УДК 539.3

О. Р. Грицина

ЕЛЕКТРОТЕРМОМЕХАНІКА НЕФЕРОМАГНІТНИХ ПОЛЯРИЗОВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ ЗА ВРАХУВАННЯ ТЕНЗОРНОЇ ПРИРОДИ ЛОКАЛЬНОГО ЗМІЩЕННЯ МАСИ

З використанням концепції локального зміщення маси як міри ґрадієнтності механічних полів сформульовано співвідношення нелокальної електротермопружності твердих неферомагнітних діелектричних тіл. Теорія враховує тензорну природу локального зміщення маси. Ґрунтуючись на співвідношеннях цієї теорії, отримали формулу для обчислення поверхневої енергії деформації твердих діелектричних тіл.

Вступ. Широке використання діелектриків у сучасних системах зв'язку, що працюють у надвисокочастотному діапазоні, інтенсивний розвиток нанотехнологій та впровадження у техніку нанокомпозитних і нанопористих діелектричних матеріалів [10, 16, 18, 20] стимулювали розробляння нових узагальнених теорій механіки твердих поляризовних тіл, які б коректно описували поверхневі і масштабні ефекти. Через велику питому поверхню у нанооб'єктах також необхідно враховувати приповерхневі і приконтактні явища, характерною особливістю яких є значна просторова ґрадієнтність фізико-механічних полів. Адекватний термодинамічний опис процесів у малорозмірних структурах можна реалізувати лише з урахуванням неоднорідності стану примежових областей тіла, яку класичні (локальні) теорії діелектричних матеріалів не беруть до уваги. Це пояснює інтенсивний розвиток нелокальних моделей електромеханіки пружних (термопружних) твердих діелектричних тіл [9, 14, 15, 17, 19, 21, 23–25] упродовж останніх десятиліть.

Статус нелокальної має також теорія електротермопружності неферомагнітних діелектричних тіл, яка поряд із деформаційними, тепловими та електромагнітними процесами враховує локальне зміщення маси [2, 6, 13], з яким пов'язують можливість зміни структури матеріалу у межах фізично малого елемента тіла. Такі зміни структури спостерігають, для прикладу, у примежових областях новоутворених поверхонь [8]. Співвідношення цієї теорії одержані у працях [2, 6, 13] за припущення, що вплив локального зміщення маси на внутрішню енергію системи «діелектричне тіло–електромагнітне поле» описує потенціал μ_π, який є скалярною величиною. Тоді вплив локального зміщення маси на зсувні напруження відсутній, що накладає певні обмеження на область застосовності розробленої теорії. Отож, мета цього дослідження – сформулювати систему співвідношень нелокальної електротермомеханіки неферомагнітних, здатних до поляризації, твердих тіл із урахуванням тензорної природи локального зміщення маси [4] та застосувати розроблену теорію для визначення поверхневої енергії деформації [3, 9] твердих діелектричних тіл.

Балансові співвідношення. Досліджували пружне неферомагнітне діелектричне тіло, в якому під дією електромагнітного поля, силового навантаження та нагрівання протікають електромагнітні, механічні та теплові процеси, які можуть супроводжуватися також зміною структури матеріалу фізично малого елемента тіла (локальним зміщенням маси). Ґрунтуючись на ідеях, закладених у працях Я. С. Підстригача [11], густину маси тіла характеризуватимемо симетричним тензором другого рангу $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, а її потік $\hat{\mathbf{J}}_{m*}^{(3)}$ – тензором третього рангу. Отже, рівняння балансу маси в інтегральній формі запишемо так [11]:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\hat{\boldsymbol{\rho}}\,dV=-\oint\limits_{(\Sigma)}\hat{\mathbf{J}}^{(3)}_{m*}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma\,. \tag{1}$$

Тут і далі верхній індекс у дужках вказуватиме на ранг тензорної величини (біля тензорів нульового, першого та другого рангів ці індекси опускатимемо, зберігаючи їх для тензорних величин третього та вищих рангів); крапка означає згортання відповідних індексів; t − час.

Тензор густини потоку маси $\hat{\mathbf{J}}^{(3)}_{m*}$ подамо як суму конвективної складової $\hat{\mathbf{J}}^{(3)}_{mc}=\mathbf{v}_*\otimes\boldsymbol{\rho}$ (тут $\mathbf{v}_*$ − вектор швидкості конвективного перенесення фізично малого елемента тіла, $\otimes$ − діадний добуток) [11] і складової $\hat{\mathbf{J}}^{(3)}_{ms}=\partial\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}/\partial t$, пов'язаної з локальним зміщенням маси ($\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}$ − тензор цього зміщення) [4]:

$$\hat{\mathbf{J}}^{(3)}_{m*}=\mathbf{v}_*\otimes\hat{\boldsymbol{\rho}}+\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}. \tag{2}$$

Зазначимо, що компоненти тензора $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}$ характеризують зміщення центра маси щодо геометричного центра фізично малого елемента тіла. Введемо також у розгляд вектор $\mathbf{v}$ швидкості континуума центрів маси частинок тіла так, що справджується співвідношення [4]

$$\mathbf{v}\otimes\hat{\boldsymbol{\rho}}=\mathbf{v}_*\otimes\hat{\boldsymbol{\rho}}+\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}. \tag{3}$$

За врахування теореми Остоградського − Ґаусса [7], а також формул (2) і (3) рівняння балансу маси (1) у локальній формі набуває вигляду

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}}{dt}+(\nabla\cdot\mathbf{v})\hat{\boldsymbol{\rho}}=0\,, \tag{4}$$

де $\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ − оператор субстанціональної похідної за часом.

Означимо $\rho\equiv\hat{\boldsymbol{\rho}}:\hat{\mathbf{I}}$ − середню густину маси ($\hat{\mathbf{I}}$ − одиничний тензор). Тоді, згорнувши рівняння (4), одержимо стандартний вигляд рівняння балансу маси [12]:

$$\frac{d\rho}{dt}+(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\rho=0\,. \tag{5}$$

Приймаємо, що повна енергія системи «тіло−електромагнітне поле» у довільний момент часу є сумою внутрішньої ρu (u − питома внутрішня енергія) та кінетичної $\rho\mathbf{v}^2/2$ енергій, а також енергії електромагнітного поля U_e. Повна енергія системи змінюється внаслідок: $\rho(u+\mathbf{v}^2/2)\mathbf{v}$ − конвективного перенесення енергії через поверхню; $\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{v}$ − потоку енергії, спричиненого роботою поверхневих зусиль; потоків $\mathbf{J}_q$ − енергії, що передається у тепловій формі, та $\mathbf{S}_e$ − енергії електромагнітного поля; потоку енергії $\hat{\mathbf{J}}^{(3)}_m:\hat{\boldsymbol{\mu}}$, пов'язаного з роботою, затраченою на перенесення частинок тіла відносно центра маси; потоку енергії $\dfrac{\partial\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}:\hat{\boldsymbol{\mu}}^{\pi}$, пов'язаного з роботою, виконаною внаслідок локального зміщення маси, а також дії масових сил $\mathbf{F}$ і розподілених джерел тепла $\Re$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{(V)}\left(\rho u+\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2+U_e\right)dV=-\oint\limits_{(\Sigma)}\left[\rho\left(u+\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)\mathbf{v}-\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{J}_q+\right.$$

$$\left.+\mathbf{S}_e+\hat{\mathbf{J}}^{(3)}_m:\hat{\boldsymbol{\mu}}+\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}:\hat{\boldsymbol{\mu}}^{\pi}\right]\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma+\int\limits_{(V)}(\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}+\rho\Re)\,dV\,. \tag{6}$$

Тут $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ та $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ – відповідно тензори напружень Коші та хімічного потенціалу; $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{\pi}$ – тензор другого рангу, компоненти якого характеризують зміну внутрішньої енергії системи, зумовлену локальним зміщенням маси; $\hat{\mathbf{J}}_m^{(3)} = (\mathbf{v}_* - \mathbf{v}) \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}$ – потік маси, пов'язаний із тензором $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}$ локального зміщення маси співвідношенням [4]

$$\hat{\mathbf{J}}_m^{(3)} = -\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t}. \tag{7}$$

Якщо рівняння (6) записати у локальній формі, врахувати рівняння балансу маси (5) та ентропії [5, 12]

$$\rho T \frac{ds}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}_q + \frac{1}{T} \mathbf{J}_q \cdot \boldsymbol{\nabla} T + T\sigma_s + \rho \Re, \tag{8}$$

а також енергії електромагнітного поля [2]

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S}_e + \mathbf{J}_{e*} \cdot \mathbf{E}_* + \Big[\rho_e \mathbf{E}_* + \Big(\mathbf{J}_{e*} + \frac{\partial(\rho \mathbf{p})}{\partial t} \Big) \times \mathbf{B} +$$

$$+ \rho(\boldsymbol{\nabla} \mathbf{E}_*) \cdot \mathbf{p} \Big] \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{E}_* \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \boldsymbol{\nabla} \cdot [\rho(\mathbf{E}_* \cdot \mathbf{p}) \hat{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{v}] = 0,$$

то отримаємо таке балансове співвідношення для внутрішньої енергії:

$$\rho \frac{du}{dt} = [\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \rho(\mathbf{E}_* \cdot \mathbf{p}) \hat{\mathbf{I}}] : (\boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{v}) + \rho T \frac{ds}{dt} + \rho \mathbf{E}_* \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} -$$

$$- \frac{\partial (\boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)})}{\partial t} : \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} - \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}}{\partial t} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)} - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\boldsymbol{\nabla} T}{T} +$$

$$+ \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{E}_* - T\sigma_s + \mathbf{v} \cdot \Big(- \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} +$$

$$+ \boldsymbol{\nabla} \cdot [\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \rho(\mathbf{E}_* \cdot \mathbf{p}) \hat{\mathbf{I}}] + \mathbf{F}_e + \rho \mathbf{F} \Big). \tag{9}$$

Тут s – питома ентропія; T – абсолютна температура; σ_s – виникнення ентропії за одиницю часу; $\mathbf{p} = \mathbf{P}/\rho$, $\mathbf{P}$ – вектор поляризації; $\mathbf{E}_*$, $\mathbf{J}_{e*}$ – вектори напруженості електричного поля та густини електричного струму в системі відліку центрів мас, яка рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$ відносно лабораторної системи відліку; $\mathbf{F}_e = \rho_e \mathbf{E}_* + \Big[\mathbf{J}_{e*} + \frac{\partial(\rho \mathbf{p})}{\partial t} \Big] \times \mathbf{B} + \rho(\boldsymbol{\nabla} \mathbf{E}_*) \cdot \mathbf{p}$ – вектор густини пондеромоторної сили; $\mathbf{B}$ – вектор індукції магнітного поля; ρ_e – густина вільного електричного заряду; $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} = \hat{\boldsymbol{\mu}}^{\pi} - \hat{\boldsymbol{\mu}}$; $\hat{\mathbf{M}}^{(3)} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi})^{\mathrm{T}(1,3)}$ – тензор третього рангу, який є ізомером тензора $\boldsymbol{\nabla} \otimes \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$, утворений шляхом переставляння першого та третього базисних векторів; крапка, як і раніше, означає згортання за парою індексів, а число у дужках над нею вказує на кількість таких згортань. Зазначимо, що для ідеальних діелектриків $\mathbf{J}_e = 0$ і $\rho_e = 0$.

Співвідношенням

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}^{m\pi} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)} \tag{10}$$

введемо у розгляд тензор густини наведеної маси [4]. Зазначимо, що продиференціювавши формулу (10) за часом, одержимо рівняння

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\rho}}^{m\pi}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{J}}_{ms}^{(3)}, \tag{11}$$

яке з огляду на його структуру та за аналогією до [2], назвемо рівнянням балансу наведеної маси.

Якщо тепер у балансове співвідношення (9) підставити формулу (10), перейти до питомих величин

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} = \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}, \qquad \hat{\boldsymbol{\rho}}^{m} = \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}^{m\pi} \tag{12}$$

та врахувати рівняння балансу маси (5), то рівняння балансу внутрішньої енергії запишемо так:

$$\rho\frac{du}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : (\nabla\otimes\mathbf{v}) + \rho T\frac{ds}{dt} + \rho\mathbf{E}_*\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \rho\hat{\boldsymbol{\mu}}'_\pi : \frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}^m}{dt} - \rho\frac{d\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}}{dt}\overset{(3)}{\cdot}\hat{\mathbf{M}}^{(3)} -$$
$$- \mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T} + \mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_* - T\sigma_s + \mathbf{v}\cdot\left(-\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \mathbf{F}_e + \rho\mathbf{F}_*\right), \tag{13}$$

де

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \rho\left[\mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p} + \hat{\boldsymbol{\rho}}^m : \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} - \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}\overset{(3)}{\cdot}(\nabla\otimes\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi})^{\mathrm{T}(1,3)}\right]\hat{\mathbf{I}},$$

$$\mathbf{F}_* = \mathbf{F} + \hat{\boldsymbol{\rho}}^m : (\nabla\otimes\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi})^{\mathrm{T}(1,3)} - \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}\overset{(3)}{\cdot}(\nabla\otimes\nabla\otimes\hat{\boldsymbol{\mu}}^{\pi})^{\mathrm{T}(1,3)(2,4)}. \tag{14}$$

Тут верхній індекс $T(1,3)(2,4)$ у співвідношенні (14) вказує на ізомер тензора четвертого рангу $\nabla\otimes\nabla\otimes\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$, утворений шляхом переставляння першого та третього, а також другого та четвертого індексів.

Легко показати [2], що наслідком інваріантності рівняння (13) балансу внутрішньої енергії щодо просторових трансляцій (поворотів і переміщень) є симетричність тензора $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$ і рівняння балансу імпульсу механічного поступального руху:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \mathbf{F}_e + \rho\mathbf{F}_* \qquad \forall\mathbf{r}\in(V), \tag{15}$$

де $\mathbf{r}$ – радіус-вектор.

Враховуючи рівняння (15), вираз (13) спростимо до вигляду

$$\rho\frac{du}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt} + \rho T\frac{ds}{dt} + \rho\mathbf{E}_*\cdot\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \rho\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} : \frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}^m}{dt} - \rho\frac{d\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}}{dt}\overset{(3)}{\cdot}\hat{\mathbf{M}}^{(3)} -$$
$$- \mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T} + \mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_* - T\sigma_s. \tag{16}$$

Під час отримання співвідношення (16) брали до уваги, що $\nabla\otimes\mathbf{u} = \hat{\mathbf{e}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = 0$, де $\mathbf{u}$ – вектор переміщення, а

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\left[\nabla\otimes\mathbf{u} + (\nabla\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right], \qquad \hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\left[\nabla\otimes\mathbf{u} - (\nabla\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right] \tag{17}$$

– відповідно симетричний тензор деформації $\hat{\mathbf{e}}$ та антисиметричний тензор поворотів $\hat{\boldsymbol{\omega}}$.

Рівняння Гіббса та виробництво ентропії. Співвідношенням $f = u - Ts - \mathbf{E}_*\cdot\mathbf{p} + \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}\overset{(3)}{\cdot}\hat{\mathbf{M}}^{(3)}$ введемо у розгляд узагальнену вільну енергію Гельмгольца. Ґрунтуючись на формулі (16), для вільної енергії f одержимо

$$\rho\frac{df}{dt} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt} - \rho s\frac{dT}{dt} - \rho\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{E}_*}{dt} + \rho\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} : \frac{d\hat{\boldsymbol{\rho}}^m}{dt} + \rho\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}\overset{(3)}{\cdot}\frac{d\hat{\mathbf{M}}^{(3)}}{dt} -$$
$$- \mathbf{J}_q\cdot\frac{\nabla T}{T} + \mathbf{J}_{e*}\cdot\mathbf{E}_* - T\sigma_s. \tag{18}$$

Приймемо, що за умови потенціального опису зв'язаних термодинамічних процесів вільну енергію визначають скалярний T, векторний $\mathbf{E}_*$ та три тензорні параметри $\hat{\mathbf{e}}$, $\hat{\boldsymbol{\rho}}^m$ і $\hat{\mathbf{M}}^{(3)}$, які є незалежними функціями. Тоді на основі (18) отримаємо диференціальну один-форму, яка відповідає узагальненому рівнянню Гіббса, та вираз для виробництва ентропії:

$$df = \frac{1}{\rho}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : d\hat{\mathbf{e}} - s dT - \mathbf{p}\cdot d\mathbf{E}_* + \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} : d\hat{\boldsymbol{\rho}}^m + \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} \overset{(3)}{\cdot} d\hat{\mathbf{M}}^{(3)}, \tag{19}$$

$$\sigma_s = \mathbf{J}_{e*} \cdot \frac{\mathbf{E}_*}{T} - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T^2}. \tag{20}$$

Співвідношення (19) є рівнянням Ґіббса просторово нелокальної теорії електротермопружності неферомагнітних діелектричних тіл. На відміну від відомих у літературі класичних моделей термомеханіки твердих поляризовних тіл, простір параметрів термодинамічного стану розробленої теорії поряд із тензором деформації, температурою і вектором напруженості електричного поля містить також тензор третього рангу $\hat{\mathbf{M}}^{(3)}$ (ґрадієнт потенціалу $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$) і густину наведеної маси $\hat{\boldsymbol{\rho}}^m$ (дивергенцію тензора локального зміщення маси). Спряженими до них є питомий тензор локального зміщення маси $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}$ та потенціал $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$. Таке розширення параметрів стану зумовлене врахуванням ефекту упорядкування структури матеріалу (поляризації маси), який супроводжує упорядкування зарядової системи (поляризацію) фізично малого елемента тіла.

Визначальні співвідношення. Щоб сформулювати кінетичні рівняння моделі, використаємо вираз (20) для виробництва ентропії. Ґрунтуючись на ньому, введемо у розгляд термодинамічні параметри процесу, зокрема, потоки $\mathbf{J}_q$, $\mathbf{J}_{e*}$ і сили $\mathbf{X}_1 = -\frac{1}{T^2}\nabla T$, $\mathbf{X}_2 = \frac{\mathbf{E}_*}{T}$. Згідно з загальними положеннями термодинаміки незворотних процесів вважаємо, що причиною виникнення термодинамічних потоків є сили, тобто $\mathbf{J}_q = \mathbf{J}_q(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathcal{A})$, $\mathbf{J}_{e*} = \mathbf{J}_{e*}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathcal{A})$. Параметр $\mathcal{A}$ вказує на залежність потоків від характеристик локального стану. При цьому функції $\mathbf{J}_q$ та $\mathbf{J}_{e*}$ повинні справджувати умови [5]

$$\mathbf{J}_q(0,0;\mathcal{A}) = 0, \qquad \mathbf{J}_{e*}(0,0;\mathcal{A}) = 0, \qquad \mathbf{J}_{e*}\cdot\frac{\mathbf{E}_*}{T} - \mathbf{J}_q \cdot \frac{\nabla T}{T^2} \ge 0. \tag{21}$$

Якщо залежність термодинамічних потоків від сил вважати лінійною, то для анізотропних матеріалів маємо

$$\mathbf{J}_q = \mathbf{L}_{11}\cdot\mathbf{X}_1 + \mathbf{L}_{12}\cdot\mathbf{X}_2, \qquad \mathbf{J}_{e*} = \mathbf{L}_{21}\cdot\mathbf{X}_1 + \mathbf{L}_{22}\cdot\mathbf{X}_2. \tag{22}$$

Тут $\mathbf{L}_{ij}$ $i,j = \{1,2\}$ − кінетичні коефіцієнти (тензори другого рангу, компоненти яких можуть залежати від параметрів стану). Для ізотропних ідеальних діелектриків одержимо

$$\mathbf{J}_q = -\lambda\nabla T, \tag{23}$$

де λ − коефіцієнт теплопровідності, який згідно з умовою (21) є додатно визначеним.

Рівняння стану розробленої моделі формулюємо на основі узагальненого рівняння Ґіббса (19). Маємо

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \rho\frac{\partial f}{\partial\hat{\mathbf{e}}}, \quad s = -\frac{\partial f}{\partial T}, \quad \mathbf{p} = -\frac{\partial f}{\partial\mathbf{E}_*}, \quad \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} = \frac{\partial f}{\partial\hat{\boldsymbol{\rho}}^m}, \quad \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} = \frac{\partial f}{\partial\hat{\mathbf{M}}^{(3)}}. \tag{24}$$

Замкнена система рівнянь ґрадієнтного типу моделі електротермомеханіки твердих неферомагнітних діелектричних тіл охоплює балансові рівняння (4), (8), (11), (15), рівняння електродинаміки, які містять рівняння Максвелла [1] та визначальні співвідношення для векторів електромагнітного поля, геометричні та фізичні співвідношення (17), (22), (24). Під час формулювання крайових задач математичної фізики її слід доповнити відповідними граничними і початковими умовами.

Для конкретизації рівнянь стану (24) необхідно визначити вигляд функції f. Обмежимося розглядом ізотермічного наближення. Прийнявши, що вільна енергія є аналітичною функцією змінних $\hat{\mathbf{e}}$, T, $\mathbf{E}_*$, $\hat{\boldsymbol{\rho}}^m$ та $\hat{\mathbf{M}}^{(3)}$, розвинемо її у ряд Тейлора відносно малих збурень параметрів щодо природного стану безмежного анізотропного однорідного середовища. Тоді за відсутності зовнішнього навантаження запишемо: $\hat{\mathbf{e}} = 0$, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 0$, $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{E}_* = 0$, $\hat{\boldsymbol{\rho}}^m = 0$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi}$, $\hat{\mathbf{M}}^{(3)} = 0$, $\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} = 0$. Для формулювання лінійних рівнянь стану залишимо у розвиненні функції f доданки, не вище квадратичних:

$$f = \hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi} : \hat{\boldsymbol{\rho}}^m + \frac{1}{2\rho_0}\hat{\mathbf{C}}^{(4)} \overset{(4)}{\cdot} (\hat{\mathbf{e}} \otimes \hat{\mathbf{e}}) + \frac{1}{2}\hat{\mathbf{d}}^{\rho(4)} \overset{(4)}{\cdot} (\hat{\boldsymbol{\rho}}^m \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}^m) -$$
$$- \frac{1}{\rho_0}\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\rho(4)} \overset{(4)}{\cdot} (\hat{\mathbf{e}} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}^m) - \frac{1}{\rho_0}\hat{\mathbf{g}}^{(5)} \overset{(5)}{\cdot} (\hat{\mathbf{e}} \otimes \hat{\mathbf{M}}^{(3)}) -$$
$$- \frac{1}{\rho_0}\hat{\mathbf{f}}^{(3)} \overset{(3)}{\cdot} (\hat{\mathbf{e}} \otimes \mathbf{E}) - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\chi}}^{E} \overset{(2)}{\cdot} (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}) -$$
$$- \boldsymbol{\gamma}^{E(3)} \overset{(3)}{\cdot} (\mathbf{E} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}^m) - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\chi}}^{m(6)} \overset{(6)}{\cdot} (\hat{\mathbf{M}}^{(3)} \otimes \hat{\mathbf{M}}^{(3)}) -$$
$$- \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\rho(5)} \overset{(5)}{\cdot} (\hat{\mathbf{M}}^{(3)} \otimes \hat{\boldsymbol{\rho}}^m) + \hat{\boldsymbol{\chi}}^{Em(4)} \overset{(4)}{\cdot} (\mathbf{E} \otimes \hat{\mathbf{M}}^{(3)}), \tag{25}$$

де ρ_0 – густина маси тіла у вихідному стані; $\hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi}$ – значення потенціалу $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}$ у безмежному середовищі; $\hat{\mathbf{C}}^{(4)}$, $\hat{\mathbf{d}}^{\rho(4)}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\rho(4)}$, $\hat{\mathbf{g}}^{(5)}$, $\hat{\mathbf{f}}^{(3)}$, $\hat{\boldsymbol{\chi}}^{E}$, $\hat{\boldsymbol{\chi}}^{m(6)}$, $\hat{\boldsymbol{\chi}}^{Em(4)}$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{E(3)}$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{E(5)}$ – характеристики матеріалу. У поданні (25) враховано, що у лінійному наближенні $\mathbf{E}_* = \mathbf{E}$. На основі співвідношень (24) і (25) для прийнятого вище ізотермічного наближення запишемо лінійні рівняння стану моделі в явному вигляді:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = \hat{\mathbf{C}}^{(4)} : \hat{\mathbf{e}} - \hat{\boldsymbol{\rho}}^m : \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\rho(4)} - \hat{\mathbf{M}}^{(3)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{g}}^{(5)} - \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{f}}^{(3)}, \tag{26}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi} + \hat{\mathbf{d}}^{\rho(4)} : \hat{\boldsymbol{\rho}}^m - \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\rho(5)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)} - \frac{1}{\rho_0}\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{\rho(4)} : \hat{\mathbf{e}} - \boldsymbol{\gamma}^{E(3)} \cdot \mathbf{E}, \tag{27}$$

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} = -\hat{\boldsymbol{\chi}}^{m(6)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)} - \hat{\boldsymbol{\rho}}^m : \hat{\boldsymbol{\gamma}}^{\rho(5)} - \frac{1}{\rho_0}\hat{\mathbf{g}}^{(5)} : \hat{\mathbf{e}} + \hat{\boldsymbol{\chi}}^{Em(4)} \cdot \mathbf{E}, \tag{28}$$

$$\mathbf{p} = \hat{\boldsymbol{\chi}}^{E} \cdot \mathbf{E} - \hat{\mathbf{M}}^{(3)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\boldsymbol{\chi}}^{Em(4)} + \hat{\boldsymbol{\rho}}_m : \boldsymbol{\gamma}^{E(3)} + \frac{1}{\rho_0}\hat{\mathbf{f}}^{(3)} : \hat{\mathbf{e}}. \tag{29}$$

Поверхнева енергія деформації. Відомо, що для поділу довільного твердого деформівного тіла на дві частини вздовж деякої поверхні (Σ) необхідно подолати *енергію зв'язку* між частинками, розташованими на та в околі цієї поверхні. Під енергією зв'язку розуміють енергію, яку треба затратити, щоб, залишивши незмінною деформацію і поляризацію тіла, зруйнувати атомні зв'язки вздовж поверхні (Σ) [9, 21]. Цього досягають прикладанням зовнішнього поля. Якщо ж зовнішнє поле забрати, то тіло в околі поверхні здеформується і поляризується, що спричинить поверхневу енергію деформації. У праці [9] встановлено, що поверхнева енергія деформації та поляризації завжди від'ємна і складає до $30\,\%$ від повної енергії зв'язування, а тому цією енергією нехтувати не можна.

Використаємо для її визначення співвідношення моделі механіки твердих діелектричних тіл, що враховує тензорну природу локального зміщення маси. Для спрощення і прозорості викладок приймемо ізотермічне наближення.

Розглянемо рівноважний стан тіла, що займає область (V) евклідового простору та обмежене гладкою поверхнею (Σ) із зовнішньою нормаллю $\mathbf{n}$. Вважаємо, що тіло, яке є ідеальним діелектриком, контактує з вакуумом (область (V')) і перебуває під впливом зовнішнього механічного та електромагнітного навантажень.

Якщо у поданні (25) врахувати рівняння стану (26)–(29), то потенціалу f надамо вигляду

$$f = \frac{1}{2\rho_0}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \hat{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi} : \hat{\boldsymbol{\rho}}^m + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} : \hat{\boldsymbol{\rho}}^m + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)} - \frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}. \qquad (30)$$

Звідси для питомої внутрішньої енергії $u = f + \mathbf{p}\cdot\mathbf{E} - \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)}$ одержимо

$$u = \frac{1}{2\rho_0}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* : \hat{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi} : \hat{\boldsymbol{\rho}}^m + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} : \hat{\boldsymbol{\rho}}^m - \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} \overset{(3)}{\cdot} \hat{\mathbf{M}}^{(3)} + \frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}. \qquad (31)$$

У співвідношенні (31) врахуємо формулу Коші (17), що пов’язує тензор деформації $\hat{\mathbf{e}}$ та вектор переміщень $\mathbf{u}$, симетрію тензора напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*$, тотожність $\nabla\cdot(\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} : \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}) = (\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}) : \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} + \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} \overset{(3)}{\cdot} (\nabla\otimes\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi})^{\mathrm{T}(1,3)}$ [4], а також лінійні рівняння рівноваги та балансу наведеної маси:

$$\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* + \rho_0\mathbf{F}_* = 0, \qquad \hat{\boldsymbol{\rho}}^m = -\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}. \qquad (32)$$

У результаті низки перетворень надамо поданню (31) вигляд

$$\rho_0 u = \frac{1}{2}\nabla\cdot(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*\cdot\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\rho_0\mathbf{F}_*\cdot\mathbf{u} - \frac{1}{2}\rho_0\hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi} : (\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}) - \frac{1}{2}\rho_0\nabla\cdot(\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} : \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}) + \frac{1}{2}\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}. \qquad (33)$$

Врахуємо також, що у стаціонарному наближенні $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, де φ – електричний потенціал [1]. З огляду на співвідношення $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0\mathbf{E}$ ($\mathbf{D}$ – вектор індукції електричного поля, ε_0 – електрична стала) останній доданок у виразі (33) запишемо так:

$$\frac{1}{2}\mathbf{P}\cdot\mathbf{E} = -\frac{1}{2}\nabla\cdot(\mathbf{D}\varphi) + \frac{1}{2}(\nabla\cdot\mathbf{D})\varphi - \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}. \qquad (34)$$

Беручи до уваги співвідношення (33), (34), а також рівняння Максвелла $(\nabla\cdot\mathbf{D} = 0)$, для повної енергії $W = \rho_0 u + \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$ системи отримаємо вираз

$$W = \frac{1}{2}\nabla\cdot(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_*\cdot\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\rho_0\mathbf{F}_*\cdot\mathbf{u} - \frac{1}{2}\rho_0\hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi} : (\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)}) - \frac{1}{2}\rho_0\nabla\cdot(\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} : \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}) - \frac{1}{2}\nabla\cdot(\mathbf{D}\varphi). \qquad (35)$$

Інтегруємо обидві його частини по області $(V'') = (V)\cup(V')$, яку займає тіло з вакуумом. У підсумку за врахування теореми Остроградського – Ґаусса одержимо:

$$\int\limits_{(V'')} W dV = \frac{1}{2}\int\limits_{(\Sigma)} \boldsymbol{\sigma}_{n*}\cdot\mathbf{u}\, d\Sigma + \frac{1}{2}\rho_0\int\limits_{(V)} \mathbf{F}_*\cdot\mathbf{u}\, dV - \frac{1}{2}\int\limits_{(\Sigma)} \mathbf{n}\cdot[\mathbf{D}]\varphi\, d\Sigma - \frac{1}{2}\rho_0\hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi} : \int\limits_{(\Sigma)} \mathbf{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} d\Sigma - \frac{1}{2}\rho_0\int\limits_{(\Sigma)} \mathbf{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} : \hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi}\, d\Sigma. \qquad (36)$$

Тут $[\mathbf{D}] = \mathbf{D} - \mathbf{D}_{\mathrm{v}}$ – стрибок вектора індукції на поверхні (Σ). Зазначимо, що при отриманні формули (36) враховано рівність на поверхні (Σ) електричних потенціалів тіла і вакууму.

Розглянемо рівноважний стан тіла, поверхні якого вільні від дії зовнішніх зусиль $(\boldsymbol{\sigma}_{n*} = 0 \ \forall \mathbf{r} \in (\Sigma))$, масові сили відсутні $(\mathbf{F}_* = 0 \ \forall \mathbf{r} \in (V))$. Тіло контактує з вакуумом, тому $\forall \mathbf{r} \in (\Sigma)$: $\hat{\boldsymbol{\mu}}'^{\pi} = 0$, $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_{\mathrm{v}}) = 0$. Тоді з виразу (36) за відсутності зовнішньої дії на тіло отримаємо таке співвідношення для повної енергії W системи «тіло − електромагнітне поле»:

$$\int_{(V'')} W dV = -\frac{1}{2}\rho_0 \hat{\boldsymbol{\mu}}_0^{\pi} : \int_{(\Sigma)} \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} d\Sigma . \tag{37}$$

Права частина цієї рівності визначає поверхневу енергію деформації U_Σ [Дж/м^2]. Тоді у межах запропонованого модельного опису для обчислення цієї енергії маємо співвідношення

$$U_\Sigma = -\frac{1}{2}\rho_0 \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\pi}}^{m(3)} : \hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi}\Big|_{\mathbf{r}\in(\Sigma)} = -\frac{1}{2}\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)} : \hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi}\Big|_{\mathbf{r}\in(\Sigma)}, \tag{38}$$

згідно з яким поверхневу енергію деформації визначає потенціал $\hat{\boldsymbol{\mu}}_0'^{\pi}$ безмежного середовища і поверхневе значення проекції тензора локального зміщення маси $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}$ на нормаль до поверхні (Σ).

Формулою $\rho_{m\pi} \equiv \hat{\boldsymbol{\rho}}^{m\pi} : \hat{\mathbf{I}} = \rho_{kk}^{m\pi}$ означимо середню густину наведеної маси. Введемо також у розгляд вектор $\boldsymbol{\Pi}_m \equiv \hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)} : \hat{\mathbf{I}}$ з компонентами Π_{ikk}^m (Π_{ijk}^m − компоненти тензора $\hat{\boldsymbol{\Pi}}^{m(3)}$). Тоді, згорнувши співвідношення (10), одержимо формулу, яка пов'язує середню густину наведеної маси $\rho_{m\pi}$ і вектор $\boldsymbol{\Pi}_m$: $\rho_{m\pi} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}_m$. У межах модельного опису, згідно з яким міра впливу локального зміщення маси на внутрішню енергію системи та густина наведеної маси є скалярними величинами, формула (38) набуває вигляду

$$U_\Sigma = -\frac{1}{2}\rho_0 \hat{\boldsymbol{\mu}}'_{\pi 0} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi}_m \Big|_{\mathbf{r}\in(\Sigma)} = -\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\mu}}'_{\pi 0} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}_m \Big|_{\mathbf{r}\in(\Sigma)}, \tag{39}$$

що узгоджується з результатами праці [3]. Відповідно рівняння стану для ізотропних матеріалів такі:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_* = 2G\hat{\mathbf{e}} + \left[\left(K - \frac{2}{3}G\right)e - K\alpha_\rho \rho_m\right]\hat{\mathbf{I}}, \tag{40}$$

$$\mu'_\pi = \mu'_{\pi 0} + d_\rho \rho_m - \frac{1}{\rho_0} K\alpha_\rho e, \tag{41}$$

$$\mathbf{p} = \chi_E \mathbf{E} - \chi_{Em} \nabla \mu'_\pi, \tag{42}$$

$$\boldsymbol{\pi}_m = -\chi_m \nabla \mu'_\pi + \chi_{Em} \mathbf{E}. \tag{43}$$

Врахувавши рівняння (41)−(43), надамо формулі (39) вигляду

$$U_\Sigma = -\frac{1}{2}\mu'_{\pi 0}\mathbf{n} \cdot \left[\rho_0 d_\rho \left(\chi_{Em}\frac{\chi_{Em}}{\chi_E} - \chi_m\right)\nabla \rho_m - \right.$$
$$\left. - K\alpha_\rho \left(\chi_{Em}\frac{\chi_{Em}}{\chi_E} - \chi_m\right)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{\chi_{Em}}{\chi_E}\mathbf{P}\right]\Bigg|_{\mathbf{r}\in(\Sigma)}. \tag{44}$$

Зазначимо, що у межах ґрадієнтної теорії діелектриків [21] Міндлін для обчислення поверхневої енергії деформації і поляризації твердих тіл отримав формулу

$$U_\Sigma = \frac{1}{2}\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{b}}^0 \cdot \mathbf{P}\Big|_{\mathbf{r}\in(\Sigma)}. \tag{45}$$

Тут $\hat{\mathbf{b}}^0$ − стала тензорна величина, яка є характеристикою матеріалу, пов'язаною з ґрадієнтом вектора поляризації $\mathbf{P}$ [21], яким розширено простір параметрів стану згаданої теорії.

У праці [22] у межах нелокальної теорії пружності, простір параметрів стану якої містить просторовий ґрадієнт тензора деформації, для визначення поверхневої енергії деформації одержали співвідношення

$$U_\Sigma = \frac{1}{2} b_0 \mathbf{n} \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})\Big|_{\mathbf{r}\in(\Sigma)} . \tag{46}$$

Тут b_0 – коефіцієнт, який стоїть у розвиненні густини потенціальної енергії біля ґрадієнта тензора деформації [22].

Отже формула (44) містить співвідношення (45) і (46) як частковий випадок. Згідно з виразом (44) за врахування локального зміщення маси поверхневу енергію деформації визначає не лише ґрадієнт кульової складової тензора деформації і вектор поляризації, як це передбачають співвідношення (46) і (45) з праць [21, 22], а й ґрадієнт густини наведеної маси. Таким чином, формула (44) додатково враховує потоки маси, які супроводжують приповерхневу поляризацію та деформацію тіла, зумовлену переупорядкуванням зарядової системи в околі новоутвореної поверхні.

Висновки. З використанням підходів і методів нерівноважної термодинаміки та механіки суцільного середовища отримано замкнену систему співвідношень нелокальної електротермопружності твердих неферомагнітних діелектричних тіл. Теорія враховує тензорну природу локального зміщення маси та його взаємозв'язок із процесами деформування, теплопровідності та поляризації. За її співвідношеннями отримано формулу для обчислення поверхневої енергії деформації твердих діелектричних тіл, яка як частковий випадок містить результати, отримані для розрахунку поверхневої енергії деформації та поляризації у межах ґрадієнтних теорій діелектриків Мідліна, простір параметрів стану яких містить ґрадієнт вектора поляризації чи ґрадієнт тензора деформації.

1. *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика. – Москва: Наука, 1985. – 400 с.
2. *Бурак Я., Кондрат В., Грицина О.* Основи локально ґрадієнтної теорії діелектриків. – Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. – 208 с.
3. *Грицина О.* Визначення поверхневої енергії твердих тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2013. – Вип. 17. – С. 43–54.
4. *Грицина О.* До опису впливу локального зміщення маси на зсувні напруження // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 16. – С. 61–75.
5. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. – Москва: Мир, 1964. – 456 с.
6. *Кондрат В. Ф., Грицина О. Р.* Механоелектромагнітна взаємодія в ізотропних діелектриках з урахуванням локального зміщення маси // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 150–158.
   Те саме: *Kondrat V. F., Hrytsyna O. R.* Mechanoelectromagnetic interaction in isotropic dielectrics with regard for the local displacement of mass // J. Math. Sci. – 2010. – **168**, No. 5. – P. 688–698.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – Москва: Наука, 1974. – 832 с.
8. *Марченко И. Г., Неклюдов И. М., Марченко И. И.* Коллективные процессы атомного упорядочения при низкотемпературном осаждении пленок // Доп. НАН України. – 2009. – № 10. – С. 97–103.
9. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. – Москва: Мир, 1991. – 560 с.
10. *Поверхностные* явления и фазовые превращения в конденсированных пленках / Под ред. Н. Т. Гладких, С. В. Дукаров, А. П. Крышталь и др. – Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2004. – 276 с.
11. *Подстригач Я. С.* Диффузионная теория неупругости металлов // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1965. – № 2. – С. 67–72.
12. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды: В 2 т. – Том 1. – Москва: Наука, 1976. – 536 с.
13. *Burak Ya., Kondrat V., Hrytsyna O.* An introduction of the local displacements of mass and electric charge phenomena into the model of the mechanics of polarized electromagnetic solids // J. Mech. Mater. Struct. – 2008. – **3**, No. 6. – P. 1037–1046.

14. *Eringen A. C.* Theory of nonlocal piezoelectricity // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, No. 3. – P. 717–727.
15. *Eringen A. C.* Nonlocal continuum field theories. – New York: Springer-Verlag, 2002. – 376 p.
16. *Fu J. Y., Zhu W., Li N., Smith N. B., Cross L. E.* Gradient scaling phenomenon in microsize flexoelectric piezoelectric composites // Appl. Phys. Lett. – 2007. – **91**. – P. 182910–182910-3.
17. *Kalpakides V. K., Agiasofitou E. K.* On material equations in second gradient electroelasticity // J. Elasticity. – 2002. – **67**, No. 3. – P. 205–227.
18. *Kuno M.* Introduction to nanoscience and nanotechnology. A workbook. – 2005. – 370 p.
19. *Majdoub M. S., Sharma P., Çağin T.* Enhanced size-dependent piezoelectricity and elasticity in nanostructures due to the flexoelectric effect // Phys. Rev. **B**. – 2008. – **77**, No. 12. – P. 125424(2008).
20. *Mead C. A.* Anomalous capacitance of thin dielectric structures // Phys. Rev. Lett. – 1961. – **6**, No. 10. – P. 545–546.
21. *Mindlin R. D.* Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics // J. Elasticity. – 1972. – **2**, No. 4. – P. 217–282.
22. *Mindlin R. D.* Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity // Int. J. Solids Struct. – 1965. – **1**, No. 4. – P. 417–438.
23. *Nowacki J. P.* Static and dynamic coupled fields in bodies with piezoeffects or polarization gradient // Lect. Notes Appl. Comput. Mech. – Springer, 2006. – **26**. – 218 p.
24. *Sharma N. D., Maranganti R., Sharma P.* On the possibility of piezoelectric nanocomposites without using piezoelectric materials // J. Mech. Phys. Solids. – 2007. – **55**, No. 11. – P. 2328–2350.
25. *Yang J. S., Yang X. M.* Electric field gradient effect and thin film capacitance // World J. Eng. – 2004. – **2**. – P. 41–45.

ЭЛЕКТРОТЕРМОМЕХАНИКА НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯРИЗИРУЮЩИХСЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С УЧЕТОМ ТЕНЗОРНОЙ ПРИРОДЫ ЛОКАЛЬНОГО СМЕЩЕНИЯ МАССЫ

С использованием концепции локального смещения массы в качестве меры градиентности механических полей сформулированы соотношения нелокальной электротермоупругости твердых неферромагнитных диэлектрических тел. Теория учитывает тензорную природу локального смещения массы. С помощью ее соотношений получена формула для вычисления поверхностной энергии деформации твердых диэлектрических тел.

ELECTRO-THERMO-MECHANICS OF NONFERROMAGNETIC POLARIZED SOLIDS TAKING INTO ACCOUNT THE TENSORIAL NATURE OF LOCAL MASS DISPLACEMENT

Using a conception of a local mass displacement as a measure of gradientality of mechanical fields the nonlocal theory of electro-thermo-elasticity for non-ferromagnetic dielectric bodies was built. It takes into account the tensorial character of the local mass displacement. With the use of the relations of this nonlocal theory the formula for the calculation of the solids surface energy of deformation was obtained.

Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
13.03.15