УДК 519.6

І. А. Чир[1], Г. А. Шинкаренко[1,2]

КОРЕКТНІСТЬ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ДИНАМІЧНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ҐРІНА – ЛІНДСЕЯ

На основі початково-крайової задачі динамічної термопружності Ґріна – Ліндсея сформульовано відповідну їй варіаційну задачу в термінах зміщень і температури. Достатні умови регулярності вхідних даних задачі, а також єдиність її розв'язку встановлено з енергетичного рівняння варіаційної задачі. Для доведення існування узагальненого розв'язку (і паралельно, як перший крок до обґрунтованої процедури обчислення його апроксимації) використано напівдискретизацію Гальоркіна за просторовими змінними і показано, що границя послідовності її наближень є розв'язком варіаційної задачі Ґріна – Ліндсея.

Здебільшого взаємодію механічного та теплового полів у пружних тілах описують системою рівнянь класичної термопружності (див., наприклад, [2, розд. 2; 15]), яка пов'язує гіперболічні рівняння руху та параболічне рівняння теплопровідності. Однак для опису технологічних процесів із високоенергетичним короткочасним імпульсним тепловим навантаженням [9] у рамках узагальненої термомеханіки [5] запропоновано моделі, що враховують хвильову природу поширення тепла і його скінченну швидкість (з рівнянням теплопровідності гіперболічного типу (див. огляд [8])). Системи рівнянь узагальненої теорії динамічної термопружності для практичного моделювання подібних процесів побудовано в [11, 12, с. 1–29, 13].

Дослідження однієї із таких моделей, а саме моделі Ґріна – Ліндсея динамічної термопружності [14], організуємо так: у **п. 1** описуємо основні рівняння вказаної системи в термінах зміщень і температури, властивості її складових частин та доповнюємо ці рівняння можливими крайовими та початковими умовами. У **пп. 2, 3** подаємо варіаційне формулювання задачі та характеризуємо її складові щодо неперервності та еліптичності. Спираючись на них, у **п. 4** одержуємо важливий інструмент дослідження варіаційної задачі – конкретизоване енергетичне рівняння. Оцінка його правої частини дає можливість встановити (цілком придатні до застосувань) умови регулярності вхідних даних задачі, які ґарантують єдиність та стійкість її розв'язку. Для доведення існування розв'язку задачі (**п. 6)** використовуємо напівдискретизацію Гальоркіна за просторовими змінними. Будуючи подібно енергетичне рівняння напівдискретизованої задачі та відповідні апріорні оцінки, в **п. 9** доводимо теорему про коректність варіаційної задачі.

1. Основні співвідношення та позначення. Нехай пружне тіло, що займає обмежену зв'язну область Ω точок $x = (x_1, \ldots, x_d)$ d-вимірного евклідового простору $\Re^d$ (де $d = 2$ або 3) з неперервною за Ліпшицем границею Γ, деформується зі зміною часу $t \in [0, T]$, $0 < T < +\infty$, під дією об'ємних сил $f(x,t) = (f_1(x,t), \ldots, f_d(x,t))$, поверхневих навантажень $\widehat{\sigma}(x,t) = (\widehat{\sigma}_1(x,t), \ldots, \widehat{\sigma}_d(x,t))$ і внутрішніх джерел тепла інтенсивністю $w(x,t)$. Для дослідження закономірностей деформування таких тіл достатньо визначити приріст температури $\theta(x,t)$ відносно початкової T_0 і вектор пружних зміщень $u(x,t) = (u_1(x,t), \ldots, u_d(x,t))$, який (у лінійному наближенні) задовольняє систему рівнянь динамічної термопружності Ґріна – Ліндсея [11], до якої входять:

– *рівняння руху*

$$\rho(u_i'' - f_i) - \sigma_{ji,j} = 0 \qquad \text{в} \qquad \Omega \times (0, T]; \tag{1}$$

– *теплопровідності*

$$\rho c_E(\theta + t_0\theta')' + q_{i,i} + T_0\gamma_{ij}\varepsilon_{ij}(u') = w \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T]; \qquad (2)$$

– *рівняння стану*

$$\sigma_{ji}(u, \theta + t_1\theta') = c_{ijkm}\varepsilon_{km}(u) - \gamma_{ij}(\theta + t_1\theta') + a_{ijkm}\varepsilon_{km}(u'),$$

$$q_i(\theta) = -\lambda_{ij}\theta_{,j} \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T]; \qquad (3)$$

– *співвідношення Коші*

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T]; \qquad (4)$$

а також *крайові*

$$u_i = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_u \times [0,T], \quad \Gamma_u \subset \Gamma, \quad \text{mes}(\Gamma_u) > 0,$$

$$\sigma_{ij}n_j = \hat{\sigma}_i \quad \text{на} \quad \Gamma_\sigma \times [0,T], \quad \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_u,$$

$$\theta = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\theta \times [0,T], \quad \Gamma_\theta \subset \Gamma, \quad \text{mes}(\Gamma_\theta) > 0,$$

$$q_i n_i = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_h \times [0,T], \quad \Gamma_h = \Gamma \setminus \Gamma_\theta, \qquad (5)$$

і *початкові умови*

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u'|_{t=0} = v_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \theta'|_{t=0} = \pi_0 \quad \text{в} \quad \Omega. \qquad (6)$$

Тут $\rho(x)$ – густина тіла, механічні та теплові характеристики якого описуються

– коефіцієнтами пружності c_{ijkm} та в'язкості a_{ijkm} зі звичайними (див. [7, с. 64]) властивостями симетрії та еліптичності:

$$c_{ijkm} = c_{jikm} = c_{kmij}, \qquad a_{ijkm} = a_{jikm} = a_{kmij},$$

$$c_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \ge c_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad c_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in \Re,$$

$$a_{ijkm}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{km} \ge a_0\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad a_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \in \Re;$$

– коефіцієнтами об'ємної теплоємності за сталої деформації

$$c_E = c_E(x) > 0;$$

– коефіцієнтами теплопровідності

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji},$$

$$\lambda_{ij}\xi_i\xi_j \ge \lambda_0\xi_i\xi_i, \quad \lambda_0 = \text{const} > 0, \quad \forall \xi_i \in \Re;$$

– коефіцієнтами теплового розширення

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji},$$

$$\alpha_{ij}\xi_i\xi_j \ge \alpha_0\xi_i\xi_i, \quad \alpha_0 = \text{const} > 0 \quad \forall \xi_i \in \Re;$$

– коефіцієнтами температурних напружень

$$\gamma_{ij} = c_{ijkm}\alpha_{km}.$$

Параметри t_0 і t_1 мають розмірність часу і задовольняють умову

$$t_1 \ge t_0 > 0.$$

Тут і нижче, якщо не вказано спеціально, за індексами, які повторюються, передбачається підсумовування від 1 до d, $n = (n_1, \ldots, n_d)$ – вектор одиничної зовнішньої нормалі до границі Γ, $\varphi' = \partial\varphi/\partial t$, $\varphi'' = \partial^2\varphi/\partial t^2$, $\varphi_{,k} = \partial\varphi/\partial x_k$ тощо.

Рівняння (1)–(6) описують лінійну початково-крайову задачу динамічної термопружності Ґріна – Ліндсея, яку досліджуватимемо варіаційними методами. Якщо в (2), (3) і (6) покласти $t_0 = t_1 = 0$, то дістанемо класичну задачу термопружності [12, с. 76], яку досліджували раніше [4].

Зауваження. Параметри t_0 і t_1 ще називають часами релаксації, а процес (1)–(6) – термопружним з двома часами релаксації.

2. Варіаційне формулювання задачі. Введемо простори кінематично допустимих векторів зміщень і температури

$$V = [v \in H^1(\Omega)^d \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_u], \quad G = [\xi \in H^1(\Omega) \mid \xi = 0 \text{ на } \Gamma_\theta],$$

а також простори $Z = L^2(\Omega)$ і $H = Z^d$ і, відповідно, спряжені до них простори V', H', G', Z'. Тут і надалі через $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ позначаємо простір функцій Соболєва, наділений нормою

$$\|u\|_{m,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega \left|D^\alpha u\right|^2 dx)^{1/2} \Big).$$

Домножимо рівняння (1) та (2) на довільні $v \in V$ і $\xi \in G$ відповідно та проінтегруємо їх суму по області Ω з використанням формули Ґріна і рівнянь (3)–(5). У результаті одержимо

$$\int_\Omega \left[\rho u_i'' v_i + \sigma_{ji} v_{i,j} + \frac{1}{T_0} \rho c_{\mathrm{E}} (\theta + t_0 \theta')' \xi - \frac{1}{T_0} q_i \xi_{,i} + \gamma_{ij} \varepsilon_{ij}(u')\xi \right] dx =$$

$$= \int_\Omega \left[\rho f_i v_i + \frac{1}{T_0} w \xi \, dx \right] + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\sigma}_i v_i \, d\gamma$$

$$\forall v \in V, \quad \forall \xi \in G, \quad \forall t \in (0,T]. \tag{7}$$

Щоб спростити подальші викладки, введемо такі білінійні форми та лінійні функціонали:

$$m(u,v) = \int_\Omega \rho u_i v_i \, dx, \qquad c(u,v) = \int_\Omega c_{ijkm} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{km}(v) \, dx,$$

$$a(u,v) = \int_\Omega a_{ijkm} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{km}(v) \, dx, \quad b(\xi, v) = \int_\Omega \xi \gamma_{ij} \varepsilon_{ij}(v) \, dx \quad \forall u, v \in V,$$

$$s(\theta,\xi) = \int_\Omega \rho c_E T_0^{-1} \theta \xi \, dx, \qquad k(\theta,\xi) = \int_\Omega T_0^{-1} \lambda_{ij} \theta_{,j} \xi_{,i} \, dx \qquad \forall \theta, \xi \in G,$$

$$\langle l, v \rangle = m(f,v) + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\sigma}_i v_i \, d\gamma \quad \forall v \in V, \quad \langle \mu, \xi \rangle = \int_\Omega T_0^{-1} w \xi \, dx \quad \forall \theta, \xi \in G. \tag{8}$$

Це дає можливість для будь-якого моменту часу $t \in (0,T]$ переписати (1)–(5) у вигляді системи варіаційних рівнянь

$$m(u''(t), v) + a(u'(t), v) + c(u(t), v) - b(\theta(t) + t_1 \theta'(t), v) = \langle l(t), v \rangle \quad \forall v \in V,$$

$$s((\theta(t) + t_0 \theta'(t))', \xi) + k(\theta(t), \xi) + b(\xi, u'(t)) = \langle \mu(t), \xi \rangle \qquad \forall \xi \in G. \tag{9}$$

Тут явно показуємо залежність функцій u та θ від часу t, тобто розглядаємо їх як вектор-функції від параметра t зі значеннями в просторах V і G відповідно. Тоді рівняння (9) можна інтерпретувати як систему звичайних диференціальних рівнянь відносно $u(t)$ і $\theta(t)$. Цю систему доповнюємо початковими умовами, які з огляду на рівності (6) запишемо у такому інтегральному вигляді:

$$c(u(0) - u_0, v) = 0, \qquad m(u'(0) - v_0, v) = 0 \qquad \forall v \in V,$$

$$k(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0, \qquad s((\theta(0) + t_0 \theta'(0))' - \chi_0, \xi) = 0 \qquad \forall \xi \in G, \tag{10}$$

де $\chi_0 = \theta_0 + t_0 \pi_0$.

Також зазначимо, що рівняння (9) і (10) мають зміст, якщо функції, задані рівностями (6), задовольняють умови

$$u_0 \in V, \qquad v_0 \in H, \qquad \theta_0 \in G, \qquad \chi_0 \in Z,$$

$$l \in L^2(0,T;V'), \qquad \mu \in L^2(0,T;G').$$

Тоді розв'язок (u,θ) шукаємо у просторі $L^2(0,T;V \times G)$. Варіаційну задачу термопружності у формулюванні Ґріна – Ліндсея остаточно запишемо так:

задано: $u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \quad \theta_0 \in G, \quad \chi_0 \in Z, \quad (l,\mu) \in L^2(0,T;V' \times G')$;

знайти: *пару* $\psi = (u,\theta) \in L^2(0,T;V \times G)$ *таку, що*

$$m(u''(t),v) + a(u'(t),v) + c(u(t),v) - b(\theta(t) + t_1\theta'(t),v) = \langle l(t),v \rangle,$$

$$s((\theta(t) + t_0\theta'(t))',\xi) + k(\theta(t),\xi) + b(\xi,u'(t)) = \langle \mu(t),\xi \rangle \quad \forall t \in (0,T],$$

$$c(u(0) - u_0,v) = 0, \qquad m(u'(0) - v_0,v) = 0 \qquad \forall v \in V,$$

$$k(\theta(0) - \theta_0,\xi) = 0, \qquad s((\theta(0) + t_0\theta'(0)) - \chi_0,\xi) = 0 \quad \forall \xi \in G. \tag{11}$$

Сформульована задача термопружності є основним об’єктом дослідження.

3. Властивості складових варіаційної задачі. Перш ніж перейти до подальшого викладу, зробимо ряд важливих зауважень про властивості деяких білінійних форм з (8).

(***i***) З огляду на еліптичність коефіцієнтів пружності і в’язкості та нерівність Корна можна показати [1, с. 110], що симетричні неперервні білінійні форми $c(\cdot,\cdot) : V \times V \to \Re$, $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \Re$ є V-еліптичними, тобто

$$c(u,u) \ge c_0 \|u\|^2_{1,\Omega}, \qquad c_0 = \text{const} > 0,$$

$$a(u,u) \ge a_0 \|u\|^2_{1,\Omega}, \qquad a_0 = \text{const} > 0 \qquad \forall u \in V. \tag{12}$$

Це дає можливість ввести на просторі кінематично допустимих векторів зміщень V нову норму

$\|u\|_V = c^{1/2}(u,u)$, еквівалентну нормі $|||u|||_V = a^{1/2}(u,u) \quad \forall u \in V$.

(***ii***) Подібно симетрична неперервна білінійна форма $k(\cdot,\cdot) : G \times G \to \Re$ є G-еліптичною, тобто

$$k(\xi,\xi) \ge k_0 \|\xi\|^2_{1,\Omega}, \qquad k_0 = \text{const} > 0 \qquad \forall \xi \in G,$$

що дає можливість наділити простір G нормою [10]

$$\|\xi\|_G = k^{1/2}(\xi,\xi) \qquad \forall \xi \in G.$$

(***iii***) Властивості еліптичних симетричних білінійних форм

$$m(\cdot,\cdot) : H \times H \to \Re \ \text{ i } \ s(\cdot,\cdot) : Z \times Z \to \Re$$

дають можливість наділити простори H і Z нормами

$$\|u\|_H = m^{1/2}(u,u) \quad \forall u \in H, \qquad \|\xi\|_Z = s^{1/2}(\xi,\xi) \qquad \forall \xi \in Z. \tag{13}$$

Ці важливі твердження будемо використовувати при дослідженні питання розв’язності задачі термопружності (11) та обґрунтуванні наближених методів її розв’язання.

4. Побудова енергетичного рівняння. Покладаючи у (7) $v = u'(t)$, $\xi = \theta(t) + t_1\theta'(t)$, одержимо енергетичне рівняння моделі Ґріна – Ліндсея

$$\begin{aligned} &m(u''(t),u'(t)) + a(u'(t),u'(t)) + c(u(t),u'(t)) + \\ &\quad + s((\theta(t) + t_0\theta'(t))',\theta(t) + t_1\theta'(t)) + k(\theta(t),\theta(t) + t_1\theta'(t)) = \\ &\quad = \langle l(t),u'(t) \rangle + \langle \mu(t),\theta(t) + t_1\theta'(t) \rangle \qquad \forall t \in (0,T], \end{aligned}$$

і подамо передостанній доданок з лівої його частини у вигляді

$$\begin{aligned} &s([\theta(t) + t_0\theta'(t)]',\theta(t) + t_1\theta'(t)) = s([\theta(t) + t_0\theta'(t)]',\theta(t) + \\ &\quad + t_0\theta'(t) + (t_1 - t_0)\theta'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta(t) + t_0\theta'(t)\|^2_Z + \\ &\quad + (t_1 - t_0)\Big[\|\theta'(t)\|^2_Z + t_0\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta'(t)\|^2_Z\Big]. \end{aligned}$$

Далі подамо цю рівність з використання норм (12), (13):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|u'(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_V^2 + \|\theta(t) + t_0\theta'(t)\|_Z^2 + (t_1 - t_0)t_0\,\|\theta'(t)\|_Z^2 + t_1\,\|\theta(t)\|_G^2] + |\|u'(t)\||_V^2 + (t_1 - t_0)\|\theta'(t)\|_Z^2 + \|\theta(t)\|_G^2 = \langle l(t), u'(t)\rangle + \langle \mu(t), \theta(t) + t_1\theta'(t)\rangle \qquad \forall t \in (0,T]. \tag{14}$$

Проінтегрувавши рівняння (14) за часом на проміжку $(0,t)$, остаточно одержимо

$$\frac{1}{2}[\|u'(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_V^2 + \|\theta(t) + t_0\theta'(t)\|_Z^2 + (t_1 - t_0)t_0\,\|\theta'(t)\|_Z^2 + t_1\,\|\theta(t)\|_G^2] + \int_0^t [|\|u'(\tau)\||_V^2 + (t_1 - t_0)\|\theta'(\tau)\|_Z^2 + \|\theta(\tau)\|_G^2]\,d\tau = \int_0^t [\langle l(\tau), u'(\tau)\rangle + \langle \mu(\tau), \theta(\tau) + t_1\theta'(\tau)\rangle]d\tau + \frac{1}{2}[\|u'(0)\|_H^2 + \|u(0)\|_V^2 + \|\theta(0) + t_0\theta'(0)\|_Z^2 + (t_1 - t_0)t_0\,\|\theta'(0)\|_Z^2 + t_1\,\|\theta(0)\|_G^2] \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{15}$$

Рівність (15) назвемо рівнянням балансу енергії для варіаційної задачі (11).

У класичній теорії термопружності вираз $\frac{1}{2}[\|u'(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_V^2 + \|\theta(t)\|_Z^2]$ визначає повну енергію, а доданок $\int_0^t [|\|u'(\tau)\||_V^2 + \|\theta(\tau)\|_G^2]\,d\tau$ описує її дисипацію на актуальний момент часу $t \in [0,T]$. Теорія Ґріна − Ліндсея узагальнює ці характеристики до вигляду

$$\frac{1}{2}[\|u'(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_V^2 + \|\theta(t) + t_0\theta'(t)\|_Z^2 + t_1\,\|\theta(t)\|_G^2 + t_0(t_1 - t_0)\|\theta'(t)\|_Z^2]$$

та

$$\int_0^t [|\|u'(\tau)\||_V^2 + \|\theta(\tau)\|_G^2 + (t_1 - t_0)\|\theta'(\tau)\|_Z^2]\,d\tau$$

відповідно. Цей фізичний зміст дає можливість ввести такі енергетичні норми розв'язку $\psi(t) = (u(t), \theta(t))$ задачі (11):

$$\|\psi(t)\| = [\|u'(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_V^2 + \|\theta(t) + t_0\theta'(t)\|_Z^2 + t_1\,\|\theta(t)\|_G^2 + t_0(t_1 - t_0)\|\theta'(t)\|_Z^2]^{1/2},$$

$$|\|\psi(t)\|| = [|\|u'(t)\||_V^2 + \|\theta(t)\|_G^2 + (t_1 - t_0)\|\theta'(t)\|_Z^2]^{1/2} \qquad \forall \psi = (u(t), \theta(t)) \in V \times G, \tag{16}$$

і звести енергетичне рівняння (14) до вигляду

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2 + |\|\psi(t)\||^2 = \langle l, u'\rangle + \langle \mu, \theta(t) + t_1\theta'(t)\rangle \qquad \forall t \in (0,T].$$

Слід зауважити, що після інтегрування за часом попередня рівність набуде вигляду

$$\frac{1}{2}\|\psi(t)\|^2 + \int_0^t |\|\psi(\tau)\||^2\,d\tau = \frac{1}{2}\|\psi(0)\|^2 + \int_0^t [\langle l, u'\rangle + \langle \mu, \theta(t) + t_1\theta'(t)\rangle]\,d\tau \qquad \forall t \in [0,T],$$

або з урахуванням початкових умов (10):

$$\frac{1}{2}\|\psi(t)\|^2 + \int_0^t |||\psi(\tau)|||^2\, d\tau = \frac{1}{2}\{\|u_0\|_V^2 + \|\chi_0\|_Z^2 +$$

$$+ (t_1 - t_0)t_0\, \|\pi_0\|_Z^2 + \|v_0\|_H^2 + t_1\,\|\theta_0\|_G^2\} +$$

$$+ \int_0^t \{\langle l(\tau), u'(\tau)\rangle + \langle \mu, \theta(t) + t_1\theta'(t)\rangle\}\, d\tau \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{17}$$

5. Апріорні оцінки: регулярність і єдиність розв'язку варіаційної задачі. Скориставшись елементарною нерівністю

$$ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2 \qquad \forall a, b \in \Re, \qquad \forall \varepsilon > 0\,,$$

і нерівністю Коші – Буняковського – Шварца, неважко одержати оцінки

$$\int_0^t \langle l(\tau), u'(\tau)\rangle\, d\tau \le \frac{1}{2}\int_0^t \left[\|l(\tau)\|_*^2 + \|u'(\tau)\|_V^2\right] d\tau \tag{18}$$

та

$$\int_0^t \langle \mu(\tau), \theta(\tau) + t_1\theta'(\tau)\rangle\, d\tau \le \int_0^t \|\mu(\tau)\|_* \left(\|\theta(\tau)\|_G + t_1\,\|\theta'(\tau)\|_G\right) d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^t \left(\|\mu(\tau)\|_*^2 + \|\theta(\tau)\|_G^2\right) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{t_1^2}{t_1 - t_0}\|\mu(\tau)\|_*^2 + (t_1 - t_0)\,\|\theta'(\tau)\|_Z^2\right) d\tau\,. \tag{19}$$

Тут і надалі символом $\|\cdot\|_*$ позначатимемо норми у спряжених просторах G' (або V' чи Z'). Далі підставимо оцінки (18) і (19) у рівняння (15) і зведемо його до вигляду

$$\frac{1}{2}\left[\|u'(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_V^2 + \|\theta(t) + t_0\theta'(t)\|_Z^2 + (t_1 - t_0)t_0\,\|\theta'(t)\|_Z^2 + t_1\,\|\theta(t)\|_G^2\right] +$$

$$+ \int_0^t \left[|||u'(\tau)|||_V^2 + (t_1 - t_0)\,\|\theta'(\tau)\|_Z^2 + \|\theta(\tau)\|_G^2\right] d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^t \left[\|l(\tau)\|_*^2 + (1 + t_1^2/(t_1 - t_0))\,\|\mu(\tau)\|_*^2\right] d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\|u'(0)\|_H^2 + \|u(0)\|_V^2 + \|\theta(0) + t_0\theta'(0)\|_Z^2 +\right.$$

$$\left. + (t_1 - t_0)t_0\,\|\theta'(0)\|_Z^2 + t_1\,\|\theta(0)\|_G^2\right] \qquad \forall t \in [0, T]\,. \tag{20}$$

Теорема 1. *Нехай вхідні дані варіаційної задачі термопружності Ґріна – Ліндсея задовольняють умови регулярності*

$$u_0 \in V, \qquad v_0 \in H, \qquad \theta_0 \in G, \qquad \chi_0 \in Z\,,$$

$$l \in L^2(0, T; V'), \qquad \mu \in L^2(0, T; G')\,.$$

Тоді, якщо розв'язок $\psi = (u, \theta)$ *задачі* (11) *існує, то*

(***i***) *розв'язок* $\psi = (u, \theta)$ *є єдиним;*

(***ii***) *пара* $\psi = (u, \theta)$ *задовольняє такі умови регулярності:*

$$u \in L^\infty(0, T; V), \qquad \theta \in L^\infty(0, T; G) \cap L^2(0, T; G)\,,$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \qquad \theta' \in L^\infty(0, T; Z) \cap L^2(0, T; Z)\,,$$

$$u'' \in L^2(0, T; V'), \qquad \theta'' \in L^2(0, T; G')\,. \tag{21}$$

6. Напівдискретизація Гальоркіна. Щоб довести існування розв'язку задачі термопружності (11), скористаємося конструктивним доведеннями з напівдискретизацією Гальоркіна за просторовими змінними. Нехай послідовності скінченновимірних підпросторів $\{V_h\}$ та $\{G_h\}$ з просторів V і G такі, що

$$\bigcup_{h>0} V_h \quad \text{щільно вкладена в} \quad V, \quad \dim V_h = N(h) = N \underset{h\to 0}{\to} \infty,$$

$$\bigcup_{h>0} G_h \quad \text{щільно вкладена в} \quad G, \quad \dim G_h = M(h) = M \underset{h\to 0}{\to} \infty.$$

Тоді для будь-якого $h > 0$ розв'язок *задачі*

$$\begin{aligned}
&\textit{задано}: \quad u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \quad \theta_0 \in G, \quad \chi_0 \in Z, \quad (l,\mu) \in L^2(0,T;V' \times G');\\
&\textit{знайти}: \quad \textit{пару} \quad \psi_h = (u_h, \theta_h) \in L^2(0,T;V_h \times G_h) \quad \textit{таку, що}\\
&\quad m(u_h''(t), v) + a(u_h'(t), v) + c(u_h(t), v) - b(\theta_h(t) + t_1\theta_h'(t), v) = \langle l(t), v\rangle,\\
&\quad s((\theta_h(t) + t_0\theta_h'(t))', \xi) + k(\theta_h(t), \xi) + b(\xi, u_h'(t)) = \langle \mu(t), \xi\rangle \quad \forall t \in (0,T],\\
&\quad c(u_h(0) - u_0, v) = 0, \qquad m(u_h'(0) - v_0, v) = 0 \qquad \forall v \in V_h,\\
&\quad k(\theta_h(0) - \theta_0, \xi) = 0, \quad s((\theta_h(0) + t_0\theta_h'(0)) - \chi_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in G_h,
\end{aligned} \tag{22}$$

назвемо напівдискретною апроксимацією Гальоркіна (за просторовими змінними) розв'язку варіаційної задачі термопружності (11). Параметр $h > 0$ називатимемо параметром дискретизації; надалі надамо йому змісту діаметра сітки скінченних елементів.

Нехай послідовності $\{v_i\}_{i=1}^N$ і $\{\xi_n\}_{n=1}^M$ – базиси відповідно просторів V_h та G_h. Тоді розв'язок задачі (22) можна деталізувати до лінійної комбінації

$$u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N} U_j(t) v_j(x), \qquad \theta_h(x,t) = \sum_{m=1}^{M} Q_m(t)\xi_m(x) \tag{23}$$

з невідомими коефіцієнтами $U_1(t),\ldots,U_N(t)$ та $Q_1(t),\ldots,Q_M(t)$. Для їх визначення підставимо розвинення (23) у рівняння задачі (22), послідовно покладемо $v = v_i(x)$, $i = 1,\ldots,N$, та $\xi = \xi_\ell(x)$, $\ell = 1,\ldots,M$, і, ввівши позначення

$$\begin{aligned}
&m_{ij} = m(v_i, v_j), \qquad a_{ij} = a(v_i, v_j), \qquad c_{ij} = c(v_i, v_j),\\
&b_{\ell i} = b(\xi_\ell, v_i), \qquad s_{k\ell} = s(\xi_k, \xi_\ell), \qquad k_{k\ell} = k(\xi_k, \xi_\ell),\\
&l_i = \langle l, v_i\rangle, \qquad \mu_\ell = \langle \mu, \xi_\ell\rangle,\\
&U_i^0 = c(u_0, v_i), \qquad V_i^0 = m(v_0, v_i), \qquad i,j = 1,\ldots,N,\\
&Q_k^0 = k(\theta_0, \xi_k), \qquad K_k^0 = s(\chi_0, \xi_k), \qquad k,\ell = 1,\ldots,M,
\end{aligned}$$

одержимо таку задачу Коші:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} \{m_{ij}U_j''(t) + a_{ij}U_j'(t) + c_{ij}U_j(t)\} - \sum_{k=1}^{M} b_{ki}[Q_m(t) + t_1 Q_m'(t)] = l_i(t),\\
&\sum_{k=1}^{M} \{s_{k\ell}[Q_m(t) + t_0 Q_m'(t)]' + k_{k\ell}Q_k(t)\} + \sum_{j=1}^{N} b_{\ell j}U_j'(t) = \mu_\ell(t) \quad \forall\, t \in (0,T],\\
&\sum_{j=1}^{N} m_{ij}U_j'(0) = V_i^0, \qquad \sum_{j=1}^{N} c_{ij}U_j(0) = U_i^0, \qquad i = 1,\ldots,N,\\
&\sum_{k=1}^{M} s_{\ell k}[Q_m(0) + t_0 Q_m'(0)] = K_\ell^0, \qquad \sum_{k=1}^{M} k_{\ell k}Q_k(0) = Q_\ell^0, \qquad \ell = 1,\ldots,M.
\end{aligned}$$

У матричних позначеннях вона набуде вигляду

$$\begin{aligned}
&MU''(t) + AU'(t) + CU(t) - B[Q(t) + t_1 Q'(t)] = L(t),\\
&S[Q(t) + t_0 Q'(t)]' + KQ(t) + B^T U'(t) = R(t) \qquad \forall\, t \in (0,T],
\end{aligned}$$

$$MU'(0) = V^0, \qquad CU(0) = U^0,$$
$$S[Q(0) + t_0 Q'(0)] = K^0, \qquad KQ(0) = Q^0, \tag{24}$$
де
$$M = (m_{ij})_{i,j=1}^N, \qquad A = (a_{ij})_{i,j=1}^N, \qquad C = (c_{ij})_{i,j=1}^N,$$
$$B = (b_{\ell i})_{i=1,\ell=1}^{N,M}, \qquad S = (s_{k\ell})_{k,\ell=1}^M, \qquad S = (k_{k\ell})_{k,\ell=1}^M,$$
$$L = (\ell_i)_{i=1}^N, \qquad R = (\mu_\ell)_{\ell=1}^M, \qquad U = (U_i^0)_{i=1}^N,$$
$$V = (V_i^0)_{i=1}^N, \qquad Q = (Q_k^0)_{k=1}^M, \qquad K = (K_k^0)_{k=1}^M.$$

Звернемо увагу й на те, що з означень (24) і (12), (13) випливає, що *матриці* M, A, C *та* S, K *симетричні та додатно визначені.*

Ці властивості обумовлюють єдиність розв'язку задачі Коші (24) та, відповідно, єдиність визначення напівдискретних апроксимацій $(u_h(t), \theta_h(t))$ у вигляді (23) для кожного значення параметра дискретизації $h > 0$ [6, с. 85].

7. Рівняння балансу енергії. Аналогічно до (14) отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u_h'(t)\|_H^2 + \|u_h(t)\|_V^2 + \|\theta_h(t) + t_0\theta_h'(t)\|_Z^2 +$$
$$+ (t_1 - t_0)t_0\|\theta_h'(t)\|_Z^2 + t_1\|\theta_h(t)\|_G^2\big) +$$
$$+ \|\|u_h'(t)\|\|_V^2 + (t_1 - t_0)\|\theta_h'(t)\|_Z^2 + \|\theta_h(t)\|_G^2 =$$
$$= \langle l(t), u_h'(t)\rangle + \langle \mu(t), \theta_h(t) + t_1\theta_h'(t)\rangle \quad \forall t \in (0, T], \tag{25}$$

або, використовуючи позначення (16):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_h(t)\|^2 + \|\psi_h(t)\|^2 = \langle l, u_h'(t)\rangle + \langle \mu, \theta_h(t) + t_1\theta_h'(t)\rangle \quad \forall t \in (0, T], \tag{26}$$

де $\psi_h(t) = (u_h(t), \theta_h(t))$ – розв'язок задачі (22).

Зауваження. З першої із початкових умов задачі (22) отримуємо рівняння

$$\|u_h(0)\|_V^2 = c(u_h(0), u_0) = \|u_0\|_V^2.$$

Аналогічні властивості для відповідних норм мають решта початкових умов з (22). Отже, тільки вигляд початкових умов, прийнятий у варіаційній задачі (22), узгоджується з рівнянням балансу енергії у формі (26).

8. Деякі апріорні оцінки. На доповнення до нерівності (20) наведемо корисні оцінки повної енергії і її дисипації відносно прикладених до тіла теплових джерел і механічних навантажень. Цю оцінку можна уточнити, застосовуючи прийоми отримання оцінок (18), (19) до лінійних функціоналів

$$\|\mu(\tau)\|_*^2 \le K\|w(\tau)\|_G^2, \qquad \|l(\tau)\|_*^2 \le K\big(\|f(\tau)\|_V^2 + \|\hat{\sigma}(\tau)\|_\Gamma^2\big). \tag{27}$$

Тут і надалі символ K позначатиме різноманітні додатні константи, значення яких не залежать від шуканих величин.

Зазначимо, що праві частини нерівностей (27) залишаються обмеженими, якщо справджуються (повністю допустимі для розв'язку практичних задач) такі припущення:

$$w \in L^2(0, T; G), \qquad \rho \in L^\infty(\Omega),$$
$$f \in L^2(0, T; V), \qquad \hat{\sigma} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma)^n).$$

Використовуючи енергетичне рівняння (26) та міркуючи подібно, як і при отриманні нерівності (20), приходимо до такої апріорної оцінки напівдискретних апроксимацій Гальоркіна:

$$\|\psi_h(t)\|^2 + \int_0^t \|\|\psi_h(\tau)\|\|^2\, d\tau \le \big(\|u_0\|_V^2 + \|\chi_0\|_Z^2 + (t_1 - t_0)t_0\|\pi_0\|_Z^2 +$$

$$+ \|v_0\|_H^2 + t_1 \|\theta_0\|_G^2) + \int\limits_0^t [\|l(\tau)\|_*^2 + \|\mu(\tau)\|_*^2] d\tau$$

$$\forall t \in [0, T], \qquad \forall h > 0 . \tag{28}$$

9. Розв'язність варіаційної задачі динамічної термопружності. Базуючись на одержаних результатах, доведемо правильність такого твердження.

Теорема 2 (про коректність варіаційної задачі термопружності). *Варіаційна задача термопружності* (11) *має єдиний розв'язок* $\psi = (u, \theta)$ *такий, що має властивості* (21) *та допускає апріорну оцінку* (20).

Д о в е д е н н я теореми проведемо в три етапи (використовуючи міркування з [3, с. 296–315] і [7, с. 73–74]).

1°. *Існування розв'язку.* Як випливає з (28), послідовності напівдискретних апроксимацій (u_h), (θ_h) (відповідно (u_h'), (θ_h')) утворюють при $h \to 0$ обмежені множини в просторах $L^\infty(0, T; V)$, $L^\infty(0, T; G) \bigcap L^2(0, T; G)$ (відповідно в $L^\infty(0, T; H) \bigcap L^2(0, T; V)$, $L^\infty(0, T; Z) \bigcap L^2(0, T; Z)$).

Тому з послідовності $\psi_h = (u_h, \theta_h)$ можна вибрати підпослідовність $\psi_\Delta = (u_\Delta, \theta_\Delta)$ таку, що

$$\begin{array}{llll} (u_\Delta, \theta_\Delta) \to (u, \theta) & \text{в} & L^\infty(0, T; V \times G) & *\text{-слабко}, \\ \theta_\Delta \to \theta & \text{в} & L^2(0, T; G) & \text{слабко}, \\ (u_\Delta', \theta_\Delta') \to (u', \theta') & \text{в} & L^\infty(0, T; H \times Z) & *\text{-слабко}, \\ (u_\Delta', \theta_\Delta') \to (u', \theta') & \text{в} & L^2(0, T; V \times Z) & \text{слабко}. \end{array} \tag{29}$$

Таким чином, $\psi_\Delta = (u_\Delta, \theta_\Delta)$ слабко збігається до $\psi = (u, \theta)$ у просторі $L^2(0, T; V \times G)$. Залишається показати, що знайдена пара $\psi = (u, \theta)$ з простору $L^2(0, T; V \times G)$ є розв'язком задачі (11).

Нехай, як і раніше, $v_1, \ldots, v_N$ і $\xi_1, \ldots, \xi_N$ – базиси просторів $V_h \subset V$ і $G_h \subset G$, відповідно. Введемо простір

$$W = \{q \in C^1([0, T]) \mid q(T) = 0\}$$

і розглянемо функції вигляду

$$v_h(t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) v_i, \qquad \xi_h(t) = \sum_{j=1}^M \eta_j(t) \xi_j, \qquad q_i, \eta_j \in W .$$

З огляду на задачу (22) маємо такі рівності:

$$m(u_\Delta''(t), v) + a(u_\Delta'(t), v) + c(u_\Delta(t), v) - b(\theta_\Delta(t) + t_1 \theta_h'(t), v) = \langle l(t), v \rangle ,$$

$$s((\theta_\Delta(t) + t_0 \theta_\Delta'(t))', \xi) + k(\theta_\Delta(t), \xi) + b(\xi, u_\Delta'(t)) = \langle \mu(t), \xi \rangle$$

$$\forall v \in V_h, \qquad \forall \xi \in G_h .$$

Проінтегруємо ці рівності по проміжку $(0, T)$:

$$\int\limits_0^T \big(- m(u_\Delta'(\tau), v') + a(u_\Delta'(\tau), v) + c(u_\Delta(\tau), v) - b(\theta_\Delta(\tau) + t_1 \theta_h'(\tau), v) -$$

$$- \langle l(t), v \rangle \big) d\tau = - m(u_\Delta'(0), v) = - m(v_0, v) ,$$

$$\int\limits_0^T \big(- s(\theta_\Delta(t) + t_0 \theta_\Delta'(t), \xi') + k(\theta_\Delta(t), \xi) + b(\xi, u_\Delta'(t)) - \langle \mu(t), \xi \rangle \big) d\tau =$$

$$= - s(\theta_\Delta(t) + t_0 \theta_\Delta'(t), \xi) = - s(\chi_0, \xi) .$$

Якщо перейти в цих рівняннях до границі при $\Delta \to 0$, а потім знову застосувати інтегрування частинами, то отримаємо

$$\int_0^T \big(m(u'', v) + a(u', v) + c(u, v) - b([\theta(\tau) + t_1\theta'(\tau)], v) - \langle l, v \rangle \big)\, d\tau =$$

$$= m([u'(0) - v_0], v) \qquad \forall v \in C^1([0,T]; V_h),$$

$$\int_0^T \big(s([\theta(t) + t_0\theta'(t)]', \xi) + k(\theta, \xi) + b(\xi, u') - \langle \mu, \xi \rangle \big)\, d\tau =$$

$$= t_0 s([\theta_\Delta(t) + t_0\theta'_\Delta(t) - \chi_0], \xi) \qquad \forall \xi \in C^1([0,T]; G_h).$$

Але, оскільки простір V_h щільний у просторі V, а G_h щільний у просторі G, то ці рівняння виконуються для кожного $v \in C^1([0,T]; V)$ і $\xi \in C^1([0,T]; G)$. Тому

$$m(u''(t), v) + a(u'(t), v) + c(u(t), v) - b(\theta(t) + t_1\theta'(t), v) = \langle l(t), v \rangle,$$

$$s((\theta(t) + t_0\theta'(t))', \xi) + k(\theta(t), \xi) + b(\xi, u'(t)) = \langle \mu(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T],$$

$$m(u'(0) - v_0, v) = 0, \quad s((\theta(0) + t_0\theta'(0)) - \chi_0, \xi) = 0 \quad \forall v \in V, \quad \forall \xi \in G.$$

І, нарешті, використовуючи (29), маємо

$$c(u(0) - u_0, v) = 0 \quad \forall v \in V, \qquad k(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in G.$$

Таким чином, границя $\psi = (u, \theta)$, означена в (29), задовольняє всі рівняння варіаційної задачі (11).

2°*. Обмеженість розв'язку.* Шляхом граничного переходу в (28) при $h \to 0$ (а це можливо), переконуємося, що для розв'язку $\psi = (u, \theta)$ задачі (11) також існує апріорна оцінка (20).

3°*. Єдиність розв'язку* логічно випливає з апріорних оцінок (20), якщо скористатися доведенням від супротивного.

Висновки. Початково-крайову задачу динамічної термопружності у формулюванні Ґріна – Ліндсея зведено до відповідної варіаційної задачі та з використанням рівняння балансу енергії окреслено цілком придатний для практики клас регулярності вхідних даних, які гарантують єдиність та неперервну залежність шуканого розв'язку в енергетичній нормі задачі.

Конструктивне доведення існування розв'язку варіаційної задачі здійснено за допомогою напівдискретизації Гальоркіна за просторовими змінними. Такий підхід, з одного боку, визначає розв'язок розглядуваної задачі як границю послідовності напівдискретних апроксимацій Гальоркіна, а з іншого – призводить до апріорних оцінок їх швидкості збіжності, якщо, наприклад, ці апроксимації реалізуються стандартною технологією методу скінченних елементів.

Одержані результати – повноцінна основа для успішної побудови та аналізу числових схем розв'язування задач динамічної термопружності. Зокрема, одну із таких схем можна одержати безпосереднім доповненням напівдискретизації Гальоркіна однокроковою рекурентною схемою інтегрування в часі задачі (22) (див., наприклад, [6; 7, с. 77–85]). Результатам такого ґатунку будуть присвячені наступні статті авторів.

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
3. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородые граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.

4. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – Москва: Мир, 1970. – 256 с.
5. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1979. – 312 с.
6. *Трушевський В. М., Шинкаренко Г. А., Щербина Н. М.* Метод скінченних елементів і штучні нейронні мережі: теоретичні аспекти та застосування. – Львів: Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, 2014. – 396 с.
7. *Шинкаренко Г. А.* Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. – Київ: Навч.-метод. кабінет вищої освіти, 1991. – 88 с.
8. *Chandrasekharaiah D. S.* Hyperbolic thermoelasticity: A review of recent literature // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51**, No. 12. – P. 705–729.
9. *Chyr I., Jachymek M., Hurey I., Gurey V., Shynkarenko H.* Computer simulation of friction hardening of superficial layers of machine details // In: Manufacturing Processes. Some Problems. Vol. 1. Basic science applications / Eds. M. Gajek, O. Hachkewych, A. Stanik-Besler. – Opole: Politechnika Opolska, 2012. – P. 49–62.
10. *Chyr I., Shynkarenko H.* Numerical modelling of temperature fields during impulse frictional hardening // Журн. обчисл. прикл. математики. – 2013. – № 3 (113). – P. 3–17.
11. *Green A. E., Lindsay K. A.* Thermoelasticity // J. Elasticity. – 1972. – **2**, No. 1. – P. 1–7.
12. *Ignaczak J., Ostoja-Starzewski M.* Thermoelasticity with finite wave speeds. – Oxford: Oxford Univ. Pres., 2010. – xviii+413 p.
13. *Lord H. W., Shulman Y.* A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. – 1967. – **15**, No. 5. – P. 299–309.
14. *Sharma J. N.* Wave propagation in coupled and generalized thermoelastic media // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 11. –P. 6480–6492.
15. *Tamma K. K., Namuru R. R.* An effective finite element modeling/analysis approach for dynamic thermoelasticity due to second sound effects // Comput. Mech. – 1992. – **9**, No. 2. – P. 73–84.

КОРРЕКТНОСТЬ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ГРИНА – ЛИНДСЕЯ

На основании начально-краевой задачи динамической термоупругости Грина – Линдсея сформулирована соответствующая ей вариационная задача в терминах смещений и температуры. Достаточные условия регулярности входных данных задачи, а также единственность ее решения установлены из энергетического уравнения вариационной задачи. Для доказательства существования обобщенного решения (и, параллельно, как первый шаг к обоснованию процедуры вычисления его аппроксимации) использована полудискретизация Галеркина по пространственным переменным. Показано, что граница последовательности ее приближений является решением вариационной задачи Грина – Линдсея.

WELL-POSEDNESS OF VARIATIONAL PROBLEM FOR GREEN – LINDSAY DYNAMIC THERMOELASTICITY

On the basis of the initial-boundary value problem of Green – Lindsay dynamic thermoelasticity the corresponding for it the variational problem is formulated in terms of displacements and temperature. The sufficient conditions for regularity of input data of the problem as well as the uniqueness of its solution are established from the energy equation of variational problem. To prove the existence of generalized solution (and as the first step towards the justification of approximation computation procedure) the Galerkin semidiscretization by spatial variables are used. Furthermore, it is shown that the limit of the semidiscretization approximations sequence is the solution of variational Green – Lindsay problem.

[1] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,
[2] Політехніка Опольська, Ополє, Польща

Одержано
20.04.15