поля Герца розглядали Коген, Кеґелес [11, 12], Стюарт [24]. Випадки вироджених гравітаційних збурень розглядались у роботах [8, 26, 32].

У **п. 1** розглядаємо ОІП у просторі типу $\mathcal{D}$ у формалізмі Ньюмена – Пенроуза. У **п. 2** знаходимо загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку у метриці Керра у випадках, коли поле є вихідним або вхідним ОІП. Обчислюємо компоненти тензора Максвелла та тензора енергії–імпульсу для цих випадків.

Рівняння розглядаємо в геометризованій системі одиниць ($c = G = 1$) і припускаємо достатню гладкість усіх функцій, що у розглядуваному випадку не обмежує фізичної загальності.

1. Однонапрямлене ізотропне поле Максвелла у вакуумному просторі типу $\mathcal{D}$ Петрова. Неоднорідне рівняння Максвелла у спінорному підході має вигляд[1] [21]

$$\nabla^{AA'}\varphi_{AB} = j_B^{A'}, \tag{1}$$

де $\varphi_{AB} = \varphi_2 o_A o_B - \varphi_1 o_A \iota_B - \varphi_1 \iota_A o_B + \varphi_0 \iota_A \iota_B$ – спінор електромагнітного поля (спінор Максвелла), $\varphi_2 : \varphi_2 \mapsto \mathbb{C}$, $\varphi_1 : \varphi_1 \mapsto \mathbb{C}$, $\varphi_0 : \varphi_0 \mapsto \mathbb{C}$ – компоненти

[1] множник 2π, що стоїть у правій частині, внесено для зручності в компоненти 4-струму, так що $j_{AA'} = 2\pi j_{AA'}$.

спінора φ_{AB} у спіновій базі, o_A, ι_A − базисні спінори,

$$j_B^{A'} = j_2 o_B o^{A'} - j_1 o_B \iota^{A'} - \bar{j}_1 \iota_B o^{A'} + j_0 \iota_B \iota^{A'},$$

j_2, j_0, j_1 − компоненти спінора $j_B^{A'}$ у спіновій базі, $j_2 : j_2 \mapsto \mathbb{C}$, $j_0 : j_0 \mapsto \mathbb{C}$, $j_1 : j_1 \mapsto \mathbb{C}$.

Для 4-струму виконується умова неперервності $\nabla_{AA'} J^{AA'} = 0$.

У покомпонентній формі рівняння (1) має такий вигляд:

$$D\varphi_2 + (2\epsilon - \rho)\varphi_2 = \bar{\delta}\varphi_1 + 2\pi\varphi_1 - \lambda\varphi_0 - j_1,$$

$$\delta\varphi_2 + (2\beta - \tau)\varphi_2 = \Delta\varphi_1 + 2\mu\varphi_1 - \nu\varphi_0 - j_2,$$

$$\Delta\varphi_0 - (2\gamma - \mu)\varphi_0 = \delta\varphi_1 - 2\tau\varphi_1 + \sigma\varphi_2 + \bar{j}_1,$$

$$\bar{\delta}\varphi_0 - (2\alpha - \pi)\varphi_0 = D\varphi_1 - 2\rho\varphi_1 + æ\varphi_2 + j_0. \qquad (2)$$

Тут $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \pi, \nu, \mu, \lambda, æ, \tau, \sigma, \rho$ − скаляри Ньюмена − Пенроуза (спінові коефіцієнти); D, δ, Δ, $\bar{\delta}$ − похідні за напрямками ізотропної тетради.

Система рівнянь (2) є *зв'язаною* − кожне рівняння містить всі невідомі функції φ_2, φ_1, φ_0 та деякі їх похідні. Єдиним відомим підходом до її розв'язання є *розщеплення* рівнянь. Якщо в результаті розщеплення всі рівняння містять лише одну невідому функцію, то система повністю розщеплюється. Якщо деякі з рівнянь системи відщеплені, а решта містять одну невідщеплену функцію і решту відщеплених функцій, то система розщеплюється послідовно.

Для розщеплення системи (2) розглянемо її у алгебраїчно спеціальному просторі − у вакуумному просторі типу $\mathcal{D}$ за класифікацією Петрова та розглянемо спеціальне поле Максвелла.

Вакуумний простір типу $\mathcal{D}$ характеризується тим, що головні спінори спінора Вейля є попарно кратними: $\Psi_{ABCD} = \eta_{(A}\gamma_B\zeta_C\delta_{D)} = \gamma_{(A}\gamma_B\delta_C\delta_{D)}$ ($\gamma_A = \gamma_1 o_A - \gamma_0 \iota_A$, $\delta_A = \delta_1 o_A - \delta_0 \iota_A$). Вважаємо, що спінова база вибрана так, що кратні головні спінори γ_A, δ_A спінора Вейля є пропорційними до базисних спінорів o_A та ι_A: $\gamma_A = \gamma_1 o_A$, $\delta_A = -\delta_0 \iota_A$. В результаті отримуємо, що чотири компоненти спінора Ψ_{ABCD} є нульовими: $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$. Внаслідок теореми Голдберга − Сакса отримуємо

$$æ = \sigma = \nu = \lambda = 0. \qquad (3)$$

Вважатимемо, що спінор Максвелла $\varphi_{AB} = \alpha_{(A}\beta_{B)}$, де α_A − його головні спінори, є ізотропним ($\varphi_{AB}\varphi^{AB} = 0$), а його головні спінори α_A, β_A є кратними до кратного головного спінора γ_A спінора Вейля: $\alpha_A \sim \gamma_A$, $\beta_B \sim \gamma_B$ (тоді $\varphi_1 = \varphi_0 = 0$). В результаті розклад спінора Максвелла у спіновій базі матиме вигляд

$$\varphi_{AB} = \varphi_2 o_A o_B. \qquad (4)$$

Таким чином, здійснено «орієнтацію» спінора Максвелла вздовж одного з кратних головних ізотропних напрямків − напрямку o_A спінора Вейля. Поле Максвелла у вибраній спіновій базі, яке має вигляд (4), будемо називати *вихідним однонапрямленим ізотропним полем* (*вихідним ОІП*).

Підставимо у систему рівнянь (2) рівності (3), враховуючи умови $\varphi_1 = \varphi_0 = 0$. В результаті система повністю розщеплюється. З третього і четвертого рівнянь отриманої системи випливає, що $j_0 = j_1 = 0$, тому система рівнянь Максвелла для *вихідного* ОІП у просторі типу $\mathcal{D}$ за Петровим має вигляд

$$\mathcal{D}\varphi_2 + (2\epsilon - \rho)\varphi_2 = 0,$$

$$\delta\varphi_2 + (2\beta - \tau)\varphi_2 = -j_2. \qquad (5)$$

Головні спінори α_A, β_A спінора Максвелла можемо також вибрати кратними до головного спінора δ_A спінора Вейля: $\alpha_A \sim \delta_A$, $\beta_B \sim \delta_B$ (тоді $\varphi_2 = \varphi_1 = 0$). В результаті розклад спінора Максвелла у спіновій базі матиме вигляд

$$\varphi_{AB} = \varphi_0 \iota_A \iota_B, \qquad (6)$$

У цьому випадку здійснено «орієнтацію» спінора Максвелла вздовж іншого кратного головного ізотропного напрямку (ι_A) спінора Вейля. Поле Максвелла, яке має вигляд (6), будемо називати *вхідним однонапрямленим ізотропним полем* (*вхідним ОІП*).

Підставимо у систему рівнянь (2) рівності (3), враховуючи умови $\varphi_2 = \varphi_1 = 0$. З першого і другого рівнянь отриманої системи випливає, що $j_2 = j_1 = 0$. Як наслідок отримаємо повністю розщеплену систему рівнянь Максвелла для *вхідного* ОІП у просторі типу $\mathcal{D}$:

$$\Delta\varphi_0 - (2\gamma - \mu)\varphi_0 = 0,$$

$$\bar{\delta}\varphi_0 - (2\alpha - \pi)\varphi_0 = j_0. \qquad (7)$$

Поле називаємо однонапрямленим тому, що спінор Максвелла є орієнтований уздовж одного з кратних головних ізотропних напрямків фонового гравітаційного поля. Далі побачимо, що розв'язок у формі ОІП у випадку вхідного (вихідного) поля виражається через інтеграли рівнянь, залежні від $t - r$ $(t + r)$. Це означає, що цей розв'язок описує запізнюючу (випереджаючу) хвилю або вихідну (вхідну) хвилю.

Як слід чекати, обмеження, що поле є вихідним (або вхідним), перетворює в нулі усі компоненти струму, крім компоненти j_2 (j_0), що означає, що 4-струм для цих полів є також ізотропним: $j_{AA'}j^{AA'} = 0$.

2. Загальний розв'язок неоднорідних рівнянь Максвелла для однонапрямлених полів у метриці Керра. Розглянемо *пробні* вихідне ОІП та вхідне ОІП у метриці Керра [16], яка є вакумним аксіально симетричним розв'язком рівнянь Айнштайна. Параметр M характеризує масу точкового тіла, а параметр a − його питомий кутовий момент ($a > 0$, $M > 0$, $M^2 - a^2 > 0$). У координатах Бойєра − Ліндквіста [6] квадрат елемента довжини ds^2 має вигляд

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right)dt^2 + \frac{4Mra\sin^2\theta}{\Sigma}\,dt\,d\phi -$$

$$- \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 - \Sigma\,d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta\,d\phi^2,$$

де

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \qquad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = (r - r_+)(r - r_-),$$

$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ − корені рівняння $r^2 - 2Mr + a^2 = 0$; r_+ та r_- − відповідно, зовнішній і внутрішній горизонти подій.

Коваріантні та контраваріантні вектори тетради Ньюмена − Пенроуза вибираємо такими [27] (тетрада Кіннерслі [18]):

$$\ell_a = \left(1, -\frac{\Sigma}{\Delta}, 0, -a\sin^2\theta\right), \qquad \ell^a = \left(\frac{r^2+a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta}\right),$$

$$n_a = \left(\frac{\Delta}{2\Sigma}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{a\Delta\sin^2\theta}{2\Sigma}\right), \qquad n^a = \left(\frac{r^2+a^2}{2\Sigma}, -\frac{\Delta}{2\Sigma}, 0, \frac{a}{2\Sigma}\right),$$

$$m_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{ia\sin\theta}{r+ia\cos\theta}, 0, -(r-ia\cos\theta), -\frac{i(r^2+a^2)\sin\theta}{r+ia\cos\theta}\right),$$

$$\bar{m}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-ia\sin\theta}{r-ia\cos\theta}, 0, -(r+ia\cos\theta), \frac{i(r^2+a^2)\sin\theta}{r-ia\cos\theta}\right),$$

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{ia\sin\theta}{r+ia\cos\theta}, 0, \frac{1}{r+ia\cos\theta}, \frac{i}{(r+ia\cos\theta)\sin\theta}\right),$$

$$\bar{m}^a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{ia\sin\theta}{r-ia\cos\theta}, 0, \frac{1}{r-ia\cos\theta}, -\frac{i}{(r-ia\cos\theta)\sin\theta}\right).$$

Скаляри Ньюмена − Пенроуза мають вигляд

$$æ = \sigma = \nu = \lambda = \epsilon = 0, \quad \rho = -\frac{1}{r-ia\cos\theta}, \quad \mu = -\frac{\Delta}{2\Sigma}\frac{1}{r-ia\cos\theta},$$

$$\alpha = -\frac{(r+ia\cos\theta)\cos\theta - 2ia}{2\sqrt{2}\,(r-ia\cos\theta)^2\sin\theta}, \qquad \beta = \frac{\cos\theta}{2\sqrt{2}\,(r+ia\cos\theta)\sin\theta},$$

$$\gamma = -\frac{\Delta(r+ia\cos\theta)-(r-M)\Sigma}{2\Sigma^2}, \quad \tau = -\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}\,\Sigma}, \quad \pi = \frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}\,(r-ia\cos\theta)^2}.$$

Для запису систем рівнянь для вихідного ОІП і вхідного ОІП у координатах Бойєра − Лінквіста використали пакет GRTensor2 для Maple [19].

2.1. Вихідне ОІП. Система рівнянь для вихідного ОІП (5) у координатах Бойєра − Ліндквіста має вигляд системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку для невідомої функції $\varphi_2(t,r,\theta,\phi)$:

$$\frac{r^2+a^2}{\Delta}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{a}{\Delta}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\phi} + \frac{1}{r-ia\cos\theta}\varphi_2 = 0,$$

$$ia\sin\theta\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\phi} + \left(\operatorname{ctg}\theta + \frac{ia\sin\theta}{r-ia\cos\theta}\right)\varphi_2 =$$

$$= -\sqrt{2}\,(r+ia\cos\theta)j_2. \tag{8}$$

Розв'язок системи (8) знайдемо шляхом послідовного інтегрування:

$$\varphi_2 = \frac{1}{(r-ia\cos\theta)\sin\theta}\left(e^{F(\psi_1,\psi_2)} - \sqrt{2}\int j_2\,\Sigma\sin\theta\,d\theta\right), \tag{9}$$

де $F(\psi_1,\psi_2)$ − довільна функція своїх аргументів, якими є інтеграли ψ_1, ψ_2 системи рівнянь (8):

$$\psi_1 = t - r - M\ln|\Delta| - \frac{M^2}{\sqrt{M^2-a^2}}\ln\left|\frac{r-r_+}{r-r_-}\right| + ia\cos\theta,$$

$$\psi_2 = \phi - \frac{a}{2\sqrt{M^2-a^2}}\ln\left|\frac{r-r_+}{r-r_-}\right| - i\ln\left|\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right|.$$

Для подальшого фізичного застосування цього розв'язку необхідно обчислити тензор Максвелла $F_{ab} = 2\varphi_2 \ell_{[a} m_{b]} + 2\bar{\varphi}_2 \ell_{[a} \bar{m}_{b]}$ і тензор енергії-імпульсу $T_{ab} = 1/2\pi |\varphi_2|^2 \ell_a \ell_b$.

Використовуючи пакет GRTensorII, отримуємо компоненти тензора Максвелла та тензора енергії-імпульсу у координатах Бойєра – Лінквіста для випадку вихідного ОІП:

$$F_{ab} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & F_{tr} & F_{t\theta} & F_{t\phi} \\ -F_{tr} & 0 & F_{r\theta} & F_{r\phi} \\ -F_{t\theta} & -F_{r\theta} & 0 & F_{\theta\phi} \\ -F_{t\phi} & -F_{r\phi} & -F_{\theta\phi} & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{tr} = -\frac{a}{\Delta} \frac{e^{F(\psi_1,\psi_2)} - e^{\bar{F}(\psi_1,\psi_2)} - \sqrt{2} \int (j_2 - \bar{j}_2) \Sigma \sin\theta \, d\theta}{2i},$$

$$F_{t\theta} = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{e^{F(\psi_1,\psi_2)} + e^{\bar{F}(\psi_1,\psi_2)} - \sqrt{2} \int (j_2 + \bar{j}_2) \Sigma \sin\theta \, d\theta}{2},$$

$$F_{t\phi} = \frac{e^{F(\psi_1,\psi_2)} - e^{\bar{F}(\psi_1,\psi_2)} - \sqrt{2} \int (j_2 - \bar{j}_2) \Sigma \sin\theta \, d\theta}{2i},$$

$$F_{r\theta} = \frac{\Sigma}{\Delta \sin\theta} \frac{e^{F(\psi_1,\psi_2)} + e^{\bar{F}(\psi_1,\psi_2)} - \sqrt{2} \int (j_2 + \bar{j}_2) \Sigma \sin\theta \, d\theta}{2},$$

$$F_{r\phi} = -\frac{r^2 + a^2}{\Delta} \frac{e^{F(\psi_1,\psi_2)} - e^{\bar{F}(\psi_1,\psi_2)} - \sqrt{2} \int (j_2 - \bar{j}_2) \Sigma \sin\theta \, d\theta}{2i},$$

$$F_{\theta\phi} = -a \sin\theta \frac{e^{F(\psi_1,\psi_2)} + e^{\bar{F}(\psi_1,\psi_2)} - \sqrt{2} \int (j_2 + \bar{j}_2) \Sigma \sin\theta \, d\theta}{2},$$

$$T_{ab} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} |\varphi_2|^2 & -\frac{\Sigma}{\Delta} |\varphi_2|^2 & 0 & -a |\varphi_2|^2 \sin^2\theta \\ -\frac{\Sigma}{\Delta} |\varphi_2|^2 & \frac{\Sigma^2}{\Delta^2} |\varphi_2|^2 & 0 & a \frac{\Sigma}{\Delta} |\varphi_2|^2 \sin^2\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a |\varphi_2|^2 \sin^2\theta & a \frac{\Sigma}{\Delta} |\varphi_2|^2 \sin^2\theta & 0 & a^2 |\varphi_2|^2 \sin^4\theta \end{pmatrix},$$

$$|\varphi_2|^2 = \frac{1}{\sin^2\theta \Sigma} \Big(e^{F(\psi_1,\psi_2) + \bar{F}(\psi_1,\psi_2)} - \sqrt{2} \, e^{\bar{F}(\psi_1,\psi_2)} \int j_2 \Sigma \sin\theta \, d\theta -$$

$$- \sqrt{2} \, e^{F(\psi_1,\psi_2)} \int \bar{j}_2 \Sigma \sin\theta \, d\theta + 2 \int j_2 \Sigma \sin\theta \, d\theta \cdot \int \bar{j}_2 \Sigma \sin\theta \, d\theta \Big). \quad (10)$$

З (10) випливає, що потік енергії у напрямку θ вихідного ОІП відсутній (компонента $T_{t\theta} = 0$). Відсутні також напруження $T_{r\theta}$, $T_{\theta\theta}$, $T_{\theta\phi}$. Крім того, у метриці Шварцшільда ($a = 0$) відсутні потік енергії у напрямку ϕ (компонента $T_{t\phi} = 0$) та напруження $T_{r\phi}$ і $T_{\phi\phi}$.

2.2. Вхідне ОІП. Запишемо систему рівнянь для вхідного ОІП (7) у координатах Бойєра – Ліндквіста. Вона також є системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку стосовно функції $\varphi_0(t, r, \theta, \phi)$:

$$\frac{r^2+a^2}{\Delta}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}+\frac{a}{\Delta}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\phi}+\left(\frac{1}{r-ia\cos\theta}-2\frac{r-M}{\Delta}\right)\varphi_0=0\,,$$

$$ia\sin\theta\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}+\frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\phi}-\left(\operatorname{ctg}\theta-\frac{ia\sin\theta}{r-ia\cos\theta}\right)\varphi_0=$$
$$=-\sqrt{2}\,(r-ia\cos\theta)j_0\,. \qquad (11)$$

Розв’язок системи (11) знайдемо подібно до випадку вихідного ОІП:

$$\varphi_0=\frac{r-ia\cos\theta}{\sin\theta\Delta}\left(e^{G(\psi_3,\psi_4)}+\sqrt{2}\,\Delta\int j_0\sin\theta\,d\theta\right), \qquad (12)$$

де $G(\psi_3,\psi_4)$ − довільна функція від інтегралів ψ_3, ψ_4 системи рівнянь (11):

$$\psi_3=t+r+M\ln|\Delta|+\frac{M^2}{\sqrt{M^2-a^2}}\ln\left|\frac{r-r_+}{r-r_-}\right|-ia\cos\theta\,,$$

$$\psi_4=\phi+\frac{a}{2\sqrt{M^2-a^2}}\ln\left|\frac{r-r_+}{r-r_-}\right|+i\ln\left|\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right|.$$

У випадку вхідного ОІП тензор Максвелла $F_{ab}=2\varphi_0\overline{m}_{[a}n_{b]}+2\overline{\varphi}_0 m_{[a}n_{b]}$ і тензор енергії-імпульсу $T_{ab}=\frac{1}{2\pi}\left(|\varphi_0|^2\,n_a n_b\right)$ обчислюємо за формулами:

$$F_{ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0 & F_{tr} & F_{t\theta} & F_{t\phi}\\ -F_{tr} & 0 & F_{r\theta} & F_{r\phi}\\ -F_{t\theta} & -F_{r\theta} & 0 & F_{\theta\phi}\\ -F_{t\phi} & -F_{r\phi} & -F_{\theta\phi} & 0\end{pmatrix},$$

$$F_{tr}=\frac{a}{\Delta}\frac{e^{G(\psi_3,\psi_4)}-e^{\overline{G}(\psi_3,\psi_4)}+\sqrt{2}\,\Delta\int(j_0-\overline{j}_0)\sin\theta\,d\theta}{2i},$$

$$F_{t\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{e^{G(\psi_3,\psi_4)}+e^{\overline{G}(\psi_3,\psi_4)}+\sqrt{2}\,\Delta\int(j_0+\overline{j}_0)\sin\theta\,d\theta}{2},$$

$$F_{t\phi}=\frac{e^{G(\psi_3,\psi_4)}-e^{\overline{G}(\psi_3,\psi_4)}+\sqrt{2}\,\Delta\int(j_0-\overline{j}_0)\sin\theta\,d\theta}{2i},$$

$$F_{r\theta}=\frac{\Sigma}{\Delta\sin\theta}\frac{e^{G(\psi_3,\psi_4)}+e^{\overline{G}(\psi_3,\psi_4)}+\sqrt{2}\,\Delta\int(j_0+\overline{j}_2)\sin\theta\,d\theta}{2},$$

$$F_{r\phi}=\frac{r^2+a^2}{\Delta}\frac{e^{G(\psi_3,\psi_4)}-e^{\overline{G}(\psi_3,\psi_4)}+\sqrt{2}\,\Delta\int(j_0-\overline{j}_0)\sin\theta\,d\theta}{2i},$$

$$F_{\theta\phi}=a\sin\theta\frac{e^{G(\psi_3,\psi_4)}+e^{\overline{G}(\psi_3,\psi_4)}+\sqrt{2}\,\Delta\int(j_0+\overline{j}_0)\sin\theta\,d\theta}{2},$$

$$T_{ab}=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{4}\frac{\Delta^2}{\Sigma^2}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}|\varphi_0|^2 & \frac{\Sigma}{\Delta}|\varphi_0|^2 & 0 & -a|\varphi_0|^2\sin^2\theta\\ \frac{\Sigma}{\Delta}|\varphi_0|^2 & \frac{\Sigma^2}{\Delta^2}|\varphi_0|^2 & 0 & -a\frac{\Sigma}{\Delta}|\varphi_0|^2\sin^2\theta\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -a|\varphi_0|^2\sin^2\theta & -a\frac{\Sigma}{\Delta}|\varphi_0|^2\sin^2\theta & 0 & a^2|\varphi_0|^2\sin^4\theta\end{pmatrix},$$

$$|\varphi_0|^2 = \frac{\Sigma}{\Delta^2 \sin^2\theta}\Big(e^{G(\psi_3,\psi_4)+\bar{G}(\psi_3,\psi_4)} + \sqrt{2}\, e^{\bar{G}(\psi_3,\psi_4)} \int j_0 \sin\theta\, d\theta +$$

$$+ \sqrt{2}\, e^{G(\psi_3,\psi_4)} \int \bar{j}_0 \sin\theta\, d\theta + 2\int j_0 \sin\theta\, d\theta \cdot \int \bar{j}_0 \sin\theta\, d\theta \Big).$$

Висновки щодо потоку енергії і напружень для вхідного ОІП є такими самими, які зроблені для вихідного ОІП у п. ***2.1***.

Висновки. Розгляд ОІП Максвелла у вигляді (4) або (6) дозволяє отримати точний загальний розв'язок рівнянь. З такими обмеженнями, отже, вперше у відомій літературі отримано певний клас точних розв'язків у метриці Керра. При прямуванні $a \to 0$ маємо розв'язок у метриці Шварцшільда в координатах Шварцшільда.

Торресом [30] отримано загальний розв'язок для випадку вихідного поля (аналог (4)) у просторі Мінковського у сферичній системі координат. Трішиним [4] також отримано загальний розв'язок для поля Максвелла у просторі Мінковського в ізотропних координатах. Розв'язок Торреса є частковим випадком нашого розв'язку (9) при $M \to 0$ і $a \to 0$, а розв'язок Трішина є таким з точністю до перетворення координат.

Порівнюючи розгляд однонапрямленого ізотропного поля спінора Максвелла з розглядом такого ж вигляду спінора Герца у методі розщеплення Когена та Кеґелеса [11, 12], Стюарта [24], робимо висновок, що обмеження на вихідні об'єкти, які досліджуються, по суті, є однаковими (розгляд виродженого спінора).

Отримані загальні розв'язки (9) і (12) задовольняють головне рівняння Тьюкольського при $s = -1$, $s = 1$, відповідно. Вони є аналітичними в усьому просторі, за винятком горизонтів і півосей $\theta = 0$, $\theta = \pi$. Власне ця обставина є головною їх відмінністю від розв'язків, отриманих Тьюкольським при використанні анзацу $\psi = e^{-i\omega t}e^{im\phi}S(\theta)R(r)$. Фізієв [14] встановив, що поліноміальні розв'язки кутового рівняння Тьюкольського мають особливості на полюсах. На відміну від цього, вище доведено, що такі особливості має загальний розв'язок рівнянь Максвелла у вигляді однонапрямленого ізотропного поля. Вважаємо, що ця обставина не є підставою для його дискримінації (усунення з розгляду), ці особливості є особливостями того ж типу, що їх містить детермінант метричного тензора метрики Керра в координатах Бойєра – Ліндквіста, і використання цих розв'язків поза точками особливостей є фізично змістовним. Простою ілюстрацією того, що особливості зумовлені симетрією поля і відповідним вибором координатної системи, а не обмеженням алгебраїчної загальності розв'язку, є вільний від особливостей загальний запізнюючий ізотропний розв'язок рівнянь Максвелла у просторі Мінковського у декартовій системі координат, який у запропоновану підході легко отримати у вигляді

$$\varphi_2 = e^{i\omega(t-z)}F(x-iy)$$

(плоска хвиля, що поширюється уздовж осі z), де F – довільна функція, $\omega \in \mathbb{R}$, метрика Мінковського задається елементом довжини у вигляді

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 .$$

Встановленню повного фізичного змісту отриманих розв'язків та їх застосуванню буде присвячено наступну публікацію.

1. *Пелих В. О., Тайстра Ю. В.* Побудова спінорного підходу до розщеплення системи рівнянь Максвелла у рімановому просторі // Праці НТШ. Фіз. зб. – 2011. – Том XXIX, т. 8. – С. 128–133.
2. *Старобинский А. А.* Усиление волн при отражении от вращающейся «черной дыры» // Журн. эксперим. теорет. физики. – 1973. – **64**, № 1. – С. 48–57.

Те саме: *Starobinskiĭ A. A.* Amplification of waves during reflection from a rotating “black hole” // Sov. Phys.–JETP. – 1973. – **37**, No. 1. – P. 28–32.

3. *Старобинский А. А., Чурилов С. М.* Усиление электромагнитных и гравитационных волн при рассеянии во вращающейся «черной дыре» // Журн. эксперим. теорет. физики. – 1974. – **65**, № 1. – С. 3–11.

   Те саме: *Starobinskiĭ A. A., Churilov S. M.* Amplification of electromagnetic and gravitational waves scattered by a rotating «black hole» // Sov. Phys.–JETP. 1974. – **38**, No. 1. – P. 1–5.
4. *Тришин В. Н.* Об изотропных решениях уравнения Максвелла // Наука и образование. – 2012. – № 11. – С. 183–188. – DOI: 10.7463/1112.0489647.
5. *Borissov R. S., Fiziev P. P.* Exact solutions of Teukolsky master equation with continuous spectrum // Bulg. J. Phys. – 2010. – **37**, No. 2. – P. 65–89.
6. *Boyer R. H., Lindquist R. W.* Maximal analytic extension of the Kerr metric // J. Math. Phys. – 1967. – **8**, No. 2. – P. 265–281. – DOI: 10.1063/1.1705193.
7. *Brill D. R., Chrzanowski P. L., Pereira C. M., Fackerell E. D., Ipser J. P.* Solution of the scalar wave equation in a Kerr background by separation of variables // Phys. Rev. **D**. –1972. – **5**, No. 8. – P. 1913–1915.
8. *Chandrasekhar S.* On algebraically special perturbations of black holes // Proc. Roy. Soc. Lond. **A**. – 1984. – **392**, No. 1802. – P. 1–13.
   – DOI: 10.1098/rspa.1984.0021.
9. *Chandrasekhar S.* The mathematical theory of black holes. – New York: Oxford Univ. Press, 1983. – 668 p.
10. *Chrzanowski P. L.* Vector potential and metric perturbations of a rotating black hole // Phys. Rev. **D**. – 1975. – **11**, No. 8. – P. 2042–2062.
    – DOI:10.1103/PhysRevD.11.2042.
11. *Cohen J. M., Kegeles L. S.* Constructive procedure for perturbations of spacetimes // Phys. Rev. **D**. – 1979. – **19**, No. 6. – P. 1641–1664.
    DOI: 10.1103/PhysRevD.191641.
12. *Cohen J. M., Kegeles L. S.* Electromagnetic fields in curved spaces: A constructive procedure // Phys. Rev. **D**. – 1974. – **10**, No. 4. – P. 1070–1084.
    DOI: 10.1103/PhysRevD.10.1070.
13. *Fackerell E. D., Ipser J. R.* Weak electromagnetic fields around a rotating black hole // Phys. Rev. **D**. – 1972. – **5**, No. 10. – P. 2455–2458.
    DOI:10.1103/PhysRevD.5.2455.
14. *Fiziev P. P.* Classes of exact solutions to the Teukolsky master equation // Class. Quant. Grav. – 2010. – **27**, No. 13. – DOI: 10.1088/0264-9381/27/13/135001.
15. *Fiziev P. P.* Exact solutions of Regge–Wheeler equation and quasi–normal modes of compact objects // Class. Quant. Grav. – 2006. – **23**, No. 7. – P. 2447–2468.
    DOI: 10.1088/0264-9381/23/7/015.
16. *Kerr R. P.* Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics // Phys. Rev. Lett. – 1963. – **11**, No. 5. – P. 237–238.
    DOI: 10.1103/PhysRevLett.11.237.
17. *Krauss L.* https://twitter.com/lkrauss1, 25.09.2015.
18. *Kinnersley W.* Type D vacuum metrics // J. Math. Phys. – 1963. – **10**, No. 7. – P. 1195–1203. – DOI: 10.1063/1.1664958.
19. *Musgrave P., Pollney D., Lake K.* GRTensorII: A computer algebra system for general relativity. – Queen’s Univ., Kingston, Ontario, 1994.
    http://grtensor.phy.queensu.ca/
20. *Newman E., Penrose R.* An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients // J. Math. Phys. – 1962. – **3**, No. 3. – P. 566–578.
    DOI: 10.1063/1.1724257.
21. *Penrose R., Rindler W.* Spinors and space-time. Vol. 1: Two-spinor calculus and relativistic fields. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984. – 472 p.
22. *Staicova D., Fiziev P.* The Heun functions and their applications in astrophysics // arXiv:1601.04021v1 [math–ph]. – 2016.
23. *Stewart J. M.* Advanced general relativity. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. – 228 p.
24. *Stewart J. M.* Herz–Bromwich–Debye–Whittaker–Penrose potentials in general relativity // Proc. Roy. Soc. Lond. **A**. – 1979. – **367**, No. 1731. – P. 527–538.
    DOI: 10.1098/rspa.1979.0101.
25. *Taistra Y. V.* New approach to decoupling Maxwell equations in curved spacetime // WDS’13–Proc. contributed papers: Part III – Physics / Ed. by J. Šafránková, J. Pavlů. – Prague: Matfyzpress, 2013. – P. 29–32.

26. *Talbot C. J.* Newman–Penrose approach to twisting degenerate metrics // Commun. Math. Phys. – 1969. – **13**, No. 1. – P. 46–61. – DOI: 10.1007/BF01645269.
27. *Teukolsky S. A.* Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino–field perturbations // The Astroph. Journal. – 1973. – **185**. – P. 635–648. – DOI: 10.1086/152444.
28. *Teukolsky S. A.* Rotating black holes: Separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations // Phys. Rev. Lett. – 1972. – **29**, No. 16. – P. 1114–1118.
29. *Teukolsky S. A.* The Kerr metric // ArXiv:1410.2130v2 [gr–qc]. – 2015.
30. *Torres del Castillo G. P.* 3-*D* spinors, spin-weighted functions and their applications. – Basel: Birkhäuser, 2003. – ix+249 p. – Ser. Progr. in Math. Phys. Vol. 32. – DOI: 10.1007/978-0-8176-8146-3.
31. *Wald R. M.* Construction of gravitational, electromagnetic, or other perturbation equations from solutions of decoupled equations // Phys. Rev. Lett. – 1978. – **41**, No. 4. – P. 203–206. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.41.203.
32. *Wald R. M.* On perturbations of a Kerr black hole // J. Math. Phys. – 1973. – **14**, No. 10. – P. 1453–1461. – DOI: 10.1063/1.1666203.

КЛАСС ОБЩИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕ КЕРРА

Рассмотрены изотропные однонаправленные электромагнитные поля в пространстве типа $\mathcal{D}$ и в пространстве Керра. В классе таких полей найдено общее решение уравнений Максвелла.

CLASS OF GENERAL SOLUTIONS OF MAXWELL EQUATIONS IN KERR SPACE-TIME

Null one-way electromagnetic fields in type $\mathcal{D}$ space-time and in Kerr space-time are considered. In the class of such fields general solution of Maxwell equations have been found.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.01.16