УДК 512.546

Н. М. Пирч

ПРО УЗАГАЛЬНЕНІ РЕТРАКТИ ТА ІЗОМОРФНУ КЛАСИФІКАЦІЮ ВІЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ. II

Наведено застосування паралельних узагальнених ретрактів до побудови просторів з топологічно ізоморфними вільними (абелевими) топологічними групами та вільними локально опуклими просторами.

Стаття є продовженням роботи [2]. Термінологія і позначення взяті з [2] і [5]. У **п. 1** подаємо застосування паралельних G-ретрактів до побудови ізоморфізмів між вільними топологічними групами та вільними локально опуклими просторами. У **п. 2** досліджуємо M-еквівалентність недиз'юнктних об'єднань тихоновських просторів.

1. Паралельні G-ретракти та M-еквівалентність. Наступна теорема, встановлена в [1], дає можливість використовувати паралельні G-ретракти для побудови M-еквівалентних просторів.

Теорема 1. *Якщо підпростори K_1 та K_2 є паралельними G-ретрактами (G_A-ретрактами, L-ретрактами) простору X, то R-факторні простори X/K_1 та X/K_2 є M-еквівалентними (A-еквівалентними, L-еквівалентними).*

Для топологічного простору X через X^+ будемо позначати простір, отриманий з простору X додаванням однієї ізольованої точки.

У наступних двох наслідках на фактор-просторі X/K розглядається R-факторна топологія (див. [6]), що дає можливість не виходити за межі класу тихоновських просторів.

З теореми 1 та наслідку 2 з роботи [2] випливає

Наслідок 1. *Якщо підпростір K є G-ретрактом (G_A-ретрактом, L-ретрактом) простору X, то простори $K \oplus (X/K)$ та X^+ є M-еквівалентними (A-еквівалентними, L-еквівалентними).*

Як встановлено у [7], букет сім'ї тихоновських просторів з точністю до M-еквівалентності не залежить від вибору відмічених точок. Тому інколи будемо вживати скорочене позначення букету $X \vee Y$.

З теореми 1 та наслідку 3 з роботи [2] випливає

Наслідок 2. *Якщо підпростір K є G-ретрактом (G_A-ретрактом, L-ретрактом) простору X, то простори $K \vee (X/K)$ та X є M-еквівалентними (A-еквівалентними, L-еквівалентними).*

Наслідок 3. *Якщо послідовність підмножин $K_1, K_2, \ldots, K_n$ простору X таких, що підпростори K_i та K_{i+1} є паралельними G-ретрактами (G_A-ретрактами, L-ретрактами) простору X для всіх $i = 1, \ldots, n-1$, то R-факторні простори X/K_1 та X/K_n є M-еквівалентними (A-еквівалентними, L-еквівалентними).*

Для топологічних груп G та H через $G * H$ будемо позначати вільний топологічний добуток топологічних груп G та H (див. [1]).

З теореми 3 роботи [4] та наслідку 2 випливають такі наслідки.

Наслідок 4. *Якщо підпростір K є G-ретрактом тихоновського простору X, то*

$$F_G(X) \cong F_G(K) * F_G(X/K)$$

і

$$F(X) \cong F(K) * F_G(X/K) \cong F_G(K) * F(X/K).$$

Наслідок 5. *Якщо підпростір* K *є* G_A*-ретрактом тихоновського простору* X*, то*

$$A_G(X) \cong A_G(K) \times A_G(X/K)$$

і

$$A(X) \cong A(K) \times A_G(X/K) \cong A_G(K) \times A(X/K).$$

Теорема 2. *Нехай* $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ *− диз'юнктна сім'я абсолютних* G*-ретрактів тихоновського простору* X *таких, що для кожного* $i = 1, \dots, n$ *простори* A_i *та* B_i *є гомеоморфними. Тоді* R*-факторні простори* $X/\{A_1, \dots, A_n\}$ *та* $X/\{B_1, \dots, B_n\}$ *є* M*-еквівалентними.*

Д о в е д е н н я. Нехай $p : X \to X/\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\}$ − R-факторне відображення. Тоді підпростір $p(A_n)$ є неперервним бієктивним образом компактного простору A_n, а отже, гомеморфний цьому простору. Аналогічно, простір $p(B_n)$ гомеоморфний простору B_n. За теоремою 1 з роботи [2] підпростори A_n і B_n є паралельними G-ретрактами простору $X/\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\}$. Тому

$$X/\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n\} \overset{M}{\sim} X/\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, B_n\}.$$

Аналогічно доводимо, що

$$X/\{A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}, B_n\} \overset{M}{\sim} X/\{A_1, A_2, \dots, A_{n-2}, B_{n-1}, B_n\},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$X/\{A_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n\} \overset{M}{\sim} X/\{B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n\}.$$

За транзитивністю відношення M-еквівалентності маємо, що

$$X/\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n\} \overset{M}{\sim} X/\{B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n\}. \qquad \blacklozenge$$

Нехай Y − підпростір простору X і $\sim_Y$ − деяке відношення еквівалентності, задане на Y. Можемо продовжити це відношення до відношення еквівалентності $\sim_X$, заданого на X, покладаючи $x \sim_X y$ тоді й тільки тоді, коли $x = y$ або $x, y \in Y$ і $x \sim_Y y$. Залежно від того, на якому просторі розглядається це відношення, будемо писати $\sim_Y$ або $\sim_X$.

Теорема 3. *Нехай* X *− довільний простір,* K_1 *та* K_2 *− його* G*-ретракти такі, що* $X/K_1 \overset{M}{\sim} X/K_2$. *Нехай також* $\sim_1$ *та* $\sim_2$ *− деякі відношення еквівалентності, задані на* K_1 *та* K_2 *відповідно, такі, що* $(K_1/\sim_1) \overset{M}{\sim} (K_2/\sim_2)$. *Тоді* $(X/\sim_1)^+ \overset{M}{\sim} (X/\sim_2)^+$.

Д о в е д е н н я. Нехай $p : X \to (X/\sim_1)$ − фактор-відображення. За твердженням 3 з [3], підпростір $p(K_1)$ є G-ретрактом в $X/\sim_1$ і $p(K_1)$ є гомеоморфним фактор-простору $K_1/\sim_1$. Покладемо $Z = (X/\sim_1) \oplus (K_1/\sim_1)$. Оскільки $p(K_1)$ і $K_1/\sim_1$ є паралельними G-ретрактами простору Z, то за теоремою 6, $(X/\sim_1)^+ \overset{M}{\sim} (X/K_1) \oplus (K_1/\sim_1)$. Аналогічно, $(X/\sim_2)^+ \overset{M}{\sim} (X/K_2) \oplus$

$\oplus(K_2/\sim_2)$. З огляду на адитивність відношення M-еквівалентності отримаємо, що $(X/K_1)\oplus(K_1/\sim_1)\overset{M}{\sim}(X/K_2)\oplus(K_2/\sim_2)$, а отже,

$$(X/\sim_1)^+\overset{M}{\sim}(X/K_1)\oplus(K_1/\sim_1)\overset{M}{\sim}(X/K_2)\oplus(K_2/\sim_2)\overset{M}{\sim}(X/\sim_2)^+. \qquad \blacklozenge$$

Наслідок 6. *Нехай X – довільний простір, K – його G-ретракт, $\sim_1$ та $\sim_2$ – деякі відношення еквівалентності, задані на K, такі, що $(K/\sim_1)\overset{M}{\sim}(K/\sim_2)$. Тоді $(X/\sim_1)^+\overset{M}{\sim}(X/\sim_2)^+$.*

Це твердження можна, зокрема, використовувати, коли K_1 та K_2 є паралельними чи ортогональними ретрактами.

2. M-еквівалентність недиз'юнктних об'єднань тихоновських просторів.

Для доведення наступної теореми потрібна допоміжна

Лема 1. *Нехай X, Y та Z – тихоновські простори. Тоді*

$$(X\vee Z)\oplus Y\overset{M}{\sim}X\oplus(Y\vee Z).$$

Д о в е д е н н я. Нехай $x_0\in X$, $y_0\in Y$, $z_0\in Z$ – довільні точки. На просторі $T=X\oplus Y\oplus Z$ розглянемо підпростори $K_1=\{x_0,z_0\}$, $K_2=\{y_0,z_0\}$. Підпростори K_1 та K_2 є паралельними ретрактами простору $T=X\oplus Y\oplus Z$, тому $T/K_1\overset{M}{\sim}T/K_2$, тобто $(X\vee Z)\oplus Y\overset{M}{\sim}X\oplus(Y\vee Z)$. $\blacklozenge$

Теорема 4. *Нехай X та Y – замкнені простори тихоновського простору $X\bigcup Y$, причому підпростір $X\bigcap Y$ є G-ретрактом простору $X\bigcup Y$. Тоді $(X\bigcup Y)\oplus(X\bigcap Y)\overset{M}{\sim}X\oplus Y$.*

Д о в е д е н н я. Покладемо $K=X\bigcap Y$. Оскільки підпростір K є G-ретрактом простору $X\bigcup Y$, то підпростір $X\bigcap Y$ є G-ретрактом просторів $X\subseteq X\bigcup Y$ та $Y\subseteq X\bigcup Y$.

Нехай $h_X:K\to X$, $h_Y:K\to Y$ – вкладення, $R_X:F(X)\to F(h_X(K))$, $R_Y:F(Y)\to F(h_Y(K))$ – гомоморфні ретракції, $a\in K$ – довільна точка. Покладемо

$$Z=(X,h_X(a))\vee(Y,h_Y(a))\vee(K,a),$$
$$T=(h_X(K),h_X(a))\vee(h_Y(K),h_Y(a))\vee(K,a).$$

Розглянемо відображення $R:Z\to F(T)$, означене як

$$R(x)=\begin{cases}R_x(x), & x\in X,\\ R_y(x), & x\in Y,\\ x, & x\in K.\end{cases}$$

Оскільки $R(h_X(a))=R(h_Y(a))=R(a)=a$, то відображення R є коректно означеним. Оскільки звуження $R|_X$, $R|_Y$ та $R|_K$ є неперервними, то відображення R є неперервним. Крім того, за означенням, $R(z)=z$ для всіх $z\in Z$. Тобто підпростір T є G-ретрактом простору Z.

На множині T (а відповідно і на Z) означимо відношення еквівалентності $\sim_1$ та $\sim_2$ таким чином:

$x\sim_1 y$, якщо $x=y$, або $x\in K$, $y\in h_X(K)$ і $y=h_X(x)$, або $x\in h_X(K)$, $y\in K$ і $x=h_X(y)$.

$x\sim_2 y$, якщо $x=y$, або $x\in h_X(K)$, $y\in h_Y(K)$ і $x=h_X\left(h_Y^{-1}(y)\right)$, або $x\in h_Y(K)$, $y\in h_X(K)$ і $y=h_X\left(h_Y^{-1}(x)\right)$.

Фактор-простори $T/\sim_1$ і $T/\sim_2$ є гомеоморфними простору $(h_X(K), h_X(a)) \vee (K, a)$, а тому між собою є M-еквівалентними. Згідно з наслідком 6, отримаємо, що $(Z/\sim_1)^+ \overset{M}{\sim} (Z/\sim_2)^+$.

Покажемо, що фактор-простір $Z/\sim_1$ гомеоморфний простору $(X, h_X(a)) \vee (Y, h_Y(a))$. Для цього достатньо показати, що звуження фактор-відображення $p_1 : Z \to Z/\sim_1$ на множину $(X, h_X(a)) \vee (Y, h_Y(a))$ є гомеоморфізмом. Оскільки це звуження є неперервним і бієктивним, то залишається показати його замкненість. Нехай $A \subseteq (X, h_X(a)) \vee (Y, h_Y(a))$ – замкнена підмножина, тоді підмножина $A \cap h_X(K)$ є замкненою в Z, а отже, множина $h_X^{-1}(A \cap h_X(K))$ є замкненою у K і, відповідно, у Z. А тому, згідно з факторністю відображення p_1, отримаємо, що множина $p_1(A)$, для якої $p_1^{-1}(p_1(A)) = A \cup h_X^{-1}(A \cap h_X(K))$, є замкненою у $Z/\sim_1$.

Покажемо, що фактор-простір $Z/\sim_2$ гомеоморфний простору $W = ((X \cup Y), h_X(a)) \vee (K, a)$. Нехай $f : Z \to ((X \cup Y), h_X(a)) \vee (K, a)$ – природне відображення. Потрібно довести, що відображення f є факторним. Звуження відображення f на підмножини X, Y та K є вкладеннями, тобто є неперервними. Отже, відображення f є неперервним.

Залишається показати замкненість відображення f.

Нехай A – підмножина у W така, що множина $f^{-1}(A)$ є замкненою у Z. Тоді підмножини $f^{-1}(A) \cap X$, $f^{-1}(A) \cap Y$ та $f^{-1}(A) \cap K$ є замкненими відповідно в X, Y та K. Оскільки звуження $f|_X : X \to f(X)$, $f|_Y : Y \to f(Y)$, $f|_K : K \to f(K)$ є гомеоморфізмами, то множини $A \cap f(X)$, $A \cap f(Y)$ та $A \cap f(K)$ є замкненими відповідно у $f(X)$, $f(Y)$ та $f(K)$. Оскільки множини $f(X)$, $f(Y)$ та $f(K)$ є замкненими у просторі W, то множини $A \cap f(X)$, $A \cap f(Y)$ та $A \cap f(K)$ є замкненими також і у просторі W. А отже, множина $A = (A \cap f(X)) \cup (A \cap f(Y)) \cup (A \cap f(K))$ є замкненою у W.

За лемою 1 маємо, що $(X_1 \vee X_2)^+ \overset{M}{\sim} X_1 \oplus X_2$ для довільних просторів X_1 та X_2. Таким чином,

$$(X \cup Y) \oplus (X \cap Y) \overset{M}{\sim} (Z/\sim_2)^+ \overset{M}{\sim} (Z/\sim_1)^+ \overset{M}{\sim} X \oplus Y. \qquad \blacklozenge$$

Наслідок 7. *Нехай X та Y – замкнені простори тихоновського простору $X \cup Y$, причому простір $X \cap Y$ є абсолютним G-ретрактом. Тоді $(X \cup Y) \oplus (X \cap Y) \overset{M}{\sim} X \oplus Y$.*

Наступні два приклади вказують на важливість умови простору $X \cap Y$ бути G-ретрактом простору $X \cup Y$, а також на важливість умови замкненості підпросторів X та Y у просторі $X \cup Y$.

Приклад 3. Нехай

$$X = \{(x, \sqrt{1-x^2}) : -1 \le x \le 1\},\ Y = \{(x, -\sqrt{1-x^2}) : -1 \le x \le 1\}.$$

Тоді простір $(X \cup Y) \oplus (X \cap Y)$ містить три компоненти зв'язності, тоді як простір $X \oplus Y$ містить лише дві компоненти зв'язності, тобто ці простори не є M-еквівалентними.

Приклад 4. Нехай $X=[0,1)$, $Y=[1,2]$ − підпростори дійсної прямої з топологією, породженою евклідовою метрикою. Тоді простір $(X\bigcup Y)\oplus$ $\oplus(X\bigcap Y)=[0,2]$ містить одну компоненту зв'язності, тоді як простір $X\oplus Y$ містить дві компоненти зв'язності, тобто ці простори не є M-еквівалентними.

Наслідок 8. *Нехай X − топологічна напівґратка, впорядкована відношенням порядку $<$. Тоді відображення $m: X^2\to X$, означене як $m(x,y)=$ $=\max\{x,y\}$ є неперервним.*

Розглянемо у просторі X^2 підпростори

$$Y_1=\{(x,y)\in X\times X: y\le x\},$$

$$Y_2=\{(x,y)\in X\times X: y\ge x\}.$$

Застосувавши теорему 1.5.4 з [4] для відображень $m(x,y)=\max\{x,y\}$ і $f(x,y)=x$, отримаємо, що підпростір Y_1 є замкненим в X^2. За цією ж теоремою для відображень $m(x,y)=\max\{x,y\}$ і $g(x,y)=y$ отримаємо, що підпростір Y_2 є замкненим в X^2.

Підпростір $Y_1\bigcap Y_2=\Delta_X=\{(x,y)\in X\times X: y=x\}$ є G-ретрактом простору $Y_1\bigcup Y_2=X\times X$. Тому $X^2\oplus\Delta_X\overset{M}{\sim}Y_1\oplus Y_2$. Оскільки простори Y_1 та Y_2 є гомеоморфними (гомеоморфізм задається формулою $h(x,y)=(y,x)$), то остаточно отримаємо, що $X^2\oplus\Delta_X\overset{M}{\sim}Y_1\oplus Y_1$.

Приклад 5. Нехай $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0.5\le x^2+y^2\le 1\}$, $Y=\{(x,y)\in$ $\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 2\}$ − підпростори дійсної площини. Тоді $X\bigcup Y=$ $=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0.5\le x^2+y^2\le 2\}$, $X\bigcap Y=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$. Оскільки простори X, Y та $X\bigcup Y$ є гомеоморфними, то $X\oplus X\overset{M}{\sim}X\oplus(X\bigcap Y)$.

Приклад 6. Для n-вимірного простору $\mathbb{R}^n$ розглянемо наступні множини:

$$D_n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid 1\le x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\le 2\},$$

$$S_n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1\}.$$

Аналогічно, як у попередньому прикладі, встановлюємо, що

$$D_n\oplus D_n\overset{M}{\sim}D_n\oplus S_n.$$

Приклад 7. В n-вимірному просторі $\mathbb{R}^n$ розглянемо n-вимірні куби

$$I_n^{(1)}=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid 0\le x_1\le 1, 0\le x_2\le 1,\dots,0\le x_n\le 1\},$$

$$I_n^{(2)}=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid 0\le x_1\le 1, 0\le x_2\le 1,\dots,1\le x_n\le 2\}.$$

Оскільки простори $I_n^{(1)}$, $I_n^{(2)}$ та $I_n^{(1)}\bigcup I_n^{(2)}$ є між собою гомеоморфними, а простір

$$I_n^{(1)}\bigcap I_n^{(2)}=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid 0\le x_1\le 1, 0\le x_2\le 1,\dots,x_n=1\}$$

є гомеоморфним $(n-1)$-вимірному кубу I_{n-1}, то $I_n\oplus I_n\overset{M}{\sim}I_n\oplus I_{n-1}$.

Означення 1. Скажемо, що простір X є квіткою своїх замкнених підпросторів X_1, X_2, …, X_n, якщо $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, підпростір $K = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$ є непорожнім і $X_i \bigcap X_j = K$ для всіх $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Під парою просторів (X, K) будемо розуміти вкладення $K \to X$. Тоді означення квітки запишемо скорочено як $X = \operatorname{Fl}_{i=1}^{n}(X_i, K)$.

Теорема 5. *Якщо простір* $X = \operatorname{Fl}_{i=1}^{n}(X_i, K)$ *є квіткою своїх підпросторів* (X_i, K), *а простір* K *є* X*-ретрактом простору* X, *то*

$$\bigoplus_{i-1}^{n} X_i \overset{M}{\sim} \operatorname{Fl}_{i=1}^{n}(X_i, K) \oplus D_{n-1} \times K .$$

Д о в е д е н н я. Застосувавши теорему 4 до просторів $Y = \operatorname{Fl}_{i=1}^{n-1}(X_i, K)$ і $Z = X_n$, отримаємо, що

$$\operatorname{Fl}_{i=1}^{n-1}(X_i, K) \oplus X_n \overset{M}{\sim} \operatorname{Fl}_{i=1}^{n}(X_i, K) \oplus K .$$

Застосувавши теорему 4 до просторів $Y = \operatorname{Fl}_{i=1}^{n-2}(X_i, K)$ і $Z = X_{n-1}$, отримаємо, що

$$\operatorname{Fl}_{i=1}^{n-2}(X_i, K) \oplus X_{n-1} \overset{M}{\sim} \operatorname{Fl}_{i=1}^{n-1}(X_i, K) \oplus K .$$

Таким чином,

$$\operatorname{Fl}_{i=1}^{n}(X_i, K) \oplus K \oplus K \overset{M}{\sim} \operatorname{Fl}_{i=1}^{n-1}(X_i, K) \oplus X_n \oplus K \cong$$

$$\cong \operatorname{Fl}_{i=1}^{n-1}(X_i, K) \oplus K \oplus X_n \overset{M}{\sim} \operatorname{Fl}_{i=1}^{n-2}(X_i, K) \oplus X_{n-1} \oplus X_n .$$

Повторивши подібні міркування за індукцією $n-1$ разів, отримаємо твердження цієї теореми. ♦

Зауваження 1. Всі теореми цього розділу та їхні наслідки будуть справджуватись, якщо у їхніх формулюваннях поняття G-ретракту замінити на поняття G_A-ретракту (L-ретракту), а відношення M-еквівалентності – відповідно на відношення A-еквівалентності (L-еквівалентності).

1. *Пирч Н. М.* Про вільні добутки паратопологічних груп та вільні паратопологічні групи // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2011. – № 696. – С. 20–25.
2. *Пирч Н. М.* Про узагальнені ретракти та ізоморфну класифікацію вільних об'єктів. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 2. – С. 38–46.
3. *Пирч Н. М.* Узагальнені ретракти і ізоморфізми вільних топологічних груп // Мат. студії. – 2010. – **33**, № 1. – С. 29–38.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – Москва: Мир, 1986. – 751 с.
   Те саме: *Engelking R.* General topology. – Warszawa: PWN, 1977.
5. *Arkhangel'skiĭ A. V., Tkachenko M.* Topological groups and related structures. – Amsterdam–Paris: Atlantis Press, 2008. – xiv + 781 p.
6. *Choban M. M.* Algebraical equivalences of topological spaces // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. – 2001. – **1**, No. 35. – P. 12–36.
7. *Okunev O. G.* A method for constructing examples of *M*-equivalent spaces // Topology Appl. – 1990. – **36**, No. 2. – P. 157–171; Correction // Topology Appl. – 1993. – **49**, No. 2. – P. 191–192.

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕТРАКТАХ И ИЗОМОРФНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ СВОБОДНЫХ ОБЪЕКТОВ. II

Приведено применение параллельных обобщенных ретрактов к построению примеров пространств с топологически изоморфными свободными (абелевыми) топологическими группами и свободными локально выпуклыми пространствами.

ON GENERALIZED RETRACTS AND ISOMORPHIC CLASSIFICATION OF FREE OBJECTS. II

The applying of parallel generalized retracts for constructing the examples of the spaces with topologically isomorphic free (abelian) topological groups and free locally convex spaces is presented.

Укр. акад. друкарства, Львів

Одержано
29.05.14