УДК 539.3

Р. І. Тучапський

РІВНЯННЯ ТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ МЕТОДУ {m,n}-АПРОКСИМАЦІЇ

Побудовано систему диференціальних рівнянь, що описують пружну деформацію тонких анізотропних оболонок обертання, розв'язаних відносно частинних похідних першого порядку відносно координати по меридіану. Рівняння отримано за допомогою методу $\{m,n\}$*-апроксимації. Наближення невідомих функцій узгоджуються із силовими граничними умовами на лицьових поверхнях.*

Вступ. У працях [15–17] розроблено метод побудови різних варіантів теорії тонких анізотропних пружних оболонок, відомий під назвою методу $\{m,n\}$-апроксимації (де m – порядок наближень тангенціальних переміщень, n – порядок наближення поперечного переміщення). У його основі – апроксимація переміщень і напружень рядами за поліномами Лежандра із задоволенням граничних умов для напружень на лицьових поверхнях оболонки. На цих ідеях ґрунтуються дослідження [2, 3, 10–14] та ін.

Відмінну від указаної методику зведення тривимірних рівнянь теорії пружності до двовимірних рівнянь пружного шару, засновану на використанні поліномів Лежандра, викладено в праці [1].

Ще один метод побудови різних варіантів теорії тонких пологих ізотропних оболонок, заснований на застосуванні поліномів Лежандра, запропонував І. Н. Векуа [4]. На його ідеях ґрунтуються праці [20–23] та ін.

Багато конструкцій сучасної техніки містять тонкі оболонки обертання, що мають природні або конструктивні анізотропні властивості.

Для розв'язування задач про напружено-деформований стан тонких оболонок обертання на основі теорій Кірхгофа–Лява, типу Тимошенка тощо, давно й успішно використовують підхід на основі методу ортогональної прогонки С. К. Годунова [5–8].

Послідовність обчислень при цьому виглядає так: 1) отримують з вихідних рівнянь оболонок обертання систему диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно частинних похідних першого порядку відносно координати по меридіану, виражаючи при цьому всі невідомі функції, що в них входять, через компоненти вектора розв'язків і частинні похідні відносно координати по колу від них; 2) зводять цю систему до нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь, яку розв'язують за допомогою методу ортогональної прогонки С. К. Годунова.

Узагальнення цього алгоритму на нові класи задач, що виникають у рамках теорії оболонок обертання методу $\{m,n\}$-апроксимації, таких як задачі про напружено-деформований стан оболонки обертання під дією швидкозмінного за просторовими координатами навантаження, поміщеної в пружне середовище оболонки обертання тощо, несе безумовний інтерес, але наштовхується на значні труднощі, зумовлені складністю структури рівнянь методу $\{m,n\}$-апроксимації за великих m і n. Особливо складну задачу представляє реалізація першого етапу, на якому необхідно розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь високої розмірності. Вирішенню вказаної задачі присвячена ця стаття. Більшість отриманих результатів можна використати в рамках теорій [1, 4].

1. Розвинення функцій у ряди за поліномами Лежандра відносно поперечної координати. Розглянемо тонку оболонку обертання. Припустимо, що вона має серединну поверхню S, утворену обертанням достатньо гладкого меридіана навколо осі z правої циліндричної системи координат r, θ, z, і граничний зріз, твірні якого спрямовані по нормалях до S. За криволінійні координати на S виберемо координату по меридіану s і координату по колу θ. Поперечну координату x_3 відраховуватимемо в бік зростання зовнішньої нормалі до S, напрямок якої вибиратимемо так, щоб координати s, θ, x_3 утворювали ліву систему координат. Координата θ для всіх згаданих систем координат є спільною. Нехай h − півтовщина оболонки; φ − кут між віссю z і дотичною до меридіана; $R_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial s}$, $R_\theta = \frac{r}{\cos\varphi}$ і Γ − головні радіуси кривини й граничний контур поверхні S; S^- і S^+ − лицьові поверхні оболонки; u_s, u_θ, u_3 − фізичні компоненти вектора переміщень; e_{ss}, $e_{s\theta}$, $e_{\theta\theta}$, e_{s3}, $e_{\theta 3}$, e_{33} − фізичні компоненти тензора деформації; σ_{ss}, $\sigma_{s\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{s3}, $\sigma_{\theta 3}$, σ_{33} − фізичні компоненти тензора напружень; F_s, F_θ, F_3 − фізичні компоненти вектора масових сил, віднесені до одиниці об'єму; P_{3s}^-, $P_{3\theta}^-$, P_{33}^- − напруження σ_{s3}, $\sigma_{\theta 3}$, σ_{33} відповідно на поверхні S^-, а P_{3s}^+, $P_{3\theta}^+$, P_{33}^+ − на поверхні S^+. Рівняння поверхонь S^- і S^+ виражають рівності $x_3 = -h$ і $x_3 = h$ відповідно. Вважатимемо, що $h = \mathrm{const}$. Припустимо, що оболонка володіє криволінійною анізотропією, підпорядковується узагальненому закону Гука й у кожній її точці є площина пружної симетрії, перпендикулярна до координати x_3. Позначимо через A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{16}, A_{22}, A_{23}, A_{26}, A_{33}, A_{36}, A_{44}, A_{45}, A_{55}, A_{66} матричні компоненти тензора пружної жорсткості матеріалу й через B_{44}, $B_{45} = B_{54}$, B_{55} − матричні компоненти тензора поперечної зсувної пружної піддатливості матеріалу. Приймемо, що вони від x_3 не залежать. Зазначимо, що компоненти всіх згаданих векторів і тензорів віднесено до системи координат s, θ, x_3.

Припустимо, що функції u_s, u_θ, u_3, e_{ss}, $e_{s\theta}$, $e_{\theta\theta}$, e_{s3}, $e_{\theta 3}$, e_{33}, σ_{ss}, $\sigma_{s\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{s3}, $\sigma_{\theta 3}$, σ_{33}, F_s, F_θ, F_3 достатньо гладкі і їх відносно скалярної координати x_3 можна розвивати в ряди за поліномами Лежандра $P_k(\zeta)$ [4, 15, 19, 20], де $\zeta = \frac{x_3}{h}$.

У розвиненні тангенціальних компонент переміщень виділимо $m+1$ член, а в розвиненні нормальної компоненти − $n+1$ [15]:

$$(u_s, u_\theta) = \sum_{k=0}^{m} \left(u_s^{(k)}, u_\theta^{(k)}\right) P_k(\zeta), \quad u_3 = \sum_{k=0}^{n} u_3^{(k)} P_k(\zeta). \tag{1}$$

Коефіцієнти $u_s^{(k)}$, $u_\theta^{(k)}$, $k > m$, і $u_3^{(k)}$, $k > n$, узагалі кажучи, можуть бути й ненульовими.

У працях [10, 12, 14, 17] розглядали випадок, коли $m \le n+1$. Зупинимось на іншому важливому випадку, коли $m \ge n+1$.

Маємо [4]

$$\frac{\partial u_s}{\partial x_3} = \sum_{k=0}^{m+1} D_3 u_s^{(k)} P_k(\zeta), \ s \Leftrightarrow \theta, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \sum_{k=0}^{n+1} D_3 u_3^{(k)} P_k(\zeta), \tag{2}$$

де

$$D_3 u_s^{(k)} = D_3^{(m)} u_s^{(k)} + \frac{2k+1}{2h}\left[v_s^+ - (-1)^k v_s^-\right], \ s \Leftrightarrow \theta, \ k = 0, 1, \ldots, m+1,$$

$$D_3 u_3^{(k)} = D_3^{(n)} u_3^{(k)} + \frac{2k+1}{2h}\left[v_3^+ - (-1)^k v_3^-\right], \ k = 0, 1, \ldots, n+1,$$

причому

$$v_s^- = \sum_{k=m+1}^{\infty} (-1)^k u_s^{(k)}, \ s \Leftrightarrow \theta, \ v_3^- = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_3^{(k)},$$

$$v_s^+ = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_s^{(k)}, \ s \Leftrightarrow \theta, \ v_3^+ = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_3^{(k)};$$

$$D_3^{(m)} u_s^{(k)} = \frac{2k+1}{2h} \sum_{p=k}^{m} \left[1 - (-1)^{k+p}\right] u_s^{(p)}, \ s \Leftrightarrow \theta, \ k = 0, 1, \ldots, m-1;$$

$$D_3^{(n)} u_3^{(k)} = \frac{2k+1}{2h} \sum_{p=k}^{n} \left[1 - (-1)^{k+p}\right] u_3^{(p)}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$$D_3^{(m)} u_s^{(m)} = D_3^{(m)} u_s^{(m+1)} = 0, \ s \Leftrightarrow \theta, \ D_3^{(n)} u_3^{(n)} = D_3^{(n)} u_3^{(n+1)} = 0.$$

Тут і далі символ $s \Leftrightarrow \theta$ означає, що формулі, після якої він слідує, відповідають дві формули: другу отримують з першої круговою заміною індексів s і θ.

Подамо компоненти тензора деформації, тензора напружень і вектора масових сил наближеними формулами:

$$\left(e_{ss}, e_{s\theta}, e_{\theta\theta}\right) = \sum_{k=0}^{m} \left(e_{ss}^{(k)}, e_{s\theta}^{(k)}, e_{\theta\theta}^{(k)}\right) P_k(\zeta),$$

$$\left(e_{s3}, e_{\theta 3}\right) = \sum_{k=0}^{m+1} \left(e_{s3}^{(k)}, e_{\theta 3}^{(k)}\right) P_k(\zeta), \qquad e_{33} = \sum_{k=0}^{n+1} e_{33}^{(k)} P_k(\zeta),$$

$$\left(\sigma_{ss}, \sigma_{s\theta}, \sigma_{\theta\theta}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{2h} \left(P_{ss}^{(k)}, P_{s\theta}^{(k)}, P_{\theta\theta}^{(k)}\right) P_k(\zeta),$$

$$\left(\sigma_{s3}, \sigma_{\theta 3}\right) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{2k+1}{2h} \left(P_{s3}^{(k)}, P_{\theta 3}^{(k)}\right) P_k(\zeta), \quad \sigma_{33} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k+1}{2h} P_{33}^{(k)} P_k(\zeta),$$

$$\left(F_s, F_\theta\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{2k+1}{2h} \left(F_s^{(k)}, F_\theta^{(k)}\right) P_k(\zeta), \qquad F_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2h} F_3^{(k)} P_k(\zeta). \tag{3}$$

Відзначимо, що перші шість виразів (3) узгоджуються зі схемою побудови апроксимаційних поліномів [15–17].

Функції $u_s^{(k)}$, $u_\theta^{(k)}$, $u_3^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, називатимемо узагальненими компонентами переміщень, функції $e_{ss}^{(k)}$, $e_{s\theta}^{(k)}$, $e_{\theta\theta}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $e_{s3}^{(k)}$, $e_{\theta 3}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m+1$; $e_{33}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$, – узагальненими компонентами деформації, функції $P_{ss}^{(k)}$, $P_{s\theta}^{(k)}$, $P_{\theta\theta}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $P_{s3}^{(k)}$, $P_{\theta 3}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m+1$; $P_{33}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$, – узагальненими компонентами напружень, функції $F_s^{(k)}$, $F_\theta^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $F_3^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, – узагальненими компонентами масових сил [15]. Усі вони від x_3 не залежать.

Використовуючи формули (3), граничні умови на S^- і S^+ запишемо так:

$$\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k\frac{2k+1}{2h}\left(P_{s3}^{(k)},P_{\theta3}^{(k)}\right)=\left(P_{3s}^-,P_{3\theta}^-\right),\quad \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\frac{2k+1}{2h}P_{33}^{(k)}=P_{33}^-,$$

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{2k+1}{2h}\left(P_{s3}^{(k)},P_{\theta3}^{(k)}\right)=\left(P_{3s}^+,P_{3\theta}^+\right),\qquad \sum_{k=0}^{n+1}\frac{2k+1}{2h}P_{33}^{(k)}=P_{33}^+. \tag{4}$$

Рівняння оболонки, відповідні їм несуперечливі умови для граничного контуру поверхні S та умови (4) отримаємо за варіаційним принципом Вашіцу [10, 14, 15, 18], унісши в нього формули (1)−(3) й знехтувавши величинами $\dfrac{x_3}{R_s}$ і $\dfrac{x_3}{R_\theta}$ порівняно з 1. Із цих рівнянь випливають наведені нижче рівняння рівноваги, деформаційні й фізичні співвідношення.

2. Система диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно частинних похідних першого порядку відносно *s*. Уведемо позначення

$$\underset{\wedge}{e}_{s3}^{(k)}=e_{s3}^{(k)}-\frac{2k+1}{4h}\left[v_s^+-(-1)^k v_s^-\right],\ s\Leftrightarrow\theta,$$

$$\underset{\sim}{P}_{s3}^{(k)}=P_{s3}^{(k)}-\overset{k}{X}_{s3},\ s\Leftrightarrow\theta,\ k=0,1,\ldots,m+1,$$

$$\underset{\wedge}{e}_{33}^{(k)}=e_{33}^{(k)}-\frac{2k+1}{2h}\left[v_3^+-(-1)^k v_3^-\right],$$

$$\underset{\sim}{P}_{ss}^{(k)}=P_{ss}^{(k)}-\overset{k}{X}_{ss},\ \underset{\sim}{P}_{s\theta}^{(k)}=P_{s\theta}^{(k)}-\overset{k}{X}_{s\theta},$$

$$\underset{\sim}{P}_{\theta\theta}^{(k)}=P_{\theta\theta}^{(k)}-\overset{k}{X}_{\theta\theta},\ \underset{\sim}{P}_{33}^{(k)}=P_{33}^{(k)}-\overset{k}{X}_{33},\ k=0,1,\ldots,n+1, \tag{5}$$

де

$$\overset{k}{X}_{s3}=\frac{2h}{2k+1}\varepsilon_{m+1,k}\left[P_{3s}^++(-1)^k P_{3s}^-\right],\ s\Leftrightarrow\theta,\ k=0,1,\ldots,m+1,$$

$$\overset{k}{X}_{ss}=\frac{2h}{2k+1}\varepsilon_{n+1,k}\frac{A_{13}}{A_{33}}\left[P_{33}^++(-1)^k P_{33}^-\right],$$

$$\overset{k}{X}_{s\theta}=\frac{2h}{2k+1}\varepsilon_{n+1,k}\frac{A_{36}}{A_{33}}\left[P_{33}^++(-1)^k P_{33}^-\right],$$

$$\overset{k}{X}_{\theta\theta}=\frac{2h}{2k+1}\varepsilon_{n+1,k}\frac{A_{23}}{A_{33}}\left[P_{33}^++(-1)^k P_{33}^-\right],$$

$$\overset{k}{X}_{33}=\frac{2h}{2k+1}\varepsilon_{n+1,k}\left[P_{33}^++(-1)^k P_{33}^-\right],\ k=0,1,\ldots,n+1,$$

причому

$$\varepsilon_{m+1,k}=\frac{2k+1}{(m+2)\left[m+2+(-1)^{k+m+1}\right]},\qquad k=0,1,\ldots,m+1,$$

$$\varepsilon_{n+1,k}=\frac{2k+1}{(n+2)\left[n+2+(-1)^{k+n+1}\right]},\ k=0,1,\ldots,n+1. \tag{6}$$

Рівняння рівноваги оболонки мають вигляд

$$\frac{\partial \underset{\sim}{P}{}_{ss}^{(k)}}{\partial s} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \underset{\sim}{P}{}_{s\theta}^{(k)}}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r}\left(\underset{\sim}{P}{}_{ss}^{(k)} - \underset{\sim}{P}{}_{\theta\theta}^{(k)}\right) - \frac{1}{R_s}\underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(k)} + \frac{1}{h}\underset{\sim}{\underline{P}}{}_{3s}^{(k)} - \overset{k}{Y}_s ,$$

$$k = 0, 1, \ldots, n+1 ;$$

$$\frac{\partial P_{ss}^{(k)}}{\partial s} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P_{s\theta}^{(k)}}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r}\left(P_{ss}^{(k)} - P_{\theta\theta}^{(k)}\right) - \frac{1}{R_s}\underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(k)} + \frac{1}{h}\underset{\sim}{\underline{P}}{}_{3s}^{(k)} - \overset{k}{Y}_s ,$$

$$k = n+2, n+3, \ldots, m ;$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{P}{}_{s\theta}^{(k)}}{\partial s} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \underset{\sim}{P}{}_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial\theta} - \frac{2\sin\varphi}{r}\underset{\sim}{P}{}_{s\theta}^{(k)} - \frac{\cos\varphi}{r}\underset{\sim}{P}{}_{\theta 3}^{(k)} + \frac{1}{h}\underset{\sim}{\underline{P}}{}_{3\theta}^{(k)} - \overset{k}{Y}_\theta ,$$

$$k = 0, 1, \ldots, n+1 ;$$

$$\frac{\partial P_{s\theta}^{(k)}}{\partial s} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P_{\theta\theta}^{(k)}}{\partial\theta} - \frac{2\sin\varphi}{r}P_{s\theta}^{(k)} - \frac{\cos\varphi}{r}\underset{\sim}{P}{}_{\theta 3}^{(k)} + \frac{1}{h}\underset{\sim}{\underline{P}}{}_{3\theta}^{(k)} - \overset{k}{Y}_\theta ,$$

$$k = n+2, n+3, \ldots, m ;$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(k)}}{\partial s} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \underset{\sim}{P}{}_{\theta 3}^{(k)}}{\partial\theta} - \frac{\sin\varphi}{r}\underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(k)} + \frac{1}{R_s}\underset{\sim}{P}{}_{ss}^{(k)} + \frac{\cos\varphi}{r}\underset{\sim}{P}{}_{\theta\theta}^{(k)} + \frac{1}{h}\underset{\sim}{\underline{P}}{}_{33}^{(k)} - \overset{k}{Y}_3 ,$$

$$k = 0, 1, \ldots, n , \tag{7}$$

де

$$\underset{\sim}{\underline{P}}{}_{3s}^{(0)} = \underset{\sim}{\underline{P}}{}_{3\theta}^{(0)} = 0 ,$$

$$\underset{\sim}{\underline{P}}{}_{3s}^{(k)} = \sum_{p=0}^{k}\frac{2p+1}{2}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(p)} , \quad s \Leftrightarrow \theta , \qquad k = 1, 2, \ldots, m ,$$

$$\underset{\sim}{\underline{P}}{}_{33}^{(0)} = 0 ; \quad \underset{\sim}{\underline{P}}{}_{33}^{(k)} = \sum_{p=0}^{k}\frac{2p+1}{2}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\underset{\sim}{P}{}_{33}^{(p)} , \qquad k = 1, 2, \ldots, n ;$$

$$\overset{k}{Y}_s = \frac{\partial \overset{k}{X}_{ss}}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overset{k}{X}_{s\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{r}\left(\overset{k}{X}_{ss} - \overset{k}{X}_{\theta\theta}\right) + \frac{1}{R_s}\overset{k}{X}_{s3} - \frac{1}{h}\overset{k}{\underline{X}}_{3s} + \overset{k}{\Phi}_s ,$$

$$k = 0, 1, \ldots, n+1 ;$$

$$\overset{k}{Y}_s = \frac{1}{R_s}\overset{k}{X}_{s3} - \frac{1}{h}\overset{k}{\underline{X}}_{3s} + \overset{k}{\Phi}_s , \qquad k = n+2, n+3, \ldots, m ;$$

$$\overset{k}{Y}_\theta = \frac{\partial \overset{k}{X}_{s\theta}}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overset{k}{X}_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{2\sin\varphi}{r}\overset{k}{X}_{s\theta} + \frac{\cos\varphi}{r}\overset{k}{X}_{\theta 3} - \frac{1}{h}\overset{k}{\underline{X}}_{3\theta} + \overset{k}{\Phi}_\theta ,$$

$$k = 0, 1, \ldots, n+1 ;$$

$$\overset{k}{Y}_\theta = \frac{\cos\varphi}{r}\overset{k}{X}_{\theta 3} - \frac{1}{h}\overset{k}{\underline{X}}_{3\theta} + \overset{k}{\Phi}_\theta , \qquad k = n+2, n+3, \ldots, m ;$$

$$\overset{k}{Y}_3 = \frac{\partial \overset{k}{X}_{s3}}{\partial s} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overset{k}{X}_{\theta 3}}{\partial \theta} + \frac{\sin\varphi}{r}\overset{k}{X}_{s3} - \frac{1}{R_s}\overset{k}{X}_{ss} - \frac{\cos\varphi}{r}\overset{k}{X}_{\theta\theta} - \frac{1}{h}\overset{k}{\underset{\sim}{X}}_{33} + \overset{k}{\Phi}_3 ,$$

$$k = 0, 1, \ldots, n ,$$

причому

$$\overset{0}{\underset{\sim}{X}}_{3s} = \overset{0}{\underset{\sim}{X}}_{3\theta} = 0 ;$$

$$\overset{k}{\underset{\sim}{X}}_{3s} = \sum_{p=0}^{k} \frac{2p+1}{2}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\overset{p}{X}_{s3} = 2h\varepsilon'_{m+1,k}\left[P_{3s}^{+} - (-1)^{k} P_{3s}^{-}\right], \ s \Leftrightarrow \theta ,$$

$$k = 1, 2, \ldots, m ;$$

$$\overset{0}{\underset{\sim}{X}}_{33} = 0 ; \ \overset{k}{\underset{\sim}{X}}_{33} = \sum_{p=0}^{k} \frac{2p+1}{2}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\overset{p}{X}_{33} = 2h\varepsilon'_{n+1,k}\left[P_{33}^{+} - (-1)^{k} P_{33}^{-}\right],$$

$$k = 1, 2, \ldots, n ;$$

$$\overset{k}{\Phi}_s = P_{3s}^{+} - (-1)^{k} P_{3s}^{-} + F_s^{(k)} , \ s \Leftrightarrow \theta , \qquad k = 0, 1, \ldots, m ;$$

$$\overset{k}{\Phi}_3 = P_{33}^{+} - (-1)^{k} P_{33}^{-} + F_3^{(k)} , \qquad k = 0, 1, \ldots, n ,$$

де

$$\varepsilon'_{m+1,k} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{k}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\varepsilon_{m+1,p} = \frac{k(k+1)}{2(m+2)\left[m+2+(-1)^{k+m}\right]} ,$$

$$k = 1, 2, \ldots, m ;$$

$$\varepsilon'_{n+1,k} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{k}\left[1-(-1)^{k+p}\right]\varepsilon_{n+1,p} = \frac{k(k+1)}{2(n+2)\left[n+2+(-1)^{k+n}\right]} ,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n . \tag{8}$$

Позначення (6) і (8) узято з праці [4].

Рівняння рівноваги (7) розв'язані відносно частинних похідних першого порядку відносно s від функцій $\underset{\sim}{P}_{ss}^{(k)}$, $\underset{\sim}{P}_{s\theta}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$; $P_{ss}^{(k)}$, $P_{s\theta}^{(k)}$, $k = n+2, n+3, \ldots, m$; $\underset{\sim}{P}_{s3}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Доповнимо їх деформаційними співвідношеннями, розв'язаними відносно частинних похідних першого порядку відносно s від функцій $u_s^{(k)}$, $u_\theta^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $u_3^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\frac{\partial u_s^{(k)}}{\partial s} = e_{ss}^{(k)} - \frac{u_3^{(k)}}{R_s} , \qquad k = 0, 1, \ldots, n ;$$

$$\frac{\partial u_s^{(k)}}{\partial s} = e_{ss}^{(k)} , \qquad k = n+1, n+2, \ldots, m ;$$

$$\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial s} = 2e_{s\theta}^{(k)} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_s^{(k)}}{\partial \theta} - \sin\varphi\, u_\theta^{(k)}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, m ;$$

$$\frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial s} = 2\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(k)} + \frac{u_s^{(k)}}{R_s} - \frac{2k+1}{2h}\sum_{p=k}^{m}\left[1-(-1)^{k+p}\right]u_s^{(p)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Таким чином, маємо систему диференціальних рівнянь (7) і (9), розв'язаних відносно частинних похідних першого порядку відносно s від функцій $\underset{\sim}{P}{}_{ss}^{(k)}$, $\underset{\sim}{P}{}_{s\theta}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$; $P_{ss}^{(k)}$, $P_{s\theta}^{(k)}$, $k = n+2, n+3, \ldots, m$; $\underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$; $u_s^{(k)}$, $u_\theta^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $u_3^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

3. Вираження деяких невідомих функцій через компоненти вектора розв'язків і функції $\dfrac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $\dfrac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \theta}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Уведемо вектор розв'язків:

$$Y = \Big[\underset{\sim}{P}{}_{ss}^{(0)}, \ldots, \underset{\sim}{P}{}_{ss}^{(n+1)}, P_{ss}^{(n+2)}, \ldots, P_{ss}^{(m)}, \underset{\sim}{P}{}_{s\theta}^{(0)}, \ldots, \underset{\sim}{P}{}_{s\theta}^{(n+1)}, P_{s\theta}^{(n+2)}, \ldots, P_{s\theta}^{(m)},$$

$$\underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(0)}, \ldots, \underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(n)}, u_s^{(0)}, \ldots, u_s^{(m)}, u_\theta^{(0)}, \ldots, u_\theta^{(m)}, u_3^{(0)}, \ldots, u_3^{(n)}\Big].$$

Функції $e_{ss}^{(k)}$, $e_{s\theta}^{(k)}$, $e_{\theta\theta}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(k)}$, $\underset{\wedge}{e}{}_{\theta 3}^{(k)}$, $\underset{\sim}{P}{}_{\theta 3}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m+1$; $\underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(k)}$, $\underset{\sim}{P}{}_{\theta\theta}^{(k)}$, $\underset{\sim}{P}{}_{33}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$; $P_{\theta\theta}^{(k)}$, $k = n+2, n+3, \ldots, m$; $\underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(k)}$, $k = n+1, n+2, \ldots, m+1$; v_s^-, v_θ^-, v_3^-, v_s^+, v_θ^+, v_3^+ виразимо через компоненти вектора Y і функції $\dfrac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $\dfrac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \theta}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, або вкажемо, як це можна зробити. Перша група формул складається з деформаційних співвідношень, що залишились:

$$e_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + \sin\varphi u_s^{(k)} + \cos\varphi u_3^{(k)}\right), \; k = 0, 1, \ldots, n;$$

$$e_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta} + \sin\varphi u_s^{(k)}\right), \; k = n+1, n+2, \ldots, m;$$

$$\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(k)} = -\frac{u_s^{(k)}}{2R_s} + \frac{2k+1}{4h}\sum_{p=k}^{m}\left[1-(-1)^{k+p}\right]u_s^{(p)}, \; k = n+1, n+2, \ldots, m-1;$$

$$\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(m)} = -\frac{u_s^{(m)}}{2R_s}, \; \underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(m+1)} = 0;$$

$$\underset{\wedge}{e}{}_{\theta 3}^{(k)} = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \theta} - \cos\varphi u_\theta^{(k)}\right) + \frac{2k+1}{4h}\sum_{p=k}^{m}\left[1-(-1)^{k+p}\right]u_\theta^{(p)}, \; k = 0, 1, \ldots, n;$$

$$\underset{\wedge}{e}{}_{\theta 3}^{(k)} = -\frac{\cos\varphi}{2r}u_\theta^{(k)} + \frac{2k+1}{4h}\sum_{p=k}^{m}\left[1-(-1)^{k+p}\right]u_\theta^{(p)}, \; k = n+1, n+2, \ldots, m-1;$$

$$\underset{\wedge}{e}{}_{\theta 3}^{(m)} = -\frac{\cos\varphi}{2r}u_\theta^{(m)}, \; \underset{\wedge}{e}{}_{\theta 3}^{(m+1)} = 0;$$

$$\underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(k)} = \frac{2k+1}{2h} \sum_{p=k}^{n} \left[1 - (-1)^{k+p} \right] u_3^{(p)}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1; \; \underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(n)} = \underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(n+1)} = 0. \quad (10)$$

Наведемо дві групи фізичних співвідношень, у лівих частинах яких фігурують компоненти вектора Y:

$$\underset{\sim}{P}{}_{ss}^{(k)} = \frac{2h}{2k+1} \Bigg\{ A_{11} e_{ss}^{(k)} + A_{12} e_{\theta\theta}^{(k)} + A_{13} \underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(k)} + 2A_{16} e_{s\theta}^{(k)} -$$

$$- \varepsilon_{n+1,k} \frac{A_{13}}{A_{33}} \sum_{p=0}^{n+1} \left[1 + (-1)^{k+p} \right] \times$$

$$\times \left(A_{13} e_{ss}^{(p)} + A_{23} e_{\theta\theta}^{(p)} + A_{33} \underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(p)} + 2A_{36} e_{s\theta}^{(p)} \right) \Bigg\},$$

$$k = 0, 1, \ldots, n+1;$$

$$P_{ss}^{(k)} = \frac{2h}{2k+1} \left(A_{11} e_{ss}^{(k)} + A_{12} e_{\theta\theta}^{(k)} + 2A_{16} e_{s\theta}^{(k)} \right), \; k = n+2, n+3, \ldots, m;$$

$$\underset{\sim}{P}{}_{s\theta}^{(k)} = \frac{2h}{2k+1} \Bigg\{ A_{16} e_{ss}^{(k)} + A_{26} e_{\theta\theta}^{(k)} + A_{36} \underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(k)} + 2A_{66} e_{s\theta}^{(k)} -$$

$$- \varepsilon_{n+1,k} \frac{A_{36}}{A_{33}} \sum_{p=0}^{n+1} \left[1 + (-1)^{k+p} \right] \times$$

$$\times \left(A_{13} e_{ss}^{(p)} + A_{23} e_{\theta\theta}^{(p)} + A_{33} \underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(p)} + 2A_{36} e_{s\theta}^{(p)} \right) \Bigg\},$$

$$k = 0, 1, \ldots, n+1;$$

$$P_{s\theta}^{(k)} = \frac{2h}{2k+1} \left(A_{16} e_{ss}^{(k)} + A_{26} e_{\theta\theta}^{(k)} + 2A_{66} e_{s\theta}^{(k)} \right), \; k = n+2, n+3, \ldots, m; \quad (11)$$

$$\underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(k)} = \frac{4h}{2k+1} \left\{ A_{55} \underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(k)} + A_{45} \underset{\wedge}{e}{}_{\theta 3}^{(k)} - \varepsilon_{m+1,k} \sum_{p=0}^{m} \left[1 + (-1)^{k+p} \right] \left(A_{55} \underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(p)} + A_{45} \underset{\wedge}{e}{}_{\theta 3}^{(p)} \right) \right\},$$

$$k = 0, 1, \ldots, n. \quad (12)$$

Уведемо позначення:

$i_1 = n$, $i_2 = n-1$, $i_3 = n$, $i_4 = n+1$, якщо n − парне,

$i_1 = n-1$, $i_2 = n$, $i_3 = n+1$, $i_4 = n$, якщо n − непарне,

$$C_s = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{16} \\ A_{16} & A_{66} \end{pmatrix}, \; C_s' = \begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{26} & A_{36} \end{pmatrix},$$

$$L_s = \frac{1}{A_{33}} \begin{pmatrix} A_{13}^2 & A_{13} A_{36} \\ A_{13} A_{36} & A_{36}^2 \end{pmatrix}, \; L_s' = \frac{1}{A_{33}} \begin{pmatrix} A_{13} A_{23} & A_{13} A_{33} \\ A_{23} A_{36} & A_{33} A_{36} \end{pmatrix},$$

$$e_s^{(k)} = \begin{pmatrix} e_{ss}^{(k)} \\ 2e_{s\theta}^{(k)} \end{pmatrix}, \; k = 0, 1, \ldots, m,$$

$$e_s'^{(k)} = \begin{pmatrix} e_{\theta\theta}^{(k)} \\ \underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(k)} \end{pmatrix}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1; \; e_s'^{(k)} = \begin{pmatrix} e_{\theta\theta}^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix}, \; k = n, n+1, \ldots, m,$$

$$P_s^{(k)} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{P}{}_{ss}^{(k)} \\ \underset{\sim}{P}{}_{s\theta}^{(k)} \end{pmatrix}, \; k = 0, 1, \ldots, n+1,$$

$$P_s^{(k)} = \begin{pmatrix} P_{ss}^{(k)} \\ P_{s\theta}^{(k)} \end{pmatrix}, \; k = n+2, n+3, \ldots, m.$$

Перепишемо співвідношення (11) у вигляді

$$C_s e_s^{(k)} - \varepsilon_{n+1,k} \sum_{p=0}^{n+1} \left[1 + (-1)^{k+p} \right] L_s e_s^{(p)} = \frac{2k+1}{2h} P_s^{(k)} -$$

$$- C_s' e_s'^{(k)} + \varepsilon_{n+1,k} \sum_{p=0}^{n+1} \left[1 + (-1)^{k+p} \right] L_s' e_s'^{(p)}, \; k = 0, 1, \ldots, n+1;$$

$$C_s e_s^{(k)} = \frac{2k+1}{2h} P_s^{(k)} - C_s{}' e_s'^{(k)}, \qquad k = n+2, n+3, \ldots, m.$$

Звідси знаходимо

$$e_s^{(k)} = C_s^{-1} \left\{ \frac{2k+1}{2h} P_s^{(k)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2h} \varepsilon_{n+1,k} L_s (C_s - L_s)^{-1} \sum_{p=0}^{i_j} \left[1 + (-1)^{i_j+p} \right] (2p+1) P_s^{(p)} - C_s' e_s'^{(k)} +$$

$$\left. + \varepsilon_{n+1,k} \left[L_s' - L_s (C_s - L_s)^{-1} (C_s' - L_s') \right] \sum_{p=0}^{i_j} \left[1 + (-1)^{i_j+p} \right] e_s'^{(p)} \right\},$$

$$k = \frac{1-(-1)^{i_j}}{2}, \frac{1-(-1)^{i_j}}{2} + 2, \ldots, i_j, \quad j = 3, 4,$$

$$e_s^{(k)} = C_s^{-1} \left(\frac{2k+1}{2h} P_s^{(k)} - C_s' e_s'^{(k)} \right), \quad k = n+2, n+3, \ldots, m. \tag{13}$$

З (12) маємо

$$\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(k)} = \frac{1}{4hA_{55}} \left\{ (2k+1) \underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(k)} + \frac{\varepsilon_{m+1,k}}{1 - 2\varepsilon'_{m+1,i_j+1}} \sum_{p=0}^{i_j} \left[1 + (-1)^{i_j+p} \right] (2p+1) \underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(p)} \right\} -$$

$$- \frac{A_{45}}{A_{55}} \underset{\wedge}{e}{}_{\theta 3}^{(k)} + \frac{\varepsilon_{m+1,k}}{1 - 2\varepsilon'_{m+1,i_j+1}} \sum_{p=i_j+2}^{m} \left[1 + (-1)^{i_j+p} \right] \left(\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(p)} + \frac{A_{45}}{A_{55}} \underset{\wedge}{e}{}_{\theta 3}^{(p)} \right),$$

$$k = \frac{1-(-1)^{i_j}}{2}, \frac{1-(-1)^{i_j}}{2} + 2, \ldots, i_j, \quad j = 1, 2. \tag{14}$$

Формули (13) і (14) мають смисл у написаному вигляді, якщо виконуються умови

$$\det C_s \neq 0, \; \det(C_s - L_s) \neq 0, \tag{15}$$

$$1 - 2\varepsilon'_{m+1,n} \neq 0, \text{ якщо } n > 0,$$

$$1 - 2\varepsilon'_{m+1,n+1} \neq 0, \text{ якщо } n \geq 0. \tag{16}$$

Умови (15) виконуються для криволінійно-ортотропної оболонки, у кожній точці якої є три площини пружної симетрії, перпендикулярні до координат s, θ, x_3. Умови (16) виконуються, якщо $m \geq n+1$.

Наведемо фізичні співвідношення, що залишились:

$$\underset{\sim}{P}{}_{\theta\theta}^{(k)}=\frac{2h}{2k+1}\Big\{A_{12}e_{ss}^{(k)}+A_{22}e_{\theta\theta}^{(k)}+A_{23}\,\underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(k)}+2A_{26}e_{s\theta}^{(k)}-$$

$$-\varepsilon_{n+1,k}\frac{A_{23}}{A_{33}}\sum_{p=0}^{n+1}\left[1+(-1)^{k+p}\right]\times$$

$$\times\left(A_{13}e_{ss}^{(p)}+A_{23}e_{\theta\theta}^{(p)}+A_{33}\,\underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(p)}+2A_{36}e_{s\theta}^{(p)}\right)\Big\},$$

$$k=0,1,\ldots,n+1\,;$$

$$P_{\theta\theta}^{(k)}=\frac{2h}{2k+1}\left(A_{12}e_{ss}^{(k)}+A_{22}e_{\theta\theta}^{(k)}+2A_{26}e_{s\theta}^{(k)}\right),\ \ k=n+2,n+3,\ldots,m\,;$$

$$\underset{\sim}{P}{}_{33}^{(k)}=\frac{2h}{2k+1}\Big\{A_{13}e_{ss}^{(k)}+A_{23}e_{\theta\theta}^{(k)}+A_{33}\,\underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(k)}+2A_{36}e_{s\theta}^{(k)}-$$

$$-\varepsilon_{n+1,k}\sum_{p=0}^{n+1}\left[1+(-1)^{k+p}\right]\left(A_{13}e_{ss}^{(p)}+A_{23}e_{\theta\theta}^{(p)}+A_{33}\,\underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(p)}+2A_{36}e_{s\theta}^{(p)}\right)\Big\},$$

$$k=0,1,\ldots,n+1\,;$$

$$\underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(k)}=\frac{4h}{2k+1}\left\{A_{55}\,\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(k)}+A_{45}\,\underset{\wedge}{e}{}_{\theta3}^{(k)}-\varepsilon_{m+1,k}\sum_{p=0}^{m}\left[1+(-1)^{k+p}\right]\left(A_{55}\,\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(p)}+A_{45}\,\underset{\wedge}{e}{}_{\theta3}^{(p)}\right)\right\},$$

$$k=n+1,n+2,\ldots,m+1\,;$$

$$\underset{\sim}{P}{}_{\theta3}^{(k)}=\frac{4h}{2k+1}\left\{A_{45}\,\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(k)}+A_{44}\,\underset{\wedge}{e}{}_{\theta3}^{(k)}-\varepsilon_{m+1,k}\sum_{p=0}^{m}\left[1+(-1)^{k+p}\right]\left(A_{45}\,\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(p)}+A_{44}\,\underset{\wedge}{e}{}_{\theta3}^{(p)}\right)\right\},$$

$$k=0,1,\ldots,m+1\,. \qquad (17)$$

Переміщення лицьових поверхонь виразимо формулами

$$u_s^-=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k u_s^{(k)}+v_s^-\,,\ \ s\Leftrightarrow\theta\,,\ \ u_3^-=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_3^{(k)}+v_3^-\,,$$

$$u_s^+=\sum_{k=0}^{m}u_s^{(k)}+v_s^+\,,\ \ s\Leftrightarrow\theta\,,\ \ u_3^+=\sum_{k=0}^{n}u_3^{(k)}+v_3^+\,,$$

де

$$v_s^-=\frac{2h}{(m+1)(m+2)(m+3)}\Big\{(-1)^{m+1}\left(B_{55}P_{3s}^{+}+B_{45}P_{3\theta}^{+}\right)-$$

$$-(m+2)\left(B_{55}P_{3s}^{-}+B_{45}P_{3\theta}^{-}\right)-$$

$$-2\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\left[(-1)^{k+m+1}-(m+2)\right]\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(k)}\Big\},$$

$$s\Leftrightarrow\theta\,,\ \ 4\Leftrightarrow5\,,$$

$$v_3^-=\frac{2h}{(n+1)(n+2)(n+3)A_{33}}\Big\{(-1)^{n+1}P_{33}^{+}-(n+2)P_{33}^{-}-$$

$$-\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\left[(-1)^{k+n+1}-(n+2)\right]\times$$

$$\times\left(A_{13}e_{ss}^{(k)}+A_{23}e_{\theta\theta}^{(k)}+A_{33}\,\underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(k)}+2A_{36}e_{s\theta}^{(k)}\right)\Big\},$$

$$v_s^+ = \frac{2h}{(m+1)(m+2)(m+3)}\Big\{(m+2)\left(B_{55}P_{3s}^+ + B_{45}P_{3\theta}^+\right) -$$

$$-(-1)^{m+1}\left(B_{55}P_{3s}^- + B_{45}P_{3\theta}^-\right) - 2\sum_{k=0}^{m}\left[m+2-(-1)^{k+m+1}\right]\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(k)}\Big\},$$

$$s \Leftrightarrow \theta\,,\ 4 \Leftrightarrow 5\,,$$

$$v_3^+ = \frac{2h}{(n+1)(n+2)(n+3)A_{33}}\Big\{(n+2)P_{33}^+ - (-1)^{n+1}P_{33}^- -$$

$$-\sum_{k=0}^{n+1}\left[n+2-(-1)^{k+n+1}\right]\times$$

$$\times\left(A_{13}e_{ss}^{(k)} + A_{23}e_{\theta\theta}^{(k)} + A_{33}\,\underset{\wedge}{e}{}_{33}^{(k)} + 2A_{36}e_{s\theta}^{(k)}\right)\Big\}. \qquad (18)$$

Символ $s \Leftrightarrow \theta$, $4 \Leftrightarrow 5$ означає, що формулі, після якої він слідує, відповідають дві формули: другу отримують з першої круговими замінами індексів s і θ та 4 й 5. Знак (–) або (+) при будь-якій з величин u_s, u_θ, u_3 вказує на те, що її обчислюють або при $x_3 = -h$, або при $x_3 = h$.

Унісши вирази (10) у ліві частини формул (13) і (14), отримаємо формули, що подають функції $e_{ss}^{(k)}$, $e_{s\theta}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, через компоненти вектора Y і функції $\dfrac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $\dfrac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \theta}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Підставивши їх, а також вирази (10) у праві частини формул (17) і (18), дістанемо формули, що подають функції $\underset{\sim}{P}{}_{\theta\theta}^{(k)}$, $\underset{\sim}{P}{}_{33}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$; $P_{\theta\theta}^{(k)}$, $k = n+2, n+3, \ldots, m$; $\underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(k)}$, $k = n+1, n+2, \ldots, m+1$; $\underset{\sim}{P}{}_{\theta 3}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m+1$; v_s^-, v_θ^-, v_3^-, v_s^+, v_θ^+, v_3^+ через компоненти вектора Y і функції $\dfrac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, $\dfrac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \theta}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Унісши в рівняння (7) вирази (17) з урахуванням формул (10), (13) і (14), а в рівняння (9) – вирази $e_{ss}^{(k)}$, $e_{s\theta}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $\underset{\wedge}{e}{}_{s3}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, з (13) і (14) з урахуванням формул (10), отримаємо систему рівнянь відносно компонент вектора Y. Позначимо її через (M). Функції $e_{s3}^{(k)}$, $e_{\theta 3}^{(k)}$, $P_{s3}^{(k)}$, $P_{\theta 3}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m+1$, $e_{33}^{(k)}$, $P_{ss}^{(k)}$, $P_{s\theta}^{(k)}$, $P_{\theta\theta}^{(k)}$, $P_{33}^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n+1$, можемо виразити через компоненти вектора Y і функції $\dfrac{\partial u_\theta^{(k)}}{\partial \theta}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, $\dfrac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \theta}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, використавши формули (5), (10), (13), (14), (17) і (18).

4. Граничні умови. Припустимо, що $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, де Γ_1 і Γ_2 – такі частини контуру Γ, що відповідно $s = \mathrm{const}$ і $\theta = \mathrm{const}$. Якщо маємо замкнуту оболонку, то частина Γ_2 відсутня. Без обмеження загальності сформулюємо граничні умови лише для Γ_1:

$$u_s^{(k)} = u_s^{*(k)} \quad \text{або} \quad \underset{\sim}{P}{}_{ss}^{(k)} = s_{ss}^{*(k)} - \overset{k}{X}_{ss}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n+1\,;$$

$$u_s^{(k)} = u_s^{*(k)} \quad \text{або} \quad P_{ss}^{(k)} = s_{ss}^{*(k)}\,, \qquad k = n+2, n+3, \ldots, m\,;$$

$$u_\theta^{(k)} = u_\theta^{*(k)} \quad \text{або} \quad \underset{\sim}{P}{}_{s\theta}^{(k)} = s_{s\theta}^{*(k)} - \overset{k}{X}_{s\theta}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n+1\,;$$

$$u_\theta^{(k)} = u_\theta^{*(k)} \quad \text{або} \quad P_{s\theta}^{(k)} = s_{s\theta}^{*(k)}\,, \qquad k = n+2, n+3, \ldots, m\,;$$

$$u_3^{(k)} = u_3^{*(k)} \quad \text{або} \quad \underset{\sim}{P}{}_{s3}^{(k)} = s_{s3}^{*(k)} - \overset{k}{X}_{s3}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, n\,, \tag{19}$$

де $u_s^{*(k)}$, $u_\theta^{*(k)}$, $s_{ss}^{*(k)}$, $s_{s\theta}^{*(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, m$; $u_3^{*(k)}$, $s_{s3}^{*(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, – задані функції на Γ_1.

Система рівнянь (7), (9), (10), (13), (14), (17) або еквівалентна їй система рівнянь (M) дають можливість розв'язувати задачі про напружено-деформований стан тонких анізотропних оболонок обертання, забезпечуючи виконання граничних умов на лицьових поверхнях (4), коли на Γ_1 задано умови (19), а на Γ_2 – умови, які тут не виписуватимемо, хоч це неважко зробити.

Висновки. На основі отриманих Б. Л. Пелехом і М. А. Сухорольським результатів побудовано систему диференціальних рівнянь, що описують пружну деформацію тонких анізотропних оболонок обертання, розв'язаних відносно частинних похідних першого порядку відносно координати по меридіану. Цю систему можна звести до нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою рядів Фур'є [20], або методу прямих [9], або сплайн-апроксимації [8], або, поклавши, що частинні похідні по коловій координаті рівні нулю. В останньому випадку отримаємо рівняння осесиметричної деформації оболонки обертання.

Чисельно розв'язати крайову задачу для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь можна методом ортогональної прогонки С. К. Годунова.

З побудованих рівнянь за певних значень геометричних параметрів випливає низка часткових випадків (рівняння кругової циліндричної оболонки, рівняння конічної оболонки тощо).

1. *Алексеев А. Е.* Двухпараметрическое семейство последовательных (M, N)-приближений уравнений упругого слоя переменной толщины // Прикл. механика и техн. физика. – 1996. – **37**, № 3. – С. 133–144.
   Те саме: *Alekseev A. E.* Two-parameter family of successive (M, N)-approximations of the equations of an elastic layer of variable thickness // J. Appl. Mech. Techn. Phys. – 1996. – **37**, No. 3. – P. 411–420.
2. *Бондаренко Н. С., Гольцев А. С.* Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае симметричного теплообмена // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2013. – № 2. – С. 20–26.
3. *Бондаренко Н. С.* Изотропная пластина с теплопроницаемым разрезом при действии температурных градиентов, приводящих к изгибу // Проблеми обчисл. механіки і міцності конструкцій. – 2014. – Вип. 23. – С. 52–63.
4. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – Москва: Наука, 1982. – 288 с.
5. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, № 3 (99). – С. 171–174.
6. *Григолюк Э. И., Куликов Г. М.* Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – Москва: Машиностроение, 1988. – 288 с.
7. *Григолюк Э. И., Шалашилин В. И.* Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. – Москва: Наука, 1988. – 232 с.

8. *Григоренко Я. М., Григоренко А. Я.* Задачи статики и динамики анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их численное решение (обзор) // Прикл. механика. – 2013. – **49**, № 2. – С. 3–70.
   Те саме: *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya.* Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, No. 2. – P. 123–193.
9. *Григоренко Я. М.* Некоторые подходы к исследованию деформирования гибких оболочек // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 2. – С. 152–165.
   Те саме: *Grigorenko Ya. M.* Some approaches to studying deformation of flexible shells // J. Math. Sci. – 2009. – **162**, No. 2. – P. 187–204.
10. *Лазько В. А.* Напряженно-деформированное состояние слоистых анизотропных оболочек при наличии зон неидеального контакта слоев. 2. Обобщенные уравнения ортотропных слоистых оболочек при разрывных перемещениях на границе раздела // Механика композит. материалов. – 1982. – № 1. – С. 77–84.
   Те саме: *Laz'ko V. A.* Stress-strain state of laminar anisotropic shells with the presence of zones of nonideal layer contact. 2. Generalized equations of orthotropic laminar shells subjected to discontinuous displacements at the interface // Mech. Compos. Mater. – 1982. – **18**, No. 1. – P. 63–69.
11. *Максимук О., Щербина Н.* Уточнений розрахунок напруженого стану скінченних оболонок з урахуванням залишкових деформацій // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математики та інформатики. – 2003. – Вип. 7. – С. 193–200.
12. *Марчук М. В., Хом'як М. М.* Схема змішаного методу скінченних елементів для дослідження задачі про міжшаровий контакт в уточненій постановці. Повідомлення 1. Основні співвідношення й загальна методика побудови розрахункових схем у рамках {m, n}-апроксимації // Проблемы прочности. – 2000. – № 2. – С. 118–127.
   Те саме: *Marchuk M. V., Khom'yak M. M.* Mixed finite-element method for the improved statement of the problem of interlayer contact. Part 1. Principal relations and the general procedure of construction of computational schemes in the {m, n}-approximation // Strength Mater. – 2000. – **32**, No. 2. – P. 187–194.
13. *Марчук М. В., Хом'як М. М.* Схема змішаного методу скінченних елементів для дослідження задачі про міжшаровий контакт в уточненій постановці. Повідомлення 2. Чисельне дослідження контактних напружень при згині шаруватих пластин // Проблемы прочности. – 2000. – № 2. – С. 128–135.
   Те саме: *Marchuk M. V., Khom'yak M. M.* Mixed finite-element method for the improved statement of the problem of interlayer contact. Part 2. Numerical analysis of contact bending stresses in layered plates // Strength Mater. – 2000. – **32**, No. 2. – P. 195–200.
14. *Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.
15. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 216 с.
16. *Пелех Б. Л., Сухорольский М. А.* Об одном методе аппроксимации функции и ее первой производной полиномами Лежандра и его приложениях // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 3. – С. 26–29.
17. *Пелех Б. Л., Сухорольський М. А.* Про один новий підхід до побудови теорії оболонок з врахуванням граничних умов на поверхнях // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 5. – С. 441–444.
18. *Рикардс Р. Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
19. *Сухорольський М. А.* Функціональні послідовності та ряди. – Львів: Растр-7, 2010. – 340 с.
20. *Хома И. Ю.* Обобщенная теория анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
21. *Jaiani G.* A model of layered prismatic shells // Continuum Mech. Thermodyn. – 2016. – **28**, No. 3. – P. 765–784.
22. *Meunargia T.* On the refined theories of elastic plates // Appl. Mathematics, Informatics, Mechanics. – 2014. – **19**, No. 1. – P. 53–67.
23. *Zhavoronok S. I.* On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I. N. Vekua type // Procedia Eng. – 2015. – **111**. – P. 888–895.

УРАВНЕНИЯ ТОНКИХ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ МЕТОДА {m, n}-АППРОКСИМАЦИИ

Построена система дифференциальных уравнений, описывающих упругую деформацию тонких анизотропных оболочек вращения, разрешенных относительно частных производных первого порядка относительно координаты по меридиану. Уравнения получены с помощью метода $\{m,n\}$-аппроксимации. Приближения неизвестных функций согласуются с силовыми граничными условиями на лицевых поверхностях.

THE EQUATIONS OF THIN ANISOTROPIC ELASTIC SHELLS OF REVOLUTION OF THE {m, n}-APPROXIMATION METHOD

The system of the differential equations describing an elastic deformation of thin anisotropic shells of revolution solved for the 1st order partial derivatives with respect to the coordinate of the meridian is constructed. The equations are obtained by the $\{m,n\}$-approximation method. The approximations of the unknown functions are consistent with the force boundary conditions on the facial surfaces.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.10.15