

ТЕРМОПРУЖНІСТЬ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ІЗ НИЗЬКОЮ ЗСУВНОЮ ЖОРСТКІСТЮ У ЛОКАЛЬНОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛІ

На основі зсувної моделі деформування тонкостінних елементів конструкцій розв'язано квазістатичну задачу термопружності для довгої циліндричної оболонки з кільцевим розподілом джерел тепла і тепловіддачею з поверхні. Для різних значень відношення модуля Юнга і модуля зсуву матеріалу оболонки досліджено термопружний стан оболонки в асимптотичному режимі нагрівання, за якого розрахункові величини досягають максимальних значень. Виконано числовий аналіз. Вказано можливість узагальнення результатів дослідження на скінченну кількість кілець нагрівання для різних значень їх ширини та потужності джерел тепла.

З огляду на широке впровадження в теплоенергетичні системи термопластикових труб часто постають проблеми розрахунку тонкостінних елементів конструкцій на міцність при значних температурних перепадах. Враховуючи деформативні особливості композитних полімерів і їх схильність до міжволоконних взаємозсувів, пропонуємо розрахунок зусиль і моментів у довгій циліндричній оболонці при змінному полі температур з урахуванням пружних деформацій зсуву. Ці деформації особливо відчутні у сотових трубах з полімерних матеріалів, що використовуються у теплокомунікаційних мережах і системах [6]. Очевидно, що конструкційним елементам з пустотами (це стосується, насамперед, пластикових труб великого діаметра із зовнішньою кільцевою намоткою) притаманні зсувні прояви, однак у роботі дотримані принципи однорідності та суцільності матеріалу оболонки, а наявність пустот у її стінці певною мірою виправдовує розгляд задачі у неklasичній постановці, тобто за зсувною моделлю пружного деформування. Аналогічну задачу за класичною моделлю (при відсутності зсувів) розглянуто в роботі [3]. Термопружний стан нерівномірно нагрітих шаруватих структур і термочутливих тіл обертання вивчено в працях [5, 8].

Метою роботи є побудова замкнутого розв'язку квазістатичної задачі термопружності для податливої до зсуву довгої циліндричної оболонки з осесиметричним розподілом джерел тепла і ньютонівською тепловіддачею з бічної поверхні у навколишнє середовище.

Формулювання задачі. Квазістатична задача термопружності для циліндричної оболонки радіуса R і товщиною стінки $2h$ з осьовою координатою $\xi \in (-\infty, \infty)$ при локальному розподілі теплових джерел $Q(x, \tau)$, $x \in [-a, a]$, де $x = \xi / R$, зводиться до розв'язання рівняння теплопровідності [2]

$$\frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} - \beta^2 T(x, \tau) = -\frac{R^2}{\alpha_t} Q(x, \tau) \quad (1)$$

і наступного розгляду рівняння прогинів $W(x, \tau)$ серединної поверхні оболонки з урахуванням міжшарових зсувів за моделлю С. П. Тимошенка [7]:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - 2g^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + 4k^4 W = 4k^4 \beta_t R \left(T - \varepsilon \frac{d^2 T}{dx^2} \right). \quad (2)$$

При цьому розв'язок рівняння (1) повинен задовольняти умову відсутності температури $T = T(x, \tau)$ на належній відстані від точки відліку, тобто $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, \tau) = 0$, умову парності $\partial T / \partial x = 0$ при $x = 0$ (у випадку симетричного розміщення джерел) та початкову умову $T(x, 0) = 0$, а розв'язок рівняння (2) – аналогічні умови відсутності прогинів на нескінченності, $\lim_{x \rightarrow \infty} W(x, \tau) = 0$, та умови симетрії розв'язку $\partial W / \partial x = \partial^3 W / \partial x^3 = 0$ при $x = 0$.

У наведених рівняннях температура оболонки усереднена за формулою $T(x, \tau) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h U(x, \tau, z) dz$, де $U(x, \tau, z)$ – різниця між температурою у довільній точці оболонки і температурою середовища, $z \in [-h, h]$ – нормальна до серединної поверхні координата, $\tau = t/(\alpha R^2)$ – безрозмірний часовий параметр, де t – реальний час; $\alpha = C_v \rho / \alpha_t$, C_v – питома теплоємність за незмінного об'єму V матеріалу, ρ – його густина, α_t – коефіцієнт теплопровідності, $\beta^2 = \alpha R^2 / (\alpha_t h)$, α – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні оболонки в оточуюче середовище, температуру якого вважаємо незмінною; $2g^2 = E / (k'G')$, $4k^4 = 3(1 - \nu^2)(R/h)^2$, $\varepsilon = g^2 / (2k^4)$, E – модуль Юнга, k' та G' – коефіцієнт і модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона, β_t – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу оболонки.

При малих товщинах оболонки ($h/R \ll 1$) кільцеві зусилля $N(x, \tau)$ і згинні моменти $M(x, \tau)$ за відомою функцією $W(x, \tau)$ подаємо формулами [7]

$$\begin{aligned} N(x, \tau) &= 2Eh(R^{-1}W(x, \tau) - \beta_t T(x, \tau)), \\ M(x, \tau) &= DR^{-2}(2g^2(W(x, \tau) - \beta_t RT(x, \tau)) - W''_{xx}(x, \tau)). \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $D = (2/3)Eh^3/(1 - \nu^2)$ – згинна жорсткість оболонки.

Для випадку симетричного розподілу джерел тепла сталої густини Q_0 , що діють у кільці $x \in [-a, a]$ оболонки в режимі часової функції Гевісайда одиничного стрибка, температурне поле визначається рівністю [3]

$$\begin{aligned} T(x, \tau) &= \frac{q_0}{4\beta^2\beta_t} \left[4 \left\{ 1 - f_0(x) - \frac{e^{-\beta^2\tau}}{\varphi_0(x)} \right\} + 2e^{-\beta^2\tau} (\operatorname{erfc}(x_1) \pm \operatorname{erfc}(x_2)) - \right. \\ &\quad \left. - e^{\beta(x+a)} \operatorname{erfc}(x_1^*) + e^{-\beta(x+a)} \operatorname{erfc}(x_2^*) \mp \right. \\ &\quad \left. \mp e^{\beta|x-a|} \operatorname{erfc}(x_3^*) \pm e^{-\beta|x-a|} \operatorname{erfc}(x_4^*) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

де верхні рядок і знак слід брати для $x \in [0, a]$, а нижні – для $x \in [a, \infty)$. Тут $q_0 = \alpha_t^{-1} \beta_t R^2 Q_0$, $f_0(x) = e^{-\beta a} \operatorname{ch}(\beta x)$, $\varphi_0(x) = \operatorname{sh}(\beta a) e^{-\beta x}$, $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \Phi(x)$, $\Phi(x)$ – інтеграл ймовірності від аргументів $x_1 = (x+a)/(2\sqrt{\tau})$, $x_2 = |x-a|/(2\sqrt{\tau})$ та $x_{1,2}^* = \beta\sqrt{\tau} \pm x_1$, $x_{3,4}^* = \beta\sqrt{\tau} \pm x_2$.

Метод розв'язування. Застосувавши до рівнянь (1) і (2) косинус-перетворення Фур'є за координатою x з урахуванням вказаних вище умов на нескінченності та умов парності функцій $T(x, \tau)$, $W(x, \tau)$, отримуємо розв'язок рівняння (2) у вигляді невластного інтеграла:

$$W(x, \tau) = \frac{8k^4 R g_0}{\pi \beta^2} \int_0^\infty \frac{(1 + \varepsilon s^2)(1 - \exp(-(s^2 + \beta^2)\tau))}{s(s^2 + \beta^2)(s^4 + 2g^2 s^2 + 4k^4)} \sin(as) \cos(xs) ds. \quad (5)$$

Розклавши раціональну частину підінтегрального виразу на прості дроби C_1/s , $C_2 s/(s^2 + \beta^2)$ та дріб $(C_3 s + C_4 s^3)/(s^4 + 2g^2 s^2 + 4k^4)$ із коефіцієнтами $C_1 = (2k^2 \beta)^{-2}$, $C_2 = (\beta^2 g^2 - 2k^4)(2\mu(k^2 \beta)^2)^{-1}$, $C_3 = -\mu^{-1}$, $C_4 = -\beta^2(4k^4 \mu)^{-1}$, де $\mu = 4k^4 - 2\beta^2 g^2 + \beta^4$, функцію прогину подамо як лінійну комбінацію невластних інтегралів $I_n(x)$ та $I_n^*(x, \tau)$, $n = 1, 2, 3, 4$:

$$W(x, \tau) = \frac{8k^4}{\pi} Rq_0 \sum_{n=1}^4 C_n (I_n(x) - I_n^*(x, \tau)). \quad (6)$$

Складова $W(x) = \frac{8k^4}{\pi} Rq_0 \sum_{n=1}^4 C_n I_n(x)$ суми визначає прогини в асимптотичному режимі нагрівання оболонки (при $\tau \rightarrow \infty$), а їх зміну у часі описує доданок $W^*(x, \tau) = -\frac{8k^4}{\pi} Rq_0 \sum_{n=1}^4 C_n I_n^*(x, \tau)$. При цьому абсолютно збіжні інтеграли $I_j(x)$, $I_j^*(x, \tau)$, $j = 1, 2$, такі ж, як у праці [3], а решта мають вигляд

$$I_3(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(as) \cos(xs)}{(s^2 + g^2)^2 \pm c^4} s ds, \quad I_3^*(x, \tau) = \int_0^{\infty} e^{-(s^2 + \beta^2)\tau} \frac{\sin(as) \cos(xs)}{(s^2 + g^2)^2 \pm c^4} s ds, \\ I_4(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(as) \cos(xs)}{(s^2 + g^2)^2 \pm c^4} s^3 ds, \quad I_4^*(x, \tau) = \int_0^{\infty} e^{-(s^2 + \beta^2)\tau} \frac{\sin(as) \cos(xs)}{(s^2 + g^2)^2 \pm c^4} s^3 ds, \quad (7)$$

де $c^4 = |4k^4 - g^4|$, причому знак «+» у знаменниках підінтегральних дробів слід брати для випадку $g < \sqrt{2}k$, а знак «-» – при $g > \sqrt{2}k$. Випадок $g = \sqrt{2}k$ розглянемо окремо.

Зауважимо, що збіжність інтегралів $I_j(x)$, $I_j^*(x, \tau)$, $j = 3, 4$, у (7) випливає з порівняння підінтегральних функцій у них з підінтегральними функціями в абсолютно збіжних інтегралах $I_j(x)$, $I_j^*(x, \tau)$, $j = 1, 2$.

Кінцеві вирази інтегралів (7) залежать від співвідношення параметрів g і k , що вимагає окремого розгляду трьох випадків:

- 1° $g < \sqrt{2}k$ – незначний взаємозсув шарів оболонки;
- 2° $g = \sqrt{2}k$ – малоімовірний виражений зсув шарів;
- 3° $g > \sqrt{2}k$ – матеріал оболонки суттєво податливий до зсуву.

Розглянемо ці випадки поведінки матеріалу оболонки порізно.

$$1^\circ) \quad g < \sqrt{2}k.$$

У цьому випадку інтеграл $I_3(x)$ визначається рівністю [4]

$$I_3(x) = \frac{\pi}{4c^2} [e^{-B_1(x+a)} \sin(B_2(x+a)) + e^{-B_1|x-a|} \sin(B_2|x-a|)], \quad (8)$$

де $B_{1,2} = \sqrt{(2k^2 \pm g^2)/2}$. З виразів підінтегральних функцій в інтегралах (7) випливає, що

$$I_4(x) = -\partial^2 I_3(x) / \partial a^2, \quad I_4^*(x, \tau) = -\partial^2 I_3^*(x, \tau) / \partial a^2. \quad (9)$$

Тоді з (8), опускаючи викладки, пов'язані з диференціюванням, отримуємо

$$I_4(x) = \frac{\pi}{4c^2} [(c^2 \cos(B_2(x+a)) - g^2 \sin(B_2(x+a)))e^{-B_1(x+a)} + \\ + (c^2 \cos(B_2(x-a)) - g^2 \sin(B_2|x-a|))e^{-B_1|x-a|}]. \quad (10)$$

Вираз для інтеграла $I_3^*(x, \tau)$ після перетворень запишемо через інтеграли ймовірності [1, 9] від комплексних величин:

$$I_3^*(x, \tau) = -\frac{\pi i}{4c^2} \left[\sum_{j=1}^4 (-1)^j \left(e^{-i\tau} \operatorname{erfc}(z_{2j-1}) - e^{i\tau} \operatorname{erfc}(z_{2j}) \right) - \right. \\ \left. - 4 [i f_1^*(x) \cos(c^2 \tau) + f_2^*(x) \sin(c^2 \tau)] \right] e^{-(\beta^2 + g^2)\tau}, \quad (11)$$

де $z_j = (B_1 \pm B_2 i)\sqrt{\tau} \pm x_1$, $j=1, 2, 3, 4$, $z_j = (B_1 \pm B_2 i)\sqrt{\tau} \pm x_2$, $j=5, 6, 7, 8$ ($i^2 = -1$).

Тут позначено

$$f_1^*(x) = \operatorname{ch}(B_1(x+a))\operatorname{sh}(B_2(x+a)) + \operatorname{ch}(B_1(x-a))\operatorname{sh}(B_2|x-a|),$$

$$f_2^*(x) = \operatorname{sh}(B_1(x+a))\operatorname{ch}(B_2(x+a)) + \operatorname{sh}(B_1|x-a|)\operatorname{ch}(B_2(x-a)).$$

Двічі продиференціювавши (11) за параметром a , згідно з другою з рівностей (9) приходимо до інтеграла

$$\begin{aligned} I_4^*(x, \tau) = & \pi e^{-(\beta^2+g^2)\tau} \left[\left(\frac{2k^2}{c^2} \cos(c^2\tau) - i \sin(c^2\tau) \right) f_1^*(x) + \right. \\ & + \left(\cos(c^2\tau) - \frac{2k^2}{c^2} i \sin(c^2\tau) \right) f_2^*(x) + \\ & \left. + \frac{i}{4\sqrt{\pi\tau}} \sum_{j=1}^4 (-1)^j \left(z_{2j-1} e^{-z_{2j-1}^2 - i\tau} - z_{2j} e^{-z_{2j}^2 + i\tau} \right) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

За формулою (6) з урахуванням (11) і (12) запишемо залежну від часу складову прогину:

$$\begin{aligned} W^*(x, \tau) = & -k^4 Rq_0 e^{-\beta^2\tau} \left\{ \left[\sum_{j=1}^2 (-1)^j (2C_1 \operatorname{erfc}(x_j) - C_2 \operatorname{erfc}(x_j^*)) + \right. \right. \\ & + C_2 \left(\sum_{j=3}^4 (-1)^j \operatorname{erfc}(x_j^*) + 2(e^{-\beta(x+a)} + e^{-\beta|x-a|}) \right) \left. \right] e^{-\beta^2\tau} - \\ & - 8c^{-2} \operatorname{Re} \left[(C_3 - 2C_4 k^2) (f_1^*(x) \cos(c^2\tau) - i f_2^*(x) \sin(c^2\tau)) - \right. \\ & - C_4 (c^2 f_2^*(x) \cos(c^2\tau) - 2ik^2 f_1^*(x) \sin(c^2\tau)) + \\ & + \frac{i}{4} \sum_{j=1}^4 \left(C_3 (e^{-i\tau} \operatorname{erfc} z_{2j-1} - e^{i\tau} \operatorname{erfc} z_{2j}) + \right. \\ & \left. \left. + c^2 C_4 \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \left(z_{2j-1} e^{-z_{2j-1}^2 - i\tau} - z_{2j} e^{-z_{2j}^2 + i\tau} \right) \right) \right] e^{-g^2\tau} \left. \right\}. \end{aligned}$$

Як впливає з виразу інтеграла (5), похідна від функції прогину за часом є додатною для усіх $\tau \in (0, \infty)$ і прямує до нуля при $\tau \rightarrow \infty$. Це означає, що значення прогинів в усіх точках оболонки монотонно зростають у часі і досягають своїх найвищих рівнів $W(x)$ в асимптотичному режимі нагріву. При цьому очевидно, що $\lim_{\tau \rightarrow \infty} W^*(x, \tau) = 0$. Таку ж особливість, як прогини, мають і кільцеві зусилля $N(x, \tau)$ та осьові моменти $M(x, \tau)$ (див. (3)), які в усіх випадках співвідношень параметрів g і k також досягають найбільших значень при $\tau \rightarrow \infty$. Тому формул для зусиль і моментів як функцій від часу не подаємо, а підсумкові дослідження розв'язку задачі для усіх трьох випадків виконаємо в асимптотичному режимі нагріву оболонки.

Таким чином, неперервна для всіх значень $x \in [0, \infty)$ функція прогинів (6) зростає в часі і при $\tau \rightarrow \infty$ з урахуванням інтегралів $I_j(x)$, $j=1, 2, 3, 4$, набуває вигляду

$$\begin{aligned} W(x) = & \frac{Rq_0}{\beta^2} \left(\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right\} + 2(\beta^2 g^2 - 2k^4) \frac{1}{\mu} \left\{ \begin{array}{l} f_0(x) \\ -\varphi_0(x) \end{array} \right\} - \right. \\ & \left. - \frac{4k^4 \beta^2}{c^2 \mu} \left\{ \begin{array}{l} f_1(x) \\ f_3(x) \end{array} \right\} + \frac{\beta^4}{\mu} \left\{ \begin{array}{l} -f_2(x) \\ f_4(x) \end{array} \right\} \right), \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in [0, a] \\ x \in [a, \infty) \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

де функції $f_j(x)$, $j=1, 2, 3, 4$, визначаються за такими формулами:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= e^{-B_1 a} (\sin(B_2 a) \cos(B_2 x) \operatorname{ch}(B_1 x) - \cos(B_2 a) \sin(B_2 x) \operatorname{sh}(B_1 x)), \\
f_2(x) &= e^{-B_1 a} (\cos(B_2 a) \cos(B_2 x) \operatorname{ch}(B_1 x) + \sin(B_2 a) \sin(B_2 x) \operatorname{sh}(B_1 x)), \\
f_3(x) &= e^{-B_1 x} (\cos(B_2 a) \sin(B_2 x) \operatorname{ch}(B_1 a) - \sin(B_2 a) \cos(B_2 x) \operatorname{sh}(B_1 a)), \\
f_4(x) &= e^{-B_1 x} (\cos(B_2 a) \cos(B_2 x) \operatorname{sh}(B_1 a) + \sin(B_2 a) \sin(B_2 x) \operatorname{ch}(B_1 a)). \quad (14)
\end{aligned}$$

Асимптотичний вираз для температурного поля при $\tau \rightarrow \infty$ отримуємо з (4):

$$T(x) = \frac{q_0}{\beta^2 \beta_\tau} \begin{cases} 1 - f_0(x), & x \in [0, a], \\ \varphi_0(x), & x \in [a, \infty), \end{cases}$$

а за формулами (3) з урахуванням формули (13) для прогинів знаходимо відповідні усталені значення зусиль і моментів:

$$N(x) = \frac{2Eh\beta^2 q_0}{\mu} \left(\begin{cases} f_0(x) \\ -\varphi_0(x) \end{cases} - \frac{4k^4}{\beta^2 c^2} \begin{cases} f_1(x) \\ f_3(x) \end{cases} + \begin{cases} -f_2(x) \\ f_4(x) \end{cases} \right), \quad \begin{cases} x \in [0, a] \\ x \in [a, \infty) \end{cases}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
M(x) &= \frac{Dq_0}{\mu R} \left(\begin{cases} f_0(x) \\ -\varphi_0(x) \end{cases} + \frac{4k^4(\beta^2 - g^2) - \beta^2 g^4}{4k^4 c^2} \begin{cases} f_1(x) \\ f_3(x) \end{cases} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{4k^4 + \beta^2 g^2}{4k^4} \begin{cases} -f_2(x) \\ f_4(x) \end{cases} \right), \quad \begin{cases} x \in [0, a] \\ x \in [a, \infty) \end{cases}. \quad (16)
\end{aligned}$$

З виразів (14) неважко переконатися, що з огляду на рівності $f_1(a) = f_3(a)$, $f_2(a) + f_4(a) = 1$ і властивості функції прогинів зусилля і моменти при $x = a$ неперервні, а їх значення асимптотично прямують до нуля при $x \rightarrow \infty$.

Крім того, при $g = 0$ формули (13), (15) і (16) збігаються із формулами, отриманими раніше [3] при розв'язуванні аналогічної задачі у класичній постановці (без урахування взаємозсувів шарів оболонки).

$$2^\circ) \quad g = \sqrt{2}k.$$

Розкладаючи в інтегралі (5) відповідний цьому випадкові дріб на прості дроби C_1^*/s , $C_2^*s/(s^2 + \beta^2)$, $C_3^*s/(s^2 + 2k^2)$, $C_4^*s/(s^2 + 2k^2)^2$ з коефіцієнтами $C_1^* = C_1$, $C_2^* = (\beta^2 - k^2)(\beta k \gamma_\beta^2)^{-2}$, $C_3^* = -0.5(k^2 \gamma_\beta)^{-2}$, $C_4^* = -(2k^2 \gamma_\beta^2)^{-1}$, де $\gamma_\beta^2 = 2k^2 - \beta^2$, переконуємося у тому, що інтеграли $I_3(x)$ та $I_3^*(x, \tau)$ співпадають з інтегралами $I_2(x)$ та $I_2^*(x, \tau)$, якщо у знаменниках підінтегральних дробів у $I_2(x)$ та $I_2^*(x, \tau)$ параметр β замінити на $\sqrt{2}k$. Таким чином, маємо

$$I_3(x) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} e^{-\sqrt{2}ak} \operatorname{ch}(\sqrt{2}kx), & x \in [0, a], \\ -e^{-\sqrt{2}kx} \operatorname{sh}(\sqrt{2}ak), & x \in [a, \infty), \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
I_3^*(x, \tau) &= \frac{\pi}{8} e^{-(2k^2 + \beta^2)\tau} \left[2 \left(e^{-\sqrt{2}k(x-a)} + e^{-\sqrt{2}k|x-a|} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^2 (-1)^j \operatorname{erfc}(x_{jk}^*) + \sum_{j=3}^4 (-1)^j \operatorname{erfc}(x_{jk}^*) \right], \quad (18)
\end{aligned}$$

де через x_{jk}^* позначено змінні x_j^* , у виразах для яких покладаємо $\beta = \sqrt{2}k$.

Зазначимо, що $I_4(x)$ та $I_4^*(x, \tau)$ з точністю до множника $-(4k)^{-1}$ є похідними за параметром k від $I_3(x)$ та $I_3^*(x, \tau)$ відповідно:

$$I_4(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{8k} \begin{cases} e^{-\sqrt{2ak}} (a \operatorname{ch}(\sqrt{2kx}) - x \operatorname{sh}(\sqrt{2kx})), & x \in [0, a], \\ e^{-\sqrt{2kx}} (a \operatorname{ch}(\sqrt{2ak}) - x \operatorname{sh}(\sqrt{2ak})), & x \in [a, \infty), \end{cases} \quad (19)$$

$$I_4^*(x, \tau) = k\tau I_3^*(x, \tau) + \frac{\sqrt{2\pi}}{16k} \left[(x+a)e^{-\sqrt{2k}(x+a)} + |x-a|e^{-\sqrt{2k}|x-a|} - \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left(\sum_{j=1}^2 (-1)^j e^{-x_{jk}^{*2}} - \sum_{j=3}^4 (-1)^j e^{-x_{jk}^{*2}} \right) \right] e^{-(2k^2 + \beta^2)\tau}. \quad (20)$$

Підставивши у (6) вирази для інтегралів $I_j^*(x, \tau)$, $j = 1, 2$, з [3] і вирази (18), (20) для інтегралів $I_j^*(x, \tau)$, $j = 3, 4$, отримуємо залежну від часу складову прогину $W^*(x, \tau)$, формулу для якої не наводимо.

Функція прогину в асимптотичному режимі з урахуванням інтегралів $I_j(x)$, $j = 1, 2$, з [3] та формул (17), (19) для $I_j(x)$, $j = 3, 4$, має вигляд

$$W(x) = \frac{Rq_0}{\beta^2} \left(\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} - \frac{4k^2(k^2 - \beta^2)}{\gamma_\beta^4} \begin{cases} f_0(x) \\ -\varphi_0(x) \end{cases} - \frac{2\beta^2}{\gamma_\beta^2} \begin{cases} \psi_1(x) \\ -\psi_3(x) \end{cases} - \frac{\sqrt{2}\beta^2 k}{2\gamma_\beta^2} \begin{cases} \psi_2(x) \\ \psi_4(x) \end{cases} \right), \quad \begin{cases} x \in [0, a] \\ x \in [a, \infty) \end{cases},$$

де позначено

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= e^{-\sqrt{2ak}} \operatorname{ch}(\sqrt{2kx}), & \psi_2(x) &= e^{-\sqrt{2ak}} [a \operatorname{ch}(\sqrt{2kx}) - x \operatorname{sh}(\sqrt{2kx})], \\ \psi_3(x) &= e^{-\sqrt{2kx}} \operatorname{sh}(\sqrt{2ak}), & \psi_4(x) &= e^{-\sqrt{2kx}} [a \operatorname{ch}(\sqrt{2ak}) - x \operatorname{sh}(\sqrt{2ak})]. \end{aligned}$$

Відповідні для цього випадку формули зусиль і моментів в асимптотичному режимі є такими:

$$N(x) = \frac{2Eh\beta^2 q_0}{\gamma_\beta^4} \left(\begin{cases} f_0(x) \\ -\varphi_0(x) \end{cases} - 2 \frac{\gamma_\beta^2}{\beta^2} \begin{cases} \psi_1(x) \\ -\psi_3(x) \end{cases} - \frac{\sqrt{2}k\gamma_\beta^2}{2\beta^2} \begin{cases} \psi_2(x) \\ \psi_4(x) \end{cases} \right), \quad \begin{cases} x \in [0, a] \\ x \in [a, \infty) \end{cases}, \quad (21)$$

$$M(x) = \frac{4k^2\beta^2 Dq_0}{\gamma_\beta^4 R} \left(\begin{cases} f_0(x) \\ -\varphi_0(x) \end{cases} - \frac{3\gamma_\beta^2}{2\beta^2} \begin{cases} \psi_1(x) \\ -\psi_3(x) \end{cases} - \frac{\sqrt{2}k\gamma_\beta^2}{4\beta^2} \begin{cases} \psi_2(x) \\ \psi_4(x) \end{cases} \right), \quad \begin{cases} x \in [0, a] \\ x \in [a, \infty) \end{cases}. \quad (22)$$

3°) $g > \sqrt{2k}$.

У цьому випадку раціональна частина підінтегрального дробу в (5) повністю розкладається на елементарні дроби з пропорційними до знайдених у випадках 1°, 2° коефіцієнтами C_j , $j = 1, 2, 3, 4$, при цьому вирази для інтегралів $I_j(x)$, $I_j^*(x, \tau)$, $j = 1, 2$, залишаються незмінними, а інтеграли $I_3(x)$ та $I_3^*(x, \tau)$ набувають вигляду

$$I_3(x) = \frac{\pi}{4c^2} \begin{cases} -e^{-ag_1} \operatorname{ch}(g_1 x) + e^{-ag_2} \operatorname{ch}(g_2 x), & x \in [0, a], \\ e^{-g_1 x} \operatorname{sh}(ag_1) - e^{-g_2 x} \operatorname{sh}(ag_2), & x \in [a, \infty), \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
I_3^*(x, \tau) = & \frac{\pi}{16c^2} e^{-\beta^2 \tau} \sum_{j=1}^2 (-1)^j e^{-g_j^2 \tau} [2(\operatorname{sh}(g_j(x+a)) - \operatorname{sh}(g_j|x-a|)) + \\
& + \operatorname{erfc}(g_j \sqrt{\tau} + x_1) - \operatorname{erfc}(g_j \sqrt{\tau} - x_1) - \\
& - \operatorname{erfc}(g_j \sqrt{\tau} + x_2) + \operatorname{erfc}(g_j \sqrt{\tau} - x_2)], \quad (24)
\end{aligned}$$

де $c^2 = \sqrt{g^4 - 4k^4}$, $g_{1,2}^2 = g^2 \pm c^2$.

Як і у випадку I^0 , інтеграли $I_4(x)$ та $I_4^*(x, \tau)$ визначаються (див. (9)) як похідні другого порядку за параметром a від інтегралів $I_3(x)$ та $I_3^*(x, \tau)$. Опускаючи викладки, знаходимо

$$I_4(x) = \frac{\pi}{4c^2} \begin{cases} g_1^2 e^{-ag_1} \operatorname{ch}(g_1 x) - g_2^2 e^{-ag_2} \operatorname{ch}(g_2 x), & x \in [0, a], \\ -g_1^2 \operatorname{sh}(ag_1) e^{-g_1 x} + g_2^2 \operatorname{sh}(ag_2) e^{-g_2 x}, & x \in [a, \infty), \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
I_4^*(x, \tau) = & \frac{\pi}{16c^2} e^{-\beta^2 \tau} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} e^{-g_j^2 \tau} \left[2g_j^2 [\operatorname{sh}(g_j(x+a)) - \operatorname{sh}(g_j|x-a|)] + \right. \\
& + \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \left(e^{-x_1^2} \left(\frac{x_1}{\sqrt{\tau}} \operatorname{ch}(g_j(x+a)) - g_j \operatorname{sh}(g_j(x+a)) \right) - \right. \\
& \left. \left. - e^{-x_2^2} \left(\frac{x_2}{\sqrt{\tau}} \operatorname{ch}(g_j(x-a)) - g_j \operatorname{sh}(g_j|x-a|) \right) \right) \right]. \quad (26)
\end{aligned}$$

З рівності (6) і виразів для інтегралів $I_j^*(x, \tau)$, $j = 1, 2$, з [3], а також формул (24), (26) для інтегралів $I_j^*(x, \tau)$, $j = 3, 4$, можемо отримати складову прогину $W^*(x, \tau)$, вираз для якої не наводимо.

Формула для прогинів в асимптотичному режимі має вигляд

$$\begin{aligned}
W(x) = & \frac{Rq_0}{\beta^2} \left(\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\} - 2 \frac{2k^2 - \beta^2 g^2}{\mu} \left\{ \begin{array}{c} f_0(x) \\ -\varphi_0(x) \end{array} \right\} - \right. \\
& \left. - \frac{\beta^2}{2c^2 \mu} \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_j \left\{ \begin{array}{c} \chi_j(x) \\ \varphi_j(x) \end{array} \right\} \right), \quad \begin{cases} x \in [0, a] \\ x \in [a, \infty) \end{cases},
\end{aligned}$$

а відповідні кільцеві зусилля та осьові моменти у цьому випадку є такими:

$$\begin{aligned}
N(x) = & \frac{2Eh\beta^2 q_0}{\mu} \left(\left\{ \begin{array}{c} f_0(x) \\ -\varphi_0(x) \end{array} \right\} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2\beta^2 c^2} \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_j \left\{ \begin{array}{c} \chi_j(x) \\ -\varphi_j(x) \end{array} \right\} \right), \quad \begin{cases} x \in [0, a] \\ x \in [a, \infty) \end{cases}, \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(x) = & \frac{Dq_0}{R\mu} \left(\left\{ \begin{array}{c} f_0(x) \\ -\varphi_0(x) \end{array} \right\} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^2 (-1)^j a_j (2g^2 - g_j^2) \left\{ \begin{array}{c} \chi_j(x) \\ -\varphi_j(x) \end{array} \right\} \right), \quad \begin{cases} x \in [0, a] \\ x \in [a, \infty) \end{cases}, \quad (28)
\end{aligned}$$

де

$$a_j = 4k^4 - (4g^2 - \beta^2)g_j^2, \quad \chi_j(x) = e^{-ag_j} \operatorname{ch}(g_j x), \quad \varphi_j(x) = \operatorname{sh}(ag_j) e^{-g_j x}, \\
j = 1, 2.$$

Зауважимо, що для усіх співвідношень параметрів g і k відповідні однокільцевому розподілу джерел результати за допомогою суперпозиції можна перенести на випадок n -кільцевого нагріву оболонки джерелами, які діють у режимі функції Гевісайда на проміжках (поясах) ширини $2a$, і узагальнити отримані розв'язки на скінченну кількість кілець довільної ширини $2a_n$ з різною інтенсивністю джерел $Q_n = \text{const}$, у тому числі й від'ємної потужності (охолоджувачі). Вирази для температури, зусиль і згинних моментів, а також їх графіки для двокільцевого ($n = 2$) нагріву за класичної моделі деформування оболонки подано в праці [3]. З огляду на аналогію результатів таких суперпозицій тут не наводимо.

Вплив ступеня податливості до зсуву довгої циліндричної оболонки при локальному її нагріві джерелами тепла на кільцеві зусилля та осьові моменти дослідимо за різних відношень модулів Юнга і зсуву: $E/G' = 40$ (при $g < \sqrt{2}k$), $E/G' \approx 55$ (при $g = \sqrt{2}k$), $E/G' = 60$ (при $g > \sqrt{2}k$). Здійснено порівняльний аналіз отриманих результатів з результатами, що відповідають класичній моделі деформування оболонки ($E/G' = 0$) при $a = 0.2$. Встановлено, що максимальних значень зусиль і моменти досягають в асимптотичному режимі нагріву при $\tau \rightarrow \infty$. З огляду на це за формулами (15), (21), (27) і (16), (22), (28) для оболонки з відношенням $R/h = 20$ ($R = 0.1\text{ м}$) та характеристиками матеріалу $\nu = 0.3$, $k' = 5/6$, $\beta = 1.523$ побудовано графіки відносних кільцевих зусиль $N^*(x) = N(x)/q_0^*$ (рис. 1) та осьових моментів $M^*(x) = M(x)/(Rq_0^*)$ (рис. 2), де $q_0^* = 2\beta^2 E h q_0$.

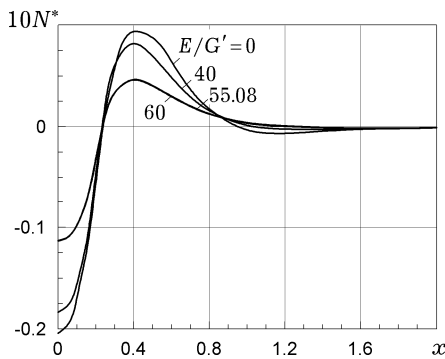


Рис. 1

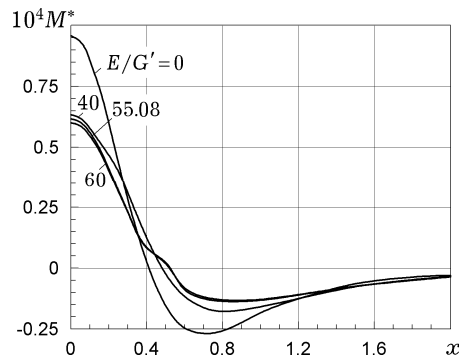


Рис. 2

З аналізу числових результатів випливає, що зі збільшенням відношення E/G' кільцеві зусилля (стиску) поблизу їх максимальних значень у зоні нагріву знижуються і становлять $82 \div 90\%$ (при $E/G' = 40$) і $55 \div 57\%$ (при $E/G' \approx 55$ і $E/G' = 60$) від відповідного класичному варіанту рівня ($E/G' = 0$). При значенні осьової координати $x = 2$, тобто на відстані діаметра оболонки від початку відліку, зусилля і моменти практично зникають, однак за істотних зсувів матеріалу (випадки 2°, 3°) збіжність їх значень виражена дещо слабше, аніж, коли $g < \sqrt{2}k$ (випадок 1°): наприклад, при $x = 2$ маємо $N|_{E/G'=60} / N|_{E/G'=0} = 1.6$. Що стосується осьових моментів, то аналогічні вказаним для кільцевих зусиль відношенням E/G' їх значення становлять $66 \div 78$, $64 \div 69$ та $62 \div 67\%$ від відповідного рівня, який досягається за класичної моделі деформування оболонки ($E/G' = 0$).

Крім того, числовий аналіз свідчить про те, що навіть для таких незначних зсувів, як $E/G' = 2$ та $E/G' = 5$ максимальні зусилля знижуються на 3 та 7% відповідно, а зі збільшенням товщини оболонки зсувний ефект проявляється ще відчутніше.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. – Т. 1. – Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. – Москва: Наука, 1969. – 343 с.
2. Болотин В. В. Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // Прикл. математика и механика. – 1960. – 24, № 2. – С. 361–363.
3. Ганулич В. К., Максимук О. В., Ганулич Н. В. Квазистатична задача термопружності для циліндричної оболонки із джерелами тепла і тепловіддачею // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – 58, № 1. – С. 154–161.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.
5. Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б. Термопружний стан шаруватих термочутливих тіл обертання за квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – 46, № 1. – С. 7–18.
Те саме: Kushnir R. M., Protsyuk Yu. B. Thermoelastic state of layered thermosensitive bodies of revolution for the quadratic dependence of the heat-conduction coefficients // Mater. Sci. – 2010. – 46, No. 1. – P. 1–15.
6. Максимук А. В., Щербина Н. Н., Ганулич Н. В. Проектирование, расчет и оптимизация сотовых труб из полимерных материалов // Механика композит. материалов. – 2008. – 44, № 6. – С. 853–860.
7. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
8. Oguamanam D. C. D., Hansen J. S., Hepler G. R. Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2004. – 71, No. 1. – P. 49–56.
9. Olver Frank W. J. et al. (Eds). NIST Handbook of mathematical functions. – New York: Cambridge Univ. Press, 2010. – 968 p.

ТЕРМОУПРУГОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С НИЗКОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ В ЛОКАЛЬНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

На основе сдвиговой модели деформирования тонкостенных элементов конструкций решена квазистатическая задача термоупругости для длинной цилиндрической оболочки с кольцевым распределением источников тепла и теплоотдачей с поверхности. Для различных значений отношения модуля Юнга и модуля сдвига материала оболочки исследовано термоупругое состояние оболочки в асимптотическом режиме нагрева, когда расчетные величины достигают максимальных значений. Выполнен численный анализ. Указана возможность обобщения результатов исследования на конечное число колец нагрева для различных значений их ширины и мощности источников тепла.

THERMOELASTICITY OF CYLINDRICAL SHELL WITH LOW SHEAR STRENGTH IN LOCAL TEMPERATURE FIELD

Based on the shear deformation model of thin-walled elements of structure the quasi-static problem of thermoelasticity is solved for a long cylindrical shell with an annular distribution of heat sources and heat transfer from its surface. For different values of ratio of Young's modulus and the shear modulus of the shell material the thermoelastic state of the shell is studied in the asymptotic heating mode when the calculated values reach their maximum values. The numerical analysis is carried out. The possibility of generalizing the results of research on a finite number of heating rings at different values of their width and heat sources intensity is stated.

¹ Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.08.15