УДК 512.64

Б. З. Шаваровський

НАПІВСКАЛЯРНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ І КВАЗІДІАГОНАЛЬНА ПОДІБНІСТЬ МАТРИЦЬ

Встановлено умови напівскалярної еквівалентності одного класу регуляризовних поліноміальних матриць. Визначено канонічну форму матриці відносно квазідіагональної подібності.

Вступ. Розглядається задача про напівскалярну еквівалентність матриць над кільцем поліномів. Її основними складовими частинами є: встановлення умов напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць, пошук інваріантів і побудова канонічних форм для таких матриць стосовно напівскалярно еквівалентних перетворень. Ці задачі відносяться до найскладніших класифікаційних задач. Це так звані «дикі» задачі, які містять проблему пар матриць – одну з найбільш популярних і складних задач лінійної алгебри. Оскільки загальні підходи до розв'язання таких задач дотепер невідомі, то кожен з часткових випадків становить інтерес. У цьому контексті слід відмітити роботи [4, 5–9] (див. також цитовану там літературу).

1. Означення. Попередні відомості. У цій праці досліджуємо напівскалярну еквівалентність поліноміальних матриць $L(x) \in M(n, \mathbb{C}[x])$, які є правоеквівалентними до регулярного, зокрема унітального, матричного полінома другого степеня, тобто

$$L(x)R(x) = E_n x^2 + Mx + N ,$$

де E_n – одинична матриця порядку n, $R(x) \in GL(n, \mathbb{C}[x])$. Такі матриці називають регуляризовними справа. Умови регуляризовності матриць і методи побудови для них правоеквівалентних регулярних матриць добре відомі (див., наприклад, [3]). Припускаємо, що один з коефіцієнтів полінома $E_n x^2 + Mx + N$ діагоналізується подібністю, причому на головній діагоналі такої зведеної матриці кожне власне значення зустрічається не більше двох разів. Це рівнозначне тому, що один з коефіцієнтів цього полінома має просту структуру, а всі власні значення – не вище другої кратності. Нехай таким є коефіцієнт M. Поле $\mathbb{C}$ комплексних чисел надалі вважатимемо впорядкованим лексикографічно. Так само лексикографічно впорядкованим будемо вважати множину пар натуральних чисел. Кожна з таких пар далі означатиме позицію деякого елемента чи блока матриці. Одиничну матрицю порядку t позначимо через E_t. Матрицю ${}^tC = P_n C^t P_m$ розміру $n \times m$ будемо називати *пертранспонованою* для $m \times n$ -матриці C. Тут C^t – транспонована для матриці C, а P_n і P_m – перодиничні матриці перестановки відповідних порядків n і m, тобто квадратні матриці з одиницями на побічних діагоналях і всіма нульовими елементами поза цими діагоналями. Форми Жордана будуть верхніми. Домовимося також власні значення діагоналізованої (=Жорданової) форми матриці M полінома $E_n x^2 + Mx + N$ розміщувати так, щоб перші позиції головної діагоналі в порядку зростання займали прості (однократні) власні значення, а наступні, в порядку неспадання, – кратні (двократні) власні значення.

Далі виникне потреба дослідження подібності наборів 2×2 -матриць. Тому розглянемо усі можливі випадки і в кожному з них побудуємо канонічну форму відносно подібності для набору

$$(A_1, \ldots, A_m), \qquad A_i \in M(2, \mathbb{C}), \qquad m \ge 1 . \tag{1}$$

Означення 1. Набір з $m \geq 2$ матриць, у якому перша матриця з нерівними власними значеннями має форму Жордана $\operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 < \alpha_2$, а перша некомутуюча з нею – вигляд $\begin{Vmatrix} * & 1 \\ * & * \end{Vmatrix}$ або $\begin{Vmatrix} * & 0 \\ 1 & * \end{Vmatrix}$, називають канонічним для набору (1), у якому деяка матриця має різні власні значення і не кожні дві комутують.

Означення 2. Набір з $m \geq 1$ діагональних матриць, у якому перша матриця з нерівними власними значеннями має форму Жордана $\operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1 < \alpha_2$, називають канонічним для набору (1) попарно комутуючих матриць, якщо якась матриця з цього набору має різні власні значення.

Означення 3. Набір з $m \geq 2$ матриць (1), кожна з яких має рівні власні значення, і не всі матриці комутують, називають канонічним, якщо перша нескалярна матриця має форму Жордана, а перша некомутуюча з нею – вигляд $\begin{Vmatrix} 0 & * \\ c & * \end{Vmatrix}$, $c \neq 0$.

Означення 4. Набір з $m \geq 1$ верхньотрикутних теплицевих матриць, у якому перша нескалярна матриця має форму Жордана, називають канонічним для набору (1) попарно комутуючих матриць, кожна з яких має рівні власні значення, але не всі вони скалярні.

Означення 5. Набір (1) (з $m \geq 1$) скалярних матриць називають канонічним.

Застосовуючи перетворення подібності

$$E_n x^2 + Mx + N \to P(E_n x^2 + Mx + N)P^{-1} = E_n x^2 + Ax + B,$$

отримаємо поліном $E_n x^2 + Ax + B$, де

$$A = \left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ \hline & & & \mu_1 E_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \mu_\ell E_2 \end{array}\right\Vert, \quad \lambda_1 < \ldots < \lambda_k, \quad \mu_1 < \ldots < \mu_\ell, \quad (2)$$

$$B = \left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} B(1,1) & \ldots & B(1,k) & B(1,k+1) & \ldots & B(1,k+\ell) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B(k,1) & \ldots & B(k,k) & B(k,k+1) & \ldots & B(k,k+\ell) \\ \hline B(k+1,1) & \ldots & B(k+1,k) & B(k+1,k+1) & \ldots & B(k+1,k+\ell) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B(k+\ell,1) & \ldots & B(k+\ell,k) & B(k+\ell,k+1) & \ldots & B(k+\ell,k+\ell) \end{array}\right\Vert, \quad (3)$$

$B(i,j) \in \mathbb{C}$, $i,j = 1,\ldots,k$; $B(k+u, k+v) \in M(2,\mathbb{C})$, $u,v = 1,\ldots,\ell$. За таких припущень нескладно переконатися, що поліном $E_n x^2 + Ax + B$ визначається з точністю до перетворення $E_n x^2 + Ax + B \to S(E_n x^2 + Ax + B)S^{-1}$, де

$$S = \operatorname{diag}(s_1,\ldots,s_k, S_1,\ldots,S_\ell), \quad (4)$$

s_i – довільні ненульові числа, $i = 1,\ldots,k$, S_u – довільні неособливі 2×2-матриці, $u = 1,\ldots,\ell$. Щоб впевнитися у цьому, досить взяти до уваги вигляд матриці, комутуючої з матрицею A (див. [1, гл. 8, §2]).

2. Квазідіагональна подібність матриць. Матрицю B, зображену у блочному вигляді (3), перетвореннями

$$B \to SBS^{-1}, \quad S = \operatorname{diag}(1,\ldots,1,S_1,\ldots,S_\ell), \quad S_u \in GL(2,\mathbb{C}), \quad (5)$$

зведемо до такого вигляду, щоб деякі з неособливих 2×2 -блоків $B(k+u, k+v)$, $1 \le u, v \le \ell$ (якщо такі існують), стали одиничними матрицями E_2. Блочно-діагональні матриці з усіма діагональними блоками, не вище другого порядку, називають *квазідіагональними*, а перетворення подібності під дією таких матриць і відповідне відношення еквівалентності називають *квазідіагональною подібністю*. Питання діагональної подібності розглядаються у працях [2, 10].

Для кожного орієнтованого графа H з вершинами $1,\dots,\ell$ скажемо, що перетворення (5) є H-перетворенням, якщо $S_p = S_q$ для всіх орієнтованих ребер $p \to q$ в H. Нехай H_0 − граф з вершинами $1,\dots,\ell$ без ребер.

Алгоритм І.

Крок 1. Форма Жордана блоку $B(k+1, k+1)$ матриці B є незмінною при перетвореннях вигляду (5). Фіксуємо її і записуємо $(B_1, H_1) := (B, H_0)$.

Крок 2. Якщо $\operatorname{rank} B(k+1, k+2) = 1$ або $B(k+1, k+2) = 0_2$, то тоді пишемо $(B_2, H_2) := (B_1, H_1)$. Якщо ж $B(k+1, k+2)$ − неособливий блок, то за допомогою H_1-перетворення робимо його рівним E_2. Додаємо до графа H_1 ребро $1 \to 2$. Позначаємо одержані граф і матрицю через H_2 і B_2 відповідно. В результаті на другому кроці матимемо (B_2, H_2).

Далі розглядаємо наступний блок того ж блочного рядка, а коли він закінчиться (при $\ell = 2$), то розглядаємо перший 2×2-блок наступного другого блочного рядка матриці B_2. Продовжуючи так і далі, через $h-1$ кроків матимемо (B_{h-1}, H_{h-1}).

Крок h. Нехай $B(k+p, k+q)$ − h-й блок отриманої на $(h-1)$-му кроці матриці B_{h-1}. Тоді $(p-1)\ell + q = h$. Якщо $p = q$ або $B(k+p, k+q) = 0$, або граф H_{h-1} має неорієнтований шлях від p до q, то форма Жордана цього блоку є незмінною при H_{h-1}-перетвореннях. Фіксуємо цю форму Жордана і записуємо $(B_h, H_h) := (B_{h-1}, H_{h-1})$. Так само поступаємо у випадку, коли $\operatorname{rank} B(k+p, k+q) = 1$ (тоді форма Жордана цього блоку при подальших перетвореннях може змінюватися). В іншому разі, якщо $\operatorname{rank} B(k+p, k+q) = 2$, робимо цей блок одиничною матрицею E_2 за допомогою H_{h-1}-перетворень. Додаємо до графа G_{h-1} орієнтоване ребро $p \to q$, позначаємо результуючі матрицю і граф відповідно через B_h і G_h. У кожному випадку на цьому кроці матимемо (B_h, H_h).

Продовжуємо так і далі, рухаючись 2×2-блоками матриці B блочними рядками і стовпцями відповідно зліва направо і зверху вниз. Після ℓ^2 таких кроків одержимо матрицю B_{ℓ^2} і деякий граф H_{ℓ^2}. Позначимо отриману матрицю через $B_0 = B_{\ell^2}$ і зобразимо її, як і вихідну матрицю, у блочному вигляді, аналогічному до (3): $B_0 = \|B_0(t, w)\|_1^{k+\ell}$, $B_0(i, j) \in \mathbb{C}$, $i, j = 1,\dots,k$; $B_0(k+u, k+v) \in M(2, \mathbb{C})$, $u, v = 1,\dots,\ell$. Якщо граф $H = H_{\ell^2}$ виявиться деревом і в ньому фігуруватимуть усі вершини $1,\dots,\ell$, то в отриманій матриці B_0 будуть зафіксованими форми Жордана всіх її 2×2-блоків. Така матриця B_0 визначається з точністю до перетворення

$$B_0 \to S_0 B_0 S_0^{-1}, \qquad S_0 = \operatorname{diag}(s_1,\dots,s_k, S_1,\dots,S_1).$$

Нехай граф $H = H_{\ell^2}$ є об'єднанням дерев H_i, в яких фігурують вершини

$$\{u_{i1}, \dots, u_{i\ell_i}\}, \quad i = 1, \dots, r, \quad r \geq 0, \quad u_{i1} < \dots < u_{i\ell_i}, \quad \ell_i \geq 2, \tag{6}$$

і не фігурують, можливо, вершини

$$u_{r+h,\,1}, \quad h = 1, \dots, s, \quad u_{r+1,\,1} < \dots < u_{r+s,\,1}, \quad s \geq 0,$$

$$\{u_{i1}, \dots, u_{i\ell_i}\} \bigcap \{u_{j1}, \dots, u_{j\ell_j}\} = \varnothing, \quad i \neq j,$$

$$\{u_{i1}, \dots, u_{i\ell_i}\} \bigcap \{u_{r+1,\,1}, \dots, u_{r+s,\,1}\} = \varnothing,$$

$$\{u_{11}, \dots, u_{1\ell_1}, \dots, u_{r1}, \dots, u_{r\ell_r}, u_{r+1,\,1}, \dots, u_{r+s,\,1}\} = \{1, \dots, \ell\}. \tag{7}$$

Тоді матриця B_0, отримана за ***алгоритмом I***, визначається з точністю до перетворення подібності $B_0 \to S_0 B_0 S_0^{-1}$, де в матриці S вигляду (3) маємо $S_u = S_v$, якщо вершини u і v фігурують в одному й тому ж графі H_i. Тому в матриці B_0 інваріантними будуть форми Жордана тих 2×2-блоків, які стоять на перетині блочних рядків і стовпців з номерами $k + u_{i1}, \dots, k + u_{i\ell_i}$, $i = 1, \dots, r$. Більше того, можемо вважати, що набір з цих блоків (для кожного i) має канонічну форму в сенсі одного із ***означень 1–5,*** а діагональні блоки в позиціях $(k + u_{r+h,\,1}, k + u_{r+h,\,1})$, $h = 1, \dots, s$, – форму Жордана. У такій матриці B_0 незмінними будуть, очевидно, позиції всіх нульових блоків.

Надалі введемо такі позначення:

$$\{v_{i1}, \dots, u_{i,\,\ell-\ell_i}\} = \{1, \dots, \ell\} \setminus \{u_{i1}, \dots, u_{i\ell_i}\},$$

$$v_{i1} < \dots < v_{i,\,\ell-\ell_i}, \quad i = 1, \dots, r,$$

$$\{v_{r+h,\,1}, \dots, u_{r+h,\,\ell-1}\} = \{1, \dots, \ell\} \setminus \{u_{r+h,\,1}\},$$

$$v_{r+h,\,1} < \dots < v_{r+h,\,\ell-1}, \quad h = 1, \dots, s.$$

Позначимо також через ${}^t B_0(j, m)$ пертранспонований блок для блока $B_0(j, m)$ матриці B_0. Для кожного $i = 1, \dots, r$ розглянемо набори блоків

$$\begin{aligned}
(B_0(k + u_{i1}, k + u_{i1}), \dots, B_0(k + u_{i1}, k + u_{i\ell_i}), B_0(k + u_{i2}, k + u_{i1}), \dots, \\
\dots, B_0(k + u_{i2}, k + u_{i\ell_i}), \dots, B_0(k + u_{i\ell_i}, k + u_{i1}), \dots, \\
\dots, B_0(k + u_{i\ell_i}, k + u_{i\ell_i})),
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
(B_0(k + u_{i1}, 1), \dots, B_0(k + u_{i1}, k), B_0(k + u_{i1}, k + v_{i1}), \dots, \\
\dots, B_0(k + u_{i1}, k + v_{i,\,\ell-\ell_i}), B_0(k + u_{i2}, 1), \dots, \\
\dots, B_0(k + u_{i2}, k), B_0(k + u_{i2}, k + v_{i1}), \dots, \\
\dots, B_0(k + u_{i2}, k + v_{i,\ell-\ell_i}), \dots, B_0(k + u_{i\ell_i}, 1), \dots, \\
\dots, B_0(k + u_{i\ell_i}, k), B_0(k + u_{i\ell_i}, k + v_{i1}), \dots,
\end{aligned}$$

$$\dots, B_0(k+u_{i\ell_i}, k+v_{i,\ell-\ell_i}), {}^tB_0(1, k+u_{i1}), \dots,$$

$$\dots, {}^tB_0(k, k+u_{i1}),\ {}^tB_0(k+v_{i1}, k+u_{i1}), \dots,$$

$$\dots, {}^tB_0(k+v_{i,\ \ell-\ell_i}, k+u_{i1}), {}^tB_0(1, k+u_{i2}), \dots,$$

$$\dots, {}^tB_0(k, k+u_{i2}), {}^tB_0(k+v_{i1}, k+u_{i2}), \dots,$$

$$\dots, {}^tB_0(k+v_{i,\ell-\ell_i}, k+u_{i2}), \dots, {}^tB_0(1, k+u_{i\ell_i}), \dots,$$

$$\dots, {}^tB_0(k, k+u_{i\ell_i}), {}^tB_0(k+v_{i1}, k+u_{i\ell_i}), \dots,$$

$$\dots, {}^tB_0(k+v_{i,\ell-\ell_i}, k+u_{i\ell_i})), \qquad (9)$$

а для кожного $h = 1, \dots, s$ – набір блоків

$$(B_0(k+u_{r+h,1}, 1), \dots, B_0(k+u_{r+h,1}, k), B_0(k+u_{r+h,1}, k+v_{r+h,1}), \dots,$$

$$\dots, B_0(k+u_{r+h,\ 1}, k+v_{r+h,\ \ell-1}), {}^tB_0(1, k+u_{r+h,1}), \dots,$$

$$\dots, {}^tB_0(k, k+u_{r+h,1}), {}^tB_0(k+v_{r+h,1}, k+u_{r+h,1}), \dots,$$

$$\dots, {}^tB_0(k+v_{r+h,\ell-1}, k+u_{r+h,1})). \qquad (10)$$

Означення 6. Нехай H – орієнтований граф без неорієнтованих циклів з вершинами $1, \dots, \ell$, який є об'єднанням дерев H_i, $i = 1, \dots, r$, $r \ge 0$, з вершинами (6) і порожнього графа (без ребер) з вершинами (7). Матрицю $B_0 = \|B_0(t, w)\|_1^{k+\ell}$, $B_0(i, j) \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \dots, k$; $B_0(k+u, k+v) \in M(2, \mathbb{C})$, $u, v = 1, \dots, \ell$, називають майже H-канонічною для матриці B вигляду (3) за виконання таких умов:

(***i***) блок $B_0(k+p, k+q)$ розміру 2×2 матриці B_0 дорівнює E_2, якщо граф H містить орієнтоване ребро $p \to q$;

(***ii***) блок $B_0(k+p, k+q)$ має ранг ≤ 1, якщо граф H не має орієнтованого шляху від p до q, або неорієнтований шлях від p до q містить орієнтоване ребро $u \to v$ таке, що $(u, v) > (p, q)$;

(***iii***) блок $B_0(k+p, k+q)$ є довільним в інших випадках;

(***iv***) для кожного $i = 1, \dots, r$ набір блоків (8) має канонічну форму в сенсі одного із ***означень 1–5***, а блок

$$B_0(k+u_{r+h,\ 1}, k+u_{r+h,\ 1}), \qquad h = 1, \dots, s, \qquad (11)$$

має форму Жордана;

(***v***) перший блок з ненульовим другим рядком набору (9) (відповідно набору (10)) має нульовий перший рядок, якщо набір (8) (відповідно блок (11)) має канонічну форму в сенсі ***означення 4***;

(***vi***) перший ненульовий блок набору (9) (відповідно набору (10)) має ненульовий другий рядок і нульовий перший рядок, а найближчий до нього блок з ненульовим першим рядком має нульовий другий рядок, якщо всі блоки набору (8) (відповідно блок (11)) є скалярними (відповідно скалярним).

Майже H-канонічну матрицю B_0 для B позначатимемо через B_{ncan}.

Теорема 1. *Для матриці B вигляду* (3) *існує єдиний граф H з вершинами $1, \dots, \ell$ та майже H-канонічна матриця $B_0 = B_{\mathrm{ncan}}$, до якої зводиться матриця B перетвореннями* (5). *Матриці B і B' переводяться одна в одну перетворенням подібності за допомогою матриці вигляду* (4) *тоді й тільки тоді, коли їх майже H-канонічні форми B_0 і $B_0' = B_{\text{ncan}}'$ (для одного і того ж графа H) переводяться одна в одну подібністю за допомогою матриці вигляду* (4), *яка задовольняє умови:*

1°) *$S_u = S_v$, якщо вершини u і v фігурують в одному і тому ж дереві H_i графа H;*

2°) *всі блоки S_j, $j = 1,\dots,\ell$, є діагональними;*

3°) *блок S_u є скалярним, якщо вершина u фігурує в дереві H_i графа H і набір блоків* (8) *для того самого i має канонічну форму в сенсі одного з* ***означень 1, 3*** *або* ***4;***

4°) *блок S_v є скалярним, якщо вершина $v = u_{r+h,1}$ не фігурує в графі H і блок* (11) *має рівні власні значення, але не є скалярним.*

Д о в е д е н н я. Для доведення *існування* залишається лише показати, що матриця B_0 з умовами (***i***)−(***iv***), вказаними в ***означенні 6***, може бути вибрана ще й з умовами (***v***) і (***vi***). Нехай для деякого i, $1 \le i \le r$, набір (8) або для деякого h, $1 \le h \le s$, блок (11) мають канонічну форму в сенсі ***означення 4***. Як легко бачити, комутуюча матриця з матрицями набору (8) для такого i, а також з матрицею (11) для такого h має вигляд $\begin{Vmatrix}\alpha & * \\ 0 & \alpha\end{Vmatrix}$. Перетворення $B_0 \to SB_0S^{-1}$, де в матриці S вигляду (4) $s_1 = \dots = s_k = 1$, $S_u = \begin{Vmatrix}1 & a \\ 0 & 1\end{Vmatrix}$ для кожного u, яке є вершиною графа H_i, $S_v = \begin{Vmatrix}1 & b \\ 0 & 1\end{Vmatrix}$ для $v = u_{r+h,1}$ і $S_w = E_2$ для всіх інших w, $1 \le w \le \ell$, числа a і b можна підібрати так, що в отриманій матриці SB_0S^{-1} буде виконуватись умова (***v***) з ***означення 6***. При цьому умови (***i***)−(***iv***) збережуться.

Нехай тепер для деякого i набір (8) або для деякого h блок (11) є скалярними матрицями. Якщо в матриці S вигляду (4) вважати, що $S_u = P$ для всіх вершин $u = u_{i1},\dots,u_{i\ell_i}$ графа H_i, $S_v = Q$ для $v = u_{r+h,1}$, а усі решта діагональні блоки є одиничними, то матриці P і Q можна вибрати так, що у трансформованій матриці SB_0S^{-1} буде виконуватися умова (***vi***) з ***означення 6***. Тоді умови (***i***)−(***v***) не порушаться.

Достатність очевидна.

Необхідність. Нехай матриці B і B' переводяться одна в одну подібністю за допомогою матриці вигляду (4). Тоді для їх майже H-канонічних форм

$$B_0 = \|B_0(t, w)\|_1^{k+\ell}, \quad B_0' = \|B_0'(t, w)\|_1^{k+\ell}, \quad B_0(i, j), B_0'(i, j) \in \mathbb{C}, \quad i, j = 1,\dots,k,$$

$$B_0(k+u, k+v), B_0'(k+u, k+v) \in M(2, \mathbb{C}), \qquad u, v = 1,\dots,\ell,$$

справджується рівність

$$SB_0 = B_0'S, \tag{12}$$

де матриця S має вигляд (4). Якщо дерево H_i графа H має орієнтоване ребро $p \to q$, то в матрицях B_0, B_0' блоки $B_0(k+p, k+q)$, $B_0'(k+p, k+q)$ є одиничними. Тому для матриці S з рівності (12) маємо $S_p = S_q$. А це означає, що $S_u = S_v$, якщо вершини u і v фігурують в дереві H_i. З цього випливає подібність набору (8) блоків матриці B_0 до відповідного набору блоків матриці B_0'. Оскільки ці набори мають одну з канонічних форм у сенсі ***означень 1*—*5***, то вони насправді збігаються. Якщо, зокрема, ці набори мають канонічну форму в сенсі ***означення 2***, то блок S_u матриці S є діагональним. Цей блок є діагональним або його можна вибрати діагональним і у випадку, коли всі блоки набору (8) є скалярними (див. умову (***vi***) з ***означення 6***). Якщо набір (8) має канонічну форму в сенсі ***означень 1*** або ***3***, то блок S_u є скалярним. Цей блок можна вибрати скалярним і у випадку, коли набір (8) має канонічну форму в сенсі ***означення 4*** (див. умову (***v***) з ***означення 6***).

Розглянемо далі ситуацію, коли у графі H вершина u відсутня. Якщо тоді блок $B_0(k+u, k+u)$ матриці B_0 має різні власні значення, то блок S_u матриці S є діагональним. Цей блок можна вибрати діагональним і тоді, коли скалярною є матриця $B_0(k+u, k+u) = B_0'(k+u, k+u)$ (див. умову (***vi***) з ***означення 6***). Якщо блок $B_0(k+u, k+u)$ має рівні власні значення, але не є скалярним, то блок S_u можна вибрати скалярним (див. умову (***v***) з ***означення 6***). Теорему доведено. ♦

Нехай матриця $B_0 = \|B_0(t, w)\|_1^{k+\ell}$, зображена у блочному вигляді, де $B_0(i, j) \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \ldots, k$; $B_0(k+u, k+v) \in M(2, \mathbb{C})$, $u, v = 1, \ldots, \ell$, є майже H-канонічною для матриці B вигляду (3) у сенсі ***означення 6***. Нехай також граф H, як і раніше, є об'єднанням дерев H_i, у яких фігурують вершини (6) для $i = 1, \ldots, r$ і не фігурують вершини (7). Розглянемо множини натуральних чисел, утворені за множиною вершин (6):

$$M_{i1} = \{k + 2u_{i1} - 1, \ldots, k + 2u_{i\ell_i} - 1\},$$

$$M_{i2} = \{k + 2u_{i1}, \ldots, k + 2u_{i\ell_i}\}, \qquad i = 1, \ldots, r,$$

та одноелементні множини, утворені за вершинами (7):

$$M_{r+h,\,1} = \{k + 2u_{r+h,\,1} - 1\},$$

$$M_{r+h,\,2} = \{k + 2u_{r+h,\,1}\}, \qquad h = 1, \ldots, s.$$

Розглянемо також множини, що не перетинаються:

$M_{k+2i-1} = M_{i1}$, якщо набір (8) має канонічну форму в сенсі ***означення 2*** або ***5***;

$M_{k+2i-1} = M_{i1} \cup M_{i2}$, якщо набір (8) має канонічну форму в сенсі одного з ***означень 1***, ***3*** або ***4***;

$M_{k+2i} = M_{i2}$, якщо набір (8) має канонічну форму в сенсі ***означення 2*** або ***5***;

$M_{k+2i} = \varnothing$, якщо набір (8) має канонічну форму в сенсі одного з ***означень 1***, ***3*** або ***4***;

$M_{k+2r+2h-1} = M_{r+h,\,1}$, якщо блок (11) має канонічну форму в сенсі ***означення 2*** або ***5***;

$M_{k+2r+2h-1} = M_{r+h,\,1} \cup M_{r+h,\,2}$, якщо блок (11) має канонічну форму в сенсі ***означення 4***;

$M_{k+2r+2h} = M_{r+h,\,2}$, якщо блок (11) має канонічну форму в сенсі ***означення 2*** або ***5***;

$M_{k+2r+2h} = \varnothing$, якщо блок (11) має канонічну форму в сенсі ***означення 4***.

Подамо ці множини у короткому записі:

$$M_{k+2i-1} = \begin{cases} M_{i1}, \\ M_{i1} \cup M_{i2}, \end{cases} \qquad M_{k+2i} = \begin{cases} M_{i2}, \\ \varnothing, \end{cases} \quad i = 1, \dots, r, \tag{13}$$

$$M_{k+2r+2h-1} = \begin{cases} M_{r+h,\,1}, \\ M_{r+h,\,1} \cup M_{r+h,\,2}, \end{cases} \quad M_{k+2r+2h} = \begin{cases} M_{r+h,\,2}, \\ \varnothing, \end{cases} \quad h = 1, \dots, s. \tag{14}$$

З множин $M_1 = \{1\}, \dots, M_k = \{k\}$ і (13), (14) побудуємо послідовність

$$M_1 = \{1\}, \dots, M_k = \{k\}, M_{k+1}, \dots, M_{k+2r}, M_{k+2r+1}, \dots, M_{k+2r+2s}. \tag{15}$$

Із теореми 1 випливає такий

Наслідок 1. *Майже H-канонічна матриця B_0 визначається з точністю до діагональної подібності*

$$B_0 \to B_0' = SB_0S^{-1}, \qquad S = \operatorname{diag}(s_1, \dots s_k, s_{k+1}, \dots, s_{k+2\ell}), \tag{16}$$

де $s_i = s_j$, якщо i, j належать до однієї і тієї ж множини послідовності (15).

Розглянемо тепер граф G з вершинами (15). Якщо цей граф містить орієнтоване ребро $M_i \to M_j$, то будемо вважати, що цей граф містить і ребра $u \to v$ для всіх $u \in M_i$ і $v \in M_j$. Говоримо, що перетворення (16) є G-перетворенням, якщо $s_u = s_v$ для всіх орієнтованих ребер $u \to v$ в G.

Далі будемо рухатися рядками матриці B_0 зліва направо, починаючи з першого, і далі вниз, щоб перетвореннями (16) зробити деякі ненульові елементи одиничними.

Нехай G_0 – граф з вершинами (15), M_t, $t = 1, \dots, k + 2r + 2s$, без ребер. Запишемо матрицю B_0 вигляду (3) поелементно: $B_0 = \|b_{gh}\|_1^{k+2\ell}$.

Алгоритм II.

Крок 1. Елемент b_{11} є незмінним при перетвореннях (16). Фіксуємо його як зведений і записуємо $(B_1, G_1) := (B_0, G_0)$.

Крок 2. Якщо елемент b_{12} є нульовим або 1 і 2 належать до однієї і тієї ж множини із (15), то він незмінний при G_1-перетвореннях. Фіксуємо його як зведений і записуємо $(B_2, G_2) := (B_1, G_1)$. В іншому випадку за допомогою G_1-перетворення робимо його одиничним, додаємо до графа G_1 ребро $M_1 \to M_{t_1}$ так, що $2 \in M_{t_1}$, і позначаємо отримані матрицю і граф через B_2 і G_2 відповідно. У кожному випадку на другому кроці матимемо (B_2, G_2).

Крок 3. Якщо елемент b_{13} є нульовим або 1 і 3 належать до однієї і тієї ж множини з послідовності (15), то цей елемент незмінний при G_2-перетвореннях. Тоді записуємо $(B_3, G_3) := (B_2, G_2)$. У протилежному випадку G_2-перетвореннями робимо елемент b_{13} одиничним, додаємо до графа G_2 ребро $M_1 \to M_{t_2}$ так, що $3 \in M_{t_2}$, позначаємо одержані матрицю і граф відповідно через B_3 і G_3. Тому на цьому кроці матимемо (B_3, G_3).

Продовжуємо подібно з наступними елементами першого рядка, а після його закінчення – з елементами другого рядка і т. д.

Крок d. Нехай b_{pq} – d-й елемент отриманої на $(d-1)$-му кроці матриці B_{d-1}. Тоді $d = (p-1)(r + 2\ell) + q$. Якщо $p = q$ або $b_{pq} = 0$, або граф

G_{d-1} має неорієнтований шлях від p до q, або p і q належать до однієї і тієї ж множини послідовності (15), то елемент b_{pq} є незмінним щодо G_{d-1}-перетворень. Фіксуємо цей елемент як зведений і записуємо $(B_d, G_d) := (B_{d-1}, G_{d-1})$. В інших випадках робимо елемент b_{pq} одиничним за допомогою G_{d-1}-перетворень. Додаємо до графа G_{d-1} ребро $M_u \to M_v$ так, що $p \in M_u$, $q \in M_v$. Позначаємо отримані матрицю і граф через B_d і G_d відповідно і дістаємо на цьому кроці (B_d, G_d).

Після $n^2 = (k + 2\ell)^2$ кроків дістанемо матрицю B_{n^2} і граф G_{n^2}. В такій матриці B_{n^2} будуть зафіксованими усі елементи.

Означення 7. Нехай задано орієнтований граф G без неорієнтованих циклів з вершинами $M_1 = \{1\}, \ldots, M_k = \{k\}, M_{k+1}, \ldots, M_d$, де $M_{k+1}, \ldots, M_d$ – непорожні підмножини без перетинів множини $\{k+1, \ldots, k+2\ell\}$, $k \ge 0$, $\ell \ge 1$. Майже H-канонічну матрицю B_0 матриці B, де

$$B_0 = \left\| b_{gh} \right\|_1^{k+2\ell} = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & \cdots & b_{1k} & b_{1,\,k+1} & \cdots & b_{1,\,k+2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} & b_{k,\,k+1} & \cdots & b_{k,\,k+2k} \\ \hline b_{k+1,\,1} & \cdots & b_{k+1,\,k} & b_{k+1,\,k+1} & \cdots & b_{k+1,\,k+2\ell} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k+2\ell,\,1} & \cdots & b_{k+2\ell,\,k} & b_{k+2\ell,\,k+1} & \cdots & b_{k+2\ell,\,k+2\ell} \end{array} \right\|,$$

$$b_{gh} \in \mathbb{C},$$

називають GH-канонічною, якщо елемент b_{pq} задовольняє такі умови:

(***i***) $b_{pq} = 1$, якщо граф G містить орієнтоване ребро $M_u \to M_v$, $p \in M_u$, $q \in M_v$, причому $b_{ij} = 0$ для всіх $i \in M_u$, $j \in M_v$ таких, що $(i, j) < (p, q)$;

(***ii***) $b_{pq} = 0$, якщо граф G не має неорієнтованого шляху від M_u, $p \in M_u$, до M_v, $q \in M_v$, або неорієнтований шлях від M_u до M_v містить орієнтоване ребро $M_{u_1} \to M_{v_1}$, для якого позиція (p_1, q_1) визначеного в (***i***) елемента $b_{p_1 q_1} = 1$ задовольняє нерівність $(p_1, q_1) > (p, q)$;

(***iii***) елемент b_{pq} є довільним в інших випадках.

GH-канонічну форму матриці B будемо позначати через B_{can}.

Теорема 2. *Для матриці B та її майже H-канонічної форми $B_0 = B_{\text{ncan}}$ існує єдиний орієнтований граф G з вершинами* (15) *і єдина GH-канонічна матриця B_{can}, яка діагонально подібна до B_0, і $B_{\text{can}} = SBS^{-1}$, де S – матриця вигляду* (4). *Якщо граф G є деревом, у якому фігурують усі вершини* (15), *то поліноміальна матриця*

$$L_0(x) = E_n x^2 + Ax + B_{\text{can}}, \tag{17}$$

де A має вигляд (2), *не зводиться подібністю до прямої суми. В інших випадках матриця* (17) *перестановно подібна до прямої суми поліноміальних матриць меншої розмірності.*

Д о в е д е н н я. *Існування* випливає з ***алгоритму II***.

Єдиність. Згідно з наслідком 1, майже H-канонічна матриця B_0 визначається з точністю до перетворення діагональної подібності (16). Тому позиції всіх ненульових елементів цієї матриці визначаються однозначно. З цього випливає однозначність графа G у GH-канонічній формі.

Нехай GH-канонічні матриці $\left\| b_{gh} \right\|_1^{k+2\ell}$ і $\left\| b'_{gh} \right\|_1^{k+2\ell}$ (для тих самих графів G і H) переводяться одна в одну за допомогою подібності перетворювальною матрицею вигляду (4). Тоді, згідно з наслідком 1, ці матриці пов'язані співвідношенням

$$S \left\| b_{gh} \right\|_1^{k+2\ell} S^{-1} = \left\| b'_{gh} \right\|_1^{k+2\ell}, \qquad S = \operatorname{diag}(s_1, \ldots s_k, s_{k+1}, \ldots, s_{k+2\ell}),$$

де $s_i = s_j$, якщо i, j належать до однієї і тієї ж множини послідовності (15). Нехай $b_{pq} = 1$, $b'_{pq} = 1$ – довільна пара елементів матриць $\left\| b_{gh} \right\|_1^{k+2\ell}$, $\left\| b'_{gh} \right\|_1^{k+2\ell}$, визначених умовою (***i***) з ***означення 7***. Тоді, порівнюючи в обох частинах рівності $S \left\| b_{gh} \right\|_1^{k+2\ell} = \left\| b'_{gh} \right\|_1^{k+2\ell} S$ елементи в позиції (p, q), матимемо, що в матриці S для довільної пари індексів p, q з множин послідовності (15), які фігурують в одному й тому самому дереві графа G, діагональні елементи s_p, s_q є рівними. Якщо, зокрема, G – дерево, в якому фігурують усі множини (15), то матриця S є скалярною. У цьому випадку $\left\| b_{gh} \right\|_1^{k+2\ell} = \left\| b'_{gh} \right\|_1^{k+2\ell}$. Те ж саме отримаємо пізніше і для випадку, коли граф G не є деревом.

Припустимо, що G – дерево, в якому фігурують усі множини (15), і матричний поліном (17) зводиться до прямої суми двох матричних поліномів меншої розмірності. Нехай ці прямі доданки містяться на перетині рядків і стовпців з номерами із множин $K_1 = \{u_1, \ldots, u_t\}$, $K_2 = \{u_{t+1}, \ldots, u_{k+2\ell}\}$, $1 \le t < k + 2\ell$, відповідно. Це означає, що на перетині рядків з номерами з множини K_1 і стовпців з номерами з K_2, а також на перетині стовпців з номерами з K_1 і рядків з номерами з K_2 в матрицях A, B_{can} стоять виключно нульові елементи. Тому від жодної з вершин множини K_1 немає шляху в графі G до якоїсь з вершин множини K_2. Отже, G не є деревом, що суперечить припущенню.

Нехай граф G є об'єднанням дерев G_i, $i = 1, \ldots, m$, а $K_i = \{w_{i1}, \ldots, w_{it_i}\}$ – об'єднання множин, які є вершинами графа G_i. Нехай також

$$\{1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+2\ell\} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} K_i = K_0 .$$

Можливо, $K_0 = \varnothing$. В іншому випадку позначаємо $K_0 = \{w_{01}, \ldots, w_{0t_0}\}$. Нехай $L_i(x)$ – підматриця розміру $t_i \times t_i$ поліноміальної матриці $L_0(x)$ вигляду (17), що міститься на перетині рядків і стовпців з номерами з K_i, $i = 0, 1, \ldots, m$. Згідно з ***означенням 7***, елементи матриці $L_0(x)$, розміщені у рядках і стовпцях з номерами w_{ip}, w_{jq}, є нульовими при $i \ne j$. Тому матриця $L_0(x)$ перестановно подібна до прямої суми $L_1(x) \oplus \ldots \oplus L_m(x)$.

Як показано вище, діагональні елементи s_p, s_q матриці S зі співвідношення $SB = B'S$ є рівними, якщо $p, q \in K_i$, $1 \le i \le m$. Тому підматриця B_i матриці B та відповідна підматриця B'_i матриці B' збігаються. Теорему доведено. ♦

3. Умови напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць. Нехай задано матриці $L_1(x), L_2(x) \in M(n, \mathbb{C}[x])$ із виділеного на початку роботи класу, тобто матриці $L_1(x)$, $L_2(x)$ регуляризуються справа:

$$L_1(x)R_1(x) = E_n x^2 + M_1 x + N_1,$$

$$L_2(x)R_2(x) = E_n x^2 + M_2 x + N_2, \tag{18}$$

де $R_1(x), R_2(x) \in GL(n, \mathbb{C}[x])$, причому коефіцієнти M_1, M_2 мають просту структуру та всі власні значення кратності, не вище ніж два. За наслідком із [4] матриці $L_1(x)$, $L_2(x)$ є напівскалярно еквівалентними тоді й тільки тоді, коли матричні поліноми (18) подібні. Тому одночасним перетворенням подібності матричні поліноми (18) можна звести до вигляду

$$E_n x^2 + Ax + B_1, \qquad E_n x^2 + Ax + B_2, \tag{19}$$

відповідно, де матриця A має форму Жордана (2).

Теорема 3. *Для напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць* $L_1(x)$, $L_2(x)$*, які є правоеквівалентними до матриць* (19)*, де матриця* A *має вигляд* (2)*, необхідно та достатньо, щоб вільні члени матричних поліномів* (19) *мали одну й ту ж* GH*-канонічну форму в сенсі* ***означення 7*** *відносно перетворення подібності матрицею вигляду* (4).

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* З напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць $L_1(x)$, $L_2(x)$, як уже відмічалося вище, випливає [4] подібність матричних поліномів (19). Це, в свою чергу, вимагає подібності

$$B_1 = SB_2S^{-1}, \tag{20}$$

де матриця S має вигляд (4), оскільки така й тільки така матриця комутує з (2). Отже, матриці B_1, B_2 мають однакові GH-канонічні форми (див. теорему 1 і теорему 2).

Достатність. З подібності (20) з матрицею S вигляду (4) випливає подібність матричних поліномів (19). Звідси на основі згаданого уже наслідку із [4] отримуємо напівскалярну еквівалентність матриць $L_1(x)$, $L_2(x)$. Теорему доведено. ♦

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.
2. *Казимирский П. С., Зелиско В. Р., Петричкович В. М.* О подобии матричных квадратных трехчленов // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 40–45.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
4. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66
5. *Петричкович В. М.* Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 644–649.
   Те саме: *Petrichkovich V. M.* Semiscalar equivalence and the factorization of polynomial matrices // Ukr. Math. J. – 1990. – **42**, No. 5. – P. 570–574.
6. *Шаваровский Б. З.* О некоторых «ручных» и «диких» аспектах проблемы полускалярной эквивалентности многочленных матриц // Мат. заметки. – 2004. – **76**, № 1. – С. 119–132.

Те саме: *Shavarovskii B. Z.* On some «tame» and «wild» aspects of the problem of semiscalar equivalence of polynomial matrices // Math. Notes. – 2004. – **76**, No. 1-2. – P. 111–123.

7. *Шаваровський Б. З.* Про напівскалярну та квазідіагональну еквівалентності матриць // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 10. – С 1435–1440.
   Те саме: *Shavarovskii B. Z.* On semiscalar and quasidiagonal equivalences of matrices // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, No. 10. – P. 1638–1643
8. *Baratchart L.* Un théorème de factorisation et son application à la représentation des systèmes cuclique causaux // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. **1**. Math. – 1982. – **295**, No. 3. – P. 223–226.
9. *Dias da Silva J. A., Laffey T. J.* On simultaneous similarity of matrices and related questions // Linear Algebra Appl. – 1999. – **291**, No. 1-3. – P. 167–184.
10. *Futorny V., Horn R. A., Sergeichuk V. V.* A canonical form for nonderogatory matrices under unitary similarity // Linear Algebra Appl. – 2011. – **435**, No. 4. – P. 830–841.

ПОЛУСКАЛЯРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И КВАЗИДИАГОНАЛЬНОЕ ПОДОБИЕ МАТРИЦ

Установлены условия полускалярной эквивалентности одного класса регуляризуемых полиномиальных матриц. Определена каноническая форма матрицы относительно квазидиагонального подобия.

THE SEMISCALAR EQUIVALENCE AND QUASI-DIAGONAL SIMILARITY OF MATRICES

The conditions of semiscalar equivalence for one class of regularisable polynomial matrices are established. Canonical form of matrix with respect to quasi-diagonal similarity is determined.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
26.06.14