

## ВИЗНАЧЕННЯ В'ЯЗКОПРУЖНИХ НАПРУЖЕНЬ У ПЛАСТИНАХ ІЗ ВКЛЮЧЕННЯМИ

*Описано підхід до визначення в'язкопружних напружень у пластинах із включеннями, який базується на методі граничних інтегральних рівнянь та інтегральному перетворенні Лапласа. Формальний розв'язок задачі теорії пружності, в якій диференціальні оператори замінено сталими величинами, побудовано за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь і зведено до розв'язування системи алгебричних рівнянь. Відповідну систему для задачі в'язкопружності розв'язано з використанням інтегрального перетворення Лапласа та уточненої числово-аналітичної формули для його обернення.*

Дослідженню напруженого стану біля включень у пластинах складних форм із урахуванням в'язкості матеріалу присвячено значно менше праць, ніж ідеально пружних матеріалів. Підхід до вивчення таких задач на основі методу рядів запропоновано в праці [1]. Для ідеально пружних кусково-однорідних пластин застосовні підходи, які ґрунтуються на методі граничних інтегральних рівнянь (МГІР) [3, 4]. Ефективність МГІР для пластин складної форми можна підвищити, використовуючи модифіковані інтегральні рівняння, за яких умови на деяких межах пластини задовольняються автоматично [3–5].

Нижче розроблено методу розрахунку в'язкопружного напруженого стану пластин із включеннями на основі модифікованих інтегральних рівнянь, перетворення Лапласа та адаптованої до цього класу задач формули обернення перетворення Лапласа.

**Формулювання задачі.** Дослідимо в'язкопружний напружено-деформований стан ізотропної пластини із пружними включеннями з іншого матеріалу. Вважатимемо, що пластинка перебуває під дією прикладеного на нескінченності (для пластин нескінченних розмірів) та до її межі навантаження; пластинка перебуває в умовах плоского напруженого стану. Вважаємо, що на межі поділу матеріалів є ідеальний механічний контакт.

**Основні співвідношення для в'язкопружного тіла.** Використаємо реологічні співвідношення у вигляді [6]

$$\begin{aligned} P_1(D)s_{ij} &= P_2(D)e_{ij}, & P_3(D)\sigma_{kk} &= P_4(D)\varepsilon_{kk}, \\ s_{ij} &= 2Ge_{ij}, & \sigma_{kk} &= K\varepsilon_{kk}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $s_{ij}$ ,  $e_{ij}$  – девіатори тензорів напружень і деформацій;  $D = \eta\partial / \partial\tau$ ,  $\tau$  – часова координата,  $\eta$  – задана стала.

Зокрема, використовуючи диференціальні співвідношення маємо [6]:

$$P_j(D) = \sum_{k=0}^{N_p} a_{jk}D^k,$$

де  $a_{jk}$  – сталі,  $N_p$  – ціле число.

Модулі зсуву і об'ємного стиску  $G = G(D)$  і  $K = K(D)$  у задачах в'язкопружності є диференціальними операторами:

$$2G = \frac{P_2(D)}{P_1(D)}, \quad K = \frac{P_4(D)}{P_3(D)}.$$

Для розв'язування крайової задачі в'язкопружності використаємо відомий підхід, на основі якого у відповідній задачі теорії пружності пружні оператори вважають сталими. Побудуємо формальний розв'язок цієї задачі за допомогою МГІР, звівши її до розв'язування системи алгебричних рівнянь.

**Задача теорії пружності для кусково-однорідної пластини.** Розглянемо кусково-однорідну пластину з пружними сталими  $G_0, \nu_0$ , що містить пружні включення, межі яких лежать на контурах  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, J$ , з пружними сталими  $G_j, \nu_j$ . Позначимо:  $\chi_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ ,  $\mathcal{D}_j$ ,  $\mathcal{D}_0$  – області, які займають включення і матриця, відповідно.

Загальний розв'язок задачі виразимо через комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі [3]:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \int_L [R(t)\Phi_R(z, t) + I(t)\Phi_I(z, t)] ds + \Phi_S(z), \\ \Psi(z) &= \int_L [R(t)\Psi_R(z, t) + I(t)\Psi_I(z, t)] ds + \Psi_S(z),\end{aligned}\quad (2)$$

де  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_J$ ;  $\Phi_S$ ,  $\Psi_S$  – потенціали Мусхелішвілі для суцільної однорідної пластини, що займає область  $\mathcal{D}$ , які відповідають прикладеному навантаженню;  $R$ ,  $I$  – невідомі дійсні функції. Тут через  $\mathcal{D}$  позначено область, яку займають включення та матриця, і вибрано напрямок інтегрування на кривих  $L_j$  так, щоб їх зовнішність залишалась зліва. Функції  $\Phi_J, \Psi_J$ ,  $J = R, I$ , визначені у праці [3]. Зазначимо, що вибране подання справджується і для пластин, які крім включень, мають додаткові межі. За відповідно вибраних функцій  $\Phi_J, \Psi_J$  задані умови на цих межах можуть виконуватись автоматично [3].

Далі використовуватимемо співвідношення для визначення вектора напружень  $q_\Gamma = N_\Gamma + iT_\Gamma$  у довільній точці  $z$  кривої  $\Gamma$  на дотичній до неї площинці через комплексні потенціали [5]:

$$q_\Gamma(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \frac{d\bar{z}}{dz} [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}],$$

де  $d\bar{z}$  – диференціал змінної  $z$  на кривій.

За вибраного загального розв'язку (2) вектор напружень  $q_L$  є неперервним за переходу через межі поділу матриці і включень. Застосувавши для визначення невідомих функцій умову неперервності переміщень за переходу через межу поділу матеріалів, отримуємо інтегральне рівняння [3]

$$\beta_k 2\pi \frac{ds}{dz} (iR - I) + S_k(\Phi, \Psi) = f, \quad z \in L, \quad (3)$$

де

$$f = -S_k(\Phi_S, \Psi_S), \quad \alpha_k = \frac{H_k \chi_0 - \chi_k}{H_k - 1}, \quad \beta_k = \frac{1}{2} \frac{H_k(\chi_0 + 1) + (\chi_k + 1)}{H_k - 1}, \quad H_k = \frac{G_k}{G_0},$$

$$S_k(\Phi, \Psi) = \alpha_k \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \frac{d\bar{z}}{dz} [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}]. \quad (4)$$

Потенціали  $\Phi$ ,  $\Psi$  визначають за формулами (2), де  $z \in L$ , а сингулярні інтеграли розглядають у сенсі головного значення за Коші.

**Числовий алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь.** Для розв'язування інтегральних рівнянь (3) використаємо метод механічних квадратур. Детально розглянемо одне включення. Рівняння контуру інтегрування (межі включення) запишемо параметрично у вигляді  $\xi = \alpha(\theta)$ ,  $\eta = \beta(\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Введемо на контурі вузлові точки  $z_\nu = \tilde{x}_\nu + i\tilde{y}_\nu$ ,  $t_k = x_k + iy_k$ , де  $\tilde{x}_k = \alpha(\tau_k)$ ,  $\tilde{y}_k = \beta(\tau_k)$ ,  $x_k = \alpha(\theta_k)$ ,  $y_k = \beta(\theta_k)$ ,  $\theta_k = Hk$ ,  $\tau_n = \theta_n - H/2$ ,  $H = 2\pi/N$ ,  $N$  – кількість вибраних вузлових точок.

Розглянемо випадок, коли прикладене до пластини навантаження характеризується певним параметром  $p$  і подамо потенціали  $\Phi_S, \Psi_S$  як

$$\Phi_S = p\Phi_c, \quad \Psi_S = p\Psi_c,$$

причому параметр  $p$  залежить від часової координати, потенціали  $\Phi_c, \Psi_c$  відповідають дії зусиль, якщо  $p = 1$ .

На основі (3) для визначення функцій  $R$  та  $I$  у вузлових точках отримуємо систему рівнянь вигляду [3, 4]

$$\begin{aligned} & -\beta_k(s_v^r I_v + s_v^i R_v) + H \sum_{n=1}^N [(\gamma_k A_{vn}^r - B_{vn}^r) R_n + \\ & \quad + (\gamma_k A_{vn}^i - B_{vn}^i) I_n] = (\gamma_k C_v - Q_v) p, \\ & \beta_k(s_v^r R_v - s_v^i I_v) + H \sum_{n=1}^N [(\gamma_k a_{vn}^r - b_{vn}^r) R_n + \\ & \quad + (\gamma_k a_{vn}^i - b_{vn}^i) I_n] = (\gamma_k c_v - q_v) p, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} R_n &= R(x_n, y_n) s_n', \quad I_n = I(x_n, y_n) s_n', \quad s_n' = s'(\theta_n), \quad s'(\theta) = \sqrt{\alpha'(\theta)^2 + \beta'(\theta)^2}, \\ A_{vn}^r &= \operatorname{Re}(F_{vn}^{(R)}), \quad A_{vn}^i = \operatorname{Re}(F_{vn}^{(I)}), \quad F_{vn}^{(J)} = \Phi_J(z_v, t_n), \quad J = R, I, \quad \gamma_k = \alpha_k + 1, \\ C_v &= \operatorname{Re}(\Phi_c(z_v)), \quad Q_v = \operatorname{Re}[q(\Phi_c(z_v), \Psi_c(z_v))], \quad B_{vn}^r = \operatorname{Re}(q_{vn}^{(R)}), \quad B_{vn}^i = \operatorname{Re}(q_{vn}^{(I)}), \\ a_{vn}^r &= \operatorname{Im}(F_{vn}^{(R)}), \quad a_{vn}^i = \operatorname{Im}(F_{vn}^{(I)}), \quad b_{vn}^r = \operatorname{Im}(q_{vn}^{(R)}), \quad b_{vn}^i = \operatorname{Im}(q_{vn}^{(I)}), \\ c_v &= \operatorname{Im}(\Phi_c(z_v)), \quad q_v = \operatorname{Im}[q(\Phi_c(z_v), \Psi_c(z_v))], \quad s_v^r + i s_v^i = 2\pi(ds/dt)_{\theta=\tau_v}. \end{aligned}$$

Тут  $q(\Phi, \Psi) = \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \frac{d\bar{z}}{dz} [z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}]$ ,  $dz$  – диференціал змінної  $z$  на кривій  $L$ . Доповнимо цю систему рівняннями, одержаними заміною  $\theta$  на  $\theta + H/2$ .

**Задача в'язкопружності.** Диференціальні оператори в системі рівнянь (5) для задачі в'язкопружності містять тільки коефіцієнти  $\beta_k, \gamma_k$ , при цьому коефіцієнти  $R_n, I_n$  залежать від часу. Застосувавши до цієї системи рівнянь перетворення Лапласа за часовою змінною  $t = \tau/\eta_0$ , отримуємо

$$\begin{aligned} & -\beta_k(s)(s_v^r \tilde{I}_v + s_v^i \tilde{R}_v) + H \sum_{n=1}^N [(\gamma_k(s) A_{vn}^r - B_{vn}^r) \tilde{R}_n + (\gamma_k(s) A_{vn}^i - B_{vn}^i) \tilde{I}_n] = \\ & \quad = (\gamma_k(s) C_v - Q_v) \tilde{p}, \\ & \beta_k(s)(s_v^r \tilde{R}_v - s_v^i \tilde{I}_v) + H \sum_{n=1}^N [(\gamma_k(s) a_{vn}^r - b_{vn}^r) \tilde{R}_n + (\gamma_k(s) a_{vn}^i - b_{vn}^i) \tilde{I}_n] = \\ & \quad = (\gamma_k(s) c_v - q_v) \tilde{p}, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $s$  – параметр перетворення Лапласа; «тильдою» позначено зображення Лапласа від відповідних величини;  $\eta_0$  – коефіцієнт  $\eta$  у реологічних співвідношеннях для матриці. Тут  $\beta_k(s), \gamma_k(s)$  – відомі функції, отримані заміною в операторних пружних характеристиках для матриці диференціального оператора  $D$  на  $s$ , а в операторних пружних характеристиках для включення – на  $\eta's$ , де  $\eta' = \eta_k/\eta_0$ ,  $\eta_k$  – коефіцієнт  $\eta$  для включення.

Із цієї системи зображення від коефіцієнтів можна знайти за довільного значення параметра Лапласа. Для пошуку оригіналів цих коефіцієнтів (які залежать від часу) використаємо уточнену формулу обернення [2], у якій вважаємо відомими зображення Лапласа  $F(s)$  від деякої функції  $f(t)$

за значень  $s = s_n = (c + 2\pi ni)/\ell$  при  $n = 0, 1, \dots$ , де  $c, \ell$  – параметри, які необхідно вибрати. Крім цього, приймаємо, що є відомими значення оригіналу в початковий момент часу  $f_0 = f(0)$  і для великих значень часу  $f(t) \rightarrow f_\infty$ , якщо  $t \rightarrow \infty$ . Тоді формула обернення для  $t \in (0, \ell)$  матиме вигляд

$$f(t) \approx \frac{1}{\ell} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(s_n t) + \frac{f_0}{1 - \exp(-c)} - \frac{f_\infty}{\exp(c) - 1}, \quad (7)$$

де  $F_n = F(s_n) - f_0 / s_n$ , причому параметр  $\ell$  вибираємо так, що  $f(\ell) \approx f_\infty$ .

Розрахунки виконано для стандартного в'язкопружного тіла, коли

$$P_1 = 1 + D, \quad P_2 = 2G_\infty(1 + \gamma D), \quad P_3 = 1 + mD, \quad P_4 = K_\infty(1 + kmD),$$

де  $\gamma, k, m$  – сталі матеріалу.

Прийmemo, що відомі миттєві та асимптотичні значення модулів зсуву та коефіцієнтів Пуассона  $G_0, \nu_0$  і  $G_\infty, \nu_\infty$ .

Для початкового моменту часу маємо взаємозв'язки [6]

$$s_{ij} = 2G_\infty \gamma e_{ij}, \quad \sigma_{kk} = K_\infty k \varepsilon_{kk}.$$

Для великих значень часу маємо

$$s_{ij} = 2G_0 e_{ij}, \quad \sigma_{kk} = K_0 \varepsilon_{kk}.$$

Тоді коефіцієнти

$$\gamma = \frac{G_0}{G_\infty}, \quad k = \gamma \frac{1 - 2\nu_\infty}{1 - 2\nu_0} \frac{1 + \nu_0}{1 + \nu_\infty}.$$

Звідси знаходимо операторні пружні характеристики:

$$G = G_\infty g(D), \quad K = K_\infty \alpha(D), \quad \nu = \frac{1}{2} \frac{\alpha(D) - 2\beta g(D)}{\alpha(D) + \beta g(D)},$$

де

$$g(D) = \frac{1 + \gamma D}{1 + D}, \quad \alpha(D) = \frac{1 + kmD}{1 + mD}, \quad \beta = \frac{G_\infty}{K_\infty} = \frac{1}{2} \frac{1 - 2\nu_\infty}{1 + \nu_\infty}.$$

Для обчислень задавали миттєві та асимптотичні значення модулів зсуву і коефіцієнти Пуассона включення, позначені через  $G_{w0}, \nu_{w0}$  та  $G_{w\infty}, \nu_{w\infty}$ . Аналогічні величини для матриці:  $G_{z0}, \nu_{z0}$  та  $G_{z\infty}, \nu_{z\infty}$ .

Детальніше розглянемо випадок, коли пластина розтягується зусиллями  $p = p_0 H(t)$ , де  $H(t)$  – функція Гевісайда. Зображення Лапласа від цієї функції  $\tilde{p} = p_0/s$ . Значення коефіцієнтів у початковий момент часу  $R_n(0), I_n(0)$  (які входять в формулу (7)) знаходимо із системи (6), де модулі зсуву та матриці поклали рівними їх миттєвим значенням  $G_{w0}, \nu_{w0}, G_{z0}, \nu_{z0}$ .

Асимптотичні значення коефіцієнтів  $R_n(\infty), I_n(\infty)$  також обчислюємо із цієї ж системи, поклавши пружні характеристики рівними  $G_{w\infty}, \nu_{w\infty}, G_{z\infty}, \nu_{z\infty}$ .

**Результати розрахунків.** Розглянемо нескінченну пластину з квадратним включенням з півстороною  $a$  із закругленими вершинами радіуса  $0.5a$  за розтягу зусиллями  $pH(t)$  у горизонтальному напрямку. Функції  $\Phi_R, \Phi_I$  у зображенні (2) тут будуть [3]:

$$\Phi_R(z, c) = \frac{1}{c - z}, \quad \Psi_R(z, c) = \frac{1}{c - z} - \frac{\bar{c}}{(c - z)^2}$$

$$\Phi_I(z, c) = \frac{i}{c - z}, \quad \Psi_I(z, c) = -\frac{i}{c - z} - i \frac{\bar{c}}{(c - z)^2}.$$

Результати обчислень віднесених до  $p$  напружень у включенні при  $t = 1 + 3j$ ,  $j = 0, \dots, 6$ , наведено на рис. 1. Тут і далі обчислення виконано при  $G_{w0} / G_{wn} = 4$ ,  $G_{z0} / G_{zn} = 2$ ,  $G_{z0} / G_{w0} = 2$ ,  $\eta' = 10$ ,  $m = 1$ .

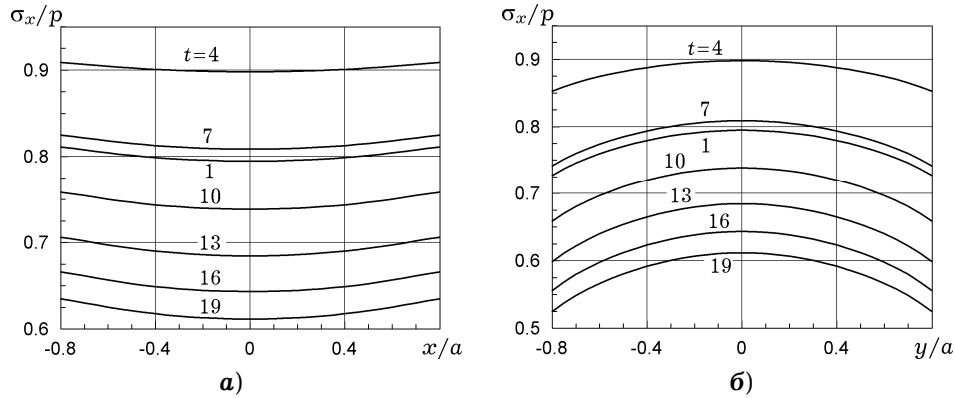


Рис. 1. Напруження у квадратному включенні із заокругленими вершинами при  $y = 0$  (а) та  $x = 0$  (б).

Як бачимо, максимальні напруження у включенні досягаються біля лівої і правої меж.

Розглянемо півнескінченну пластину  $y < 0$  з круговим включенням, центр якого розміщено в точці з координатами  $(0, y_c)$  за розтягу зусиллями  $pH(t)$  у горизонтальному напрямку. Функції  $\Phi_R$ ,  $\Phi_I$  у зображенні (2) для цього випадку будуть [3]

$$\Phi_R(z, c) = \frac{1}{c-z} - \frac{1}{\bar{c}-z} + \frac{c-\bar{c}}{(\bar{c}-z)^2}, \quad \Psi_R(z) = \Omega_R - z\Phi'_R - \Phi_R,$$

$$\Phi_I(z, c) = \frac{i}{c-z} - \frac{i}{\bar{c}-z} - i \frac{c-\bar{c}}{(\bar{c}-z)^2}, \quad \Psi_I = \Omega_I - z\Phi'_I - \Phi_I,$$

де

$$\Omega_R = \frac{c}{c-z} + \frac{c-\bar{c}}{(c-z)^2} - \frac{1}{\bar{c}-z}, \quad \Omega_I = -\frac{ic}{c-z} + \frac{(c-\bar{c})i}{(c-z)^2} + i \frac{1}{\bar{c}-z}.$$

Результати обчислень віднесених до  $p$  напружень у круговому включенні радіуса  $a$  при  $y_c/a = 1.25$ ,  $t = 1 + 3j$ ,  $j = 0, \dots, 6$ , показано на рис. 2.

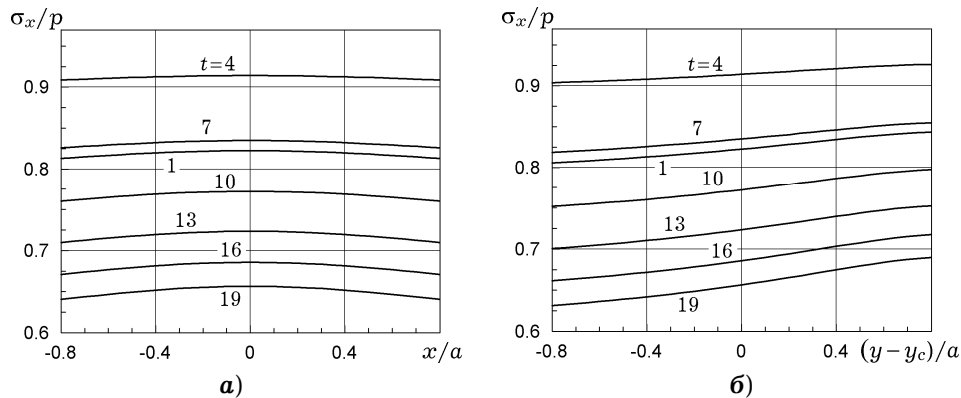


Рис. 2. Напруження у круговому включенні, розміщеному в півплощині при  $y = y_c$  (а) та  $x = 0$  (б).

Отже, напруження у включенні монотонно зростають з наближенням до межі пластини та істотно залежать від часу. У розглянутих випадках напруження у включенні спочатку зростають (до значення часової координати  $t \approx 4$ ), а далі зменшуються. При цьому максимальні суттєво перевищують миттєві (при  $\tau = 0$ ) та усталені (при  $\tau \rightarrow \infty$ ).

**Висновки.** Розроблено числовий алгоритм розрахунку в'язкопружних напружень у пластинах із включеннями, який базується на МГІР та інтегральному перетворенні Лапласа. Задачу зведено до розв'язування системи алгебричних рівнянь відносно зображень Лапласа від значень невідомих функцій у вузлових точках на межі поділу матеріалів. Оригінали функцій знайдено за уточненою та адаптованою до цього класу задач формулою обернення перетворення Лапласа. Розраховано в'язкопружні напруження у пластинах із включеннями різної форми.

1. *Kaloerov S. A., Mironenko A. B.* Исследование вязкоупругого состояния пластинки с упругими эллиптическими или линейными включениями // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 88–98.  
Те саме: *Kaloerov S. A., Mironenko A. B.* Analyzing the viscoelastic state of a plate with elliptic or linear elastic inclusions // Int. Appl. Mech. – 2002. – **43**, No. 2. – P. 198–208.
2. *Kushnir P. M., Maksymovych V. M., Solyar T. Ya.* Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 2. – С. 18–26.  
Те саме: *Kushnir R. M., Maksymovych V. M., Solyar T. Ya.* Determination of nonstationary temperatures with the help of improved formulas of the inverse Laplace transformation // Mater. Sci. – 2002. – **38**, No. 2. – P. 172–184.
3. *Максимович В. М., Приходько О. С., Соляр Т. Я.* Визначення напружень біля пружних включень у пластинках складної форми // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 3. – С. 109–118.
4. *Саврук М. П., Зеленьак В. М.* Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: Растр-7, 2009. – 212 с.
5. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук І. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 248 с.
6. *Evaristo Riande, Ricardo Diaz-Calleja, Margarita Prolongo, Rosa Masegosa, Catalina Salom.* Polymer viscoelasticity: Stress and strain in practice. – New York – Basel: Marcel Dekker, Inc., 2000. – 904 p.

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНАХ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Описан поход к определению вязкоупругих напряжений в пластинах с включениями, базирующийся на методе граничных интегральных уравнений и интегральном преобразовании Лапласа. Формальное решение задачи теории упругости, в котором дифференциальные операторы заменены постоянными величинами, построено с помощью метода граничных интегральных уравнений и сведено к решению системы алгебраических уравнений. Соответствующая система для задачи вязкоупругости решена с использованием интегрального преобразования Лапласа и уточненной численно-аналитической формулы для его обращения. Приведенные примеры свидетельствуют об эффективности предложенного подхода.

#### DETERMINATION OF VISCO ELASTIC STRESSES IN THE PLATES WITH INCLUSIONS

An approach to determination of visco elastic stresses in the plates with inclusions is given. It is based on the method of boundary integral equations (MBIEs) and Laplace integral transform. The formal solution of the problem of elasticity theory, where differential operators are charged by constant values, is constructed by means of the MBIEs and reduced to solution of a system of algebraic equations. The corresponding system for the visco elasticity problem is solved using the Laplace integral transform and the refined numerical-analytic formula for its transformation. The examples which indicate the efficiency of the proposed approach are given.

<sup>1</sup> Луцьк. нац. техн. ун-т, Луцьк,

<sup>2</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів