

ОПТИМІЗАЦІЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ У ЗАДАНОМУ ПЕРЕРІЗІ ПІВПРОСТОРУ, ЩО ПЕРЕБУВАЄ У СТАНІ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

Побудовано розв'язок задачі оптимального керування розподілом нестационарних вертикальних температурних переміщень півпростору, що перебуває у стані плоскої деформації. За функцію керування вибрано потужність внутрішніх теплових джерел, зосереджених у площині, паралельній до граничної поверхні. У припущенні існування керування, яке забезпечує точну нижню грань рівномірного відхилення керованого розподілу вертикальних переміщень від заданого, задачу оптимізації зведено до оберненої задачі термоджоружності. Побудовано та проаналізовано розв'язок отриманої оберненої задачі.

Вступ. Елементи та вузли сучасного технологічного обладнання у процесі виготовлення та експлуатації часто зазнають інтенсивного теплового навантаження. З огляду на це актуальною є проблема забезпечення їх міцнісних характеристик у процесі експлуатації та проектних функціональних властивостей, зокрема геометрії робочої поверхні, яка визначається величиною її температурних переміщень [1, 8, 9].

У роботах [3, 10] розглянуто задачі керування за допомогою теплових джерел осесиметричними стаціонарними та нестационарними температурними переміщеннями вільно опертої по контуру тонкої круглої пластини, якою моделюють лазерне дзеркало.

Задачу керування стаціонарними термоджоружними переміщеннями ізотропного шару, ідеально спряженого з п'єзоелектричним керамічним шаром, досліджено у праці [13]. За функцію керування вибрано величину електричного потенціалу, який індукують у п'єзоелектричному керамічному шарі. Керування нестационарними термоджоружними переміщеннями ізотропного шару, ідеально спряженого з двома п'єзокерамічними шарами, досліджено у праці [11]. Дослідження керування нестационарними осесиметричними термоджоружними переміщеннями композитного диска, ідеально спряженого з керамічним, проведено у праці [12].

Керування нестационарними термоджоружними переміщеннями ізотропною та функціонально-градієнтною вільно опертих прямокутних пластин, ідеально спряжених з такого ж розміру п'єзоелектричною пластиною, за допомогою індукованого у п'єзоелектричній пластині електричного потенціалу досліджено у працях [15, 16].

Дослідженню керування переміщеннями тіла, зокрема його поверхні, шляхом створення у ньому відповідних власних деформацій, які не викликають напружень, присвячено працю [14].

У цій статті сформульовано та досліджено задачу оптимального керування за допомогою внутрішніх теплових джерел розподілом нестационарних вертикальних температурних переміщень деякого перерізу однорідного ізотропного півпростору, паралельного до граничної поверхні.

1. Постановка задачі оптимізації. Розглянемо вільний від зовнішнього силового навантаження ізотропний однорідний півпростір, віднесений до прямокутної декартової системи координат. Вважатимемо, що півпростір за сталої початкової температури $T_0 = \text{const}$ перебуває у ненапруженому стані, його температура змінюється лише за просторовими координатами x_* і y_* і у ньому реалізується плоский деформований стан. Тоді безрозмірне нестационарне температурне поле $T(x, y, \tau)$ у півпросторі за наявності в ньому внутрішніх теплових джерел та умови конвективного теплообміну із зовніш-

нім середовищем за законом Ньютона описується рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \Delta T(x, y, \tau) + Q(x, y, \tau), \quad x \in [0, \infty), \quad y \in (-\infty, \infty), \quad \tau > 0, \quad (1)$$

та крайовими умовами

$$\frac{\partial T(0, y, \tau)}{\partial x} - H[T(0, y, \tau) - t(y, \tau)] = 0, \quad (2)$$

$$T(x, y, 0) = 0. \quad (3)$$

Тут $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа; $T(x, y, \tau) = (T_*(x, y, \tau) - T_0)/T_0$; T_* – температурне поле півпростору; $x = x_*/R$, $y = y_*/R$ – безрозмірні декартові координати; $\tau = a\tau_*/R^2$ – безрозмірний час; τ_* – час; a – коефіцієнт теплопровідності; R – деяка характерна довжина; $Q(x, y, \tau) = Q_*(x, y, \tau)R^2/\lambda T_0$ – безрозмірна потужність внутрішніх теплових джерел; $Q_*(x, y, \tau)$ – потужність внутрішніх теплових джерел; λ – коефіцієнт теплопровідності; $H = \alpha R/\lambda$ – безрозмірний коефіцієнт теплообміну; α – коефіцієнт теплообміну; $t(y, \tau) = (t_*(y, \tau) - T_0)/T_0$ – безрозмірна температура зовнішнього середовища; $t_*(y, \tau)$ – температура зовнішнього середовища.

Задачу термопружності для півпростору, яка відповідає температурному полю $T(x, y, \tau)$, опишемо системою диференціальних рівнянь [5]

$$(1 - \nu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1 - 2\nu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} = \alpha_T (1 + \nu) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (4)$$

$$(1 - \nu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(1 - 2\nu) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} = \alpha_T (1 + \nu) \frac{\partial T}{\partial y}, \quad u_z = 0$$

за умов

$$\sigma_{xx}|_{x=0} = \sigma_{xy}|_{x=0} = 0, \quad (5)$$

де u_x , u_y , u_z – компоненти вектора переміщень; σ_{xx} , σ_{xy} – компоненти тензора напружень; ν – коефіцієнт Пуассона; α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Припустимо, що теплові джерела $Q(x, y, \tau)$ зосереджені у деякій площині півпростору $x = x_0$ ($x_0 \geq 0$, $x_0 = \text{const}$), паралельній до граничної поверхні, тобто $Q(x, y, \tau) = u(y, \tau)\delta(x - x_0)$ і їх безрозмірною потужністю $u(y, \tau)$ можна керувати. Тут $u(y, \tau) = u_*(y, \tau)R^2/\lambda T_0$, $u_*(y, \tau)$ – потужність внутрішніх теплових джерел.

Вибравши за функцію керування безрозмірну потужність внутрішніх теплових джерел, у просторі неперервних функцій $C(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} = \{(y, \tau) : y \in [0, \infty) \times [0, \infty)\}$, потрібно знайти таке керування $u(y, \tau) \in C(\mathcal{D})$, яке у кожен момент часу забезпечує мінімальне значення рівномірного відхилення вертикальних переміщень u_x деякої площини півпростору $x = x_1$ від заданого, тобто забезпечує мінімум функціонала

$$J(u) = \max_{y \in (-\infty, \infty)} |u_x(x_1, y, \tau; u) - \varphi_*(y, \tau)|, \quad \tau \in [0, \tau_m], \quad (6)$$

$\varphi_*(y, \tau)$ – заданий розподіл переміщень; $\tau_m = \text{const}$.

2. Побудова розв'язку задачі. Для знаходження розв'язку сформульованої задачі припускаємо, що існує таке керування, яке забезпечує точну нижню грань функціонала (6) [2, 3], що еквівалентно рівності

$$u_x(x_1, y, \tau; u) = \varphi_*(y, \tau), \quad \tau \in [0, \tau_m]. \quad (7)$$

Не зменшуючи загальності, прийемо, що температурне поле $T(x, y, \tau)$ є парною функцією координати y . Тоді, використавши відомі методи інтегрування диференціальних рівнянь (4) за умов (5) [5], розв'язок задачі термопружності для півпростору подамо у вигляді інтегральних залежностей компонент вектора переміщення u_x , u_y від неявно заданого температурного поля

$$\begin{aligned} u_x(x, y, \tau) &= -\frac{(1+\nu)\alpha_T R}{(1-\nu)\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty T(\eta, \xi, \tau) [(3-4\nu+2sx)e^{-s(x+\eta)} - \\ &\quad - e^{-s|x-\eta|} \operatorname{sgn}(x-\eta)] \cos(s\xi) \cos(sy) ds d\xi d\eta, \\ u_y(x, y, \tau) &= -\frac{(1+\nu)\alpha R}{(1-\nu)\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty T(\eta, \xi, \tau) [(3-4\nu+2sx)e^{-s(x+\eta)} - \\ &\quad - e^{-s|x-\eta|}] \cos(s\xi) \sin(sy) ds d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (8)$$

Скориставшись інтегральними перетвореннями Фур'є і Лапласа [7], розв'язок задачі теплопровідності (1)–(3) запишемо так:

$$\begin{aligned} T(x, y, \tau) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\tau t(\xi, \theta) G_1(\eta, y, s, \xi, \tau - \theta) d\theta d\xi ds + \\ &\quad + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\tau u(\xi, \theta) G_2(\eta, y, s, x_0, \xi, \tau - \theta) d\theta d\xi ds, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} G_1(\eta, y, s, \xi, \tau - \theta) &= \frac{2H}{\pi} \left[\frac{e^{-s^2(\tau-\theta)}}{\sqrt{\pi(\tau-\theta)}} e^{-\eta^2/4(\tau-\theta)} - \right. \\ &\quad \left. - He^{\eta H + (H^2 - s^2)(\tau-\theta)} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta + 2H(\tau-\theta)}{2\sqrt{(\tau-\theta)}} \right) \right] \cos(sy) \cos(s\xi), \\ G_2(\eta, y, s, x_0, \xi, \tau - \theta) &= \frac{2}{\pi} \left[He^{(x_0+\eta)H + H^2\tau - (H^2 + s^2)\theta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta + x_0 + 2H(\tau-\theta)}{2\sqrt{(\tau-\theta)}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-s^2(\tau-\theta)}}{2\sqrt{\pi(\tau-\theta)}} \left(e^{-\frac{(\eta+x_0)^2}{4(\tau-\theta)}} + e^{-\frac{(\eta-x_0)^2}{4(\tau-\theta)}} \right) \right] \cos(sy) \cos(s\xi). \end{aligned}$$

Підставивши температурне поле (9) у вираз для переміщень (8) і використавши умову (7), отримаємо наступне інтегральне рівняння першого роду на шукану функцію $u(y, \tau)$:

$$\int_0^\infty \int_0^\tau \mathcal{K}(y, x_0, x_1, \xi, \tau - \theta) u(\xi, \theta) d\theta d\xi = \Phi(y, \tau), \quad (10)$$

де

$$\mathcal{K}(y, x_0, x_1, \xi, \tau - \theta) = \int_0^\infty A(s, x_0, x_1, \tau - \theta) \cos(s\xi) \cos(sy) ds,$$

$$\begin{aligned}
A(s, x_0, x_1, \tau - \theta) = & -\frac{(4 - 4\nu + 2sx_1)H + (2 - 4\nu + 2sx_1)s}{H^2 - s^2} \times \\
& \times He^{x_0H + (H^2 - s^2)(\tau - \theta) - sx_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_0 + 2H(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right) - \\
& -\frac{H + s}{2(H - s)}(3 - 4\nu + 2sx_1)e^{-s(x_1 - x_0)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_0 + 2s(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right) + \\
& +\frac{H - s}{2(H + s)}e^{-s(x_0 + x_1)} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{2s(\tau - \theta) - x_0}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right) + \right. \\
& \left. + \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 + x_0 - 2s(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right)\right) - \\
& -\frac{H + s}{2(H - s)}e^{s(x_1 + x_0)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_1 + x_0 + 2s(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right) - \\
& -\frac{1}{2}e^{-s(x_1 - x_0)} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x_0 + 2s(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right) + \right. \\
& \left. + \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - x_0 - 2s(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right)\right) + \\
& +\frac{1}{2}e^{s(x_1 - x_0)} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_1 - x_0 + 2s(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right) + \\
& +\frac{1}{2}(3 - 4\nu + 2sx_1)e^{-s(x_1 + x_0)} \operatorname{erfc}\left(\frac{2s(\tau - \theta) - x_0}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right) + \\
& +\frac{2H^2e^{(x_1 + x_0)H + (H^2 - s^2)(\tau - \theta)}}{H^2 - s^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_1 + x_0 + 2H(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right),
\end{aligned}$$

$$\Phi(y, \tau) = \varphi(y, \tau) - \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\tau t(\xi, \theta) \mathcal{K}_1(s, x_1, \tau - \theta) \cos(s\xi) \cos(sy) d\theta d\xi ds,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1(s, x_1, \tau - \theta) = & -\frac{(4 - 4\nu + 2sx_1)H + (2 - 4\nu + 2sx_1)s}{H^2 - s^2} \times \\
& \times H^2 e^{(H^2 - s^2)(\tau - \theta) - sx_1} \operatorname{erfc}(H\sqrt{\tau - \theta}) - \\
& -\frac{sH}{H - s}(3 - 4\nu + 2sx_1)e^{-sx_1} \operatorname{erfc}(s\sqrt{\tau - \theta}) - \\
& -\frac{sH}{H - s}e^{sx_1} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_1 + 2s(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right) - \\
& -\frac{sH}{H + s}e^{-sx_1} \left(\operatorname{erf}(s\sqrt{\tau - \theta}) + \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - 2s(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right)\right) + \\
& +\frac{2H^3e^{x_1H + (H^2 - s^2)(\tau - \theta)}}{H^2 - s^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x_1 + 2H(\tau - \theta)}{2\sqrt{\tau - \theta}}\right),
\end{aligned}$$

$\varphi(y, \tau) = -\pi(1 - \nu)\varphi_*(y, \tau)/(1 + \nu)\alpha_T R$; $\operatorname{erf}(x)$, $\operatorname{erfc}(x)$ – інтеграли ймовірностей [7].

Отже, вихідну задачу оптимізації (6) зведено до оберненої задачі термопружності [2, 6], яка описується рівнянням (10) і в якій за заданим у площині $x = x_1$ розподілом температурних переміщень потрібно визначити потужність внутрішніх теплових джерел, розміщених у площині $x = x_0$.

Застосувавши до рівняння (10) інтегральне перетворення Фур'є за координатою y , у просторі зображень отримаємо інтегральне рівняння Вольterra першого роду типу згортки за змінною τ для відшукування зображення за Фур'є шуканого керування:

$$\int_0^{\tau} A(s, x_0, x_1, \tau - \theta) u_F(s, \theta) d\theta = \Phi_F(s, \tau), \quad \tau \in [0, \tau_m], \quad s \in [0, \infty), \quad (11)$$

де

$$\Phi_F(s, \tau) = \varphi_F(s, \tau) - \int_0^{\tau} t_F(s, \theta) \mathcal{K}_1(s, x_1, \tau - \theta) d\theta,$$

$$u_F(s, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} u(y, \theta) \cos(sy) dy,$$

$t_F(s, \theta)$, $u_F(s, \theta)$, $\varphi_F(s, \theta)$ – зображення за Фур'є функцій $t(y, \theta)$, $u(y, \theta)$ та $\varphi(y, \theta)$, s – параметр перетворення Фур'є.

Побудуємо наближений розв'язок рівняння (11). Для цього скористаємось лінійною сплайн-апроксимацією функції $u_F(s, \tau)$ за часовою змінною τ [4]. Розіб'ємо часовий інтервал $[0, \tau_m]$ на m інтервалів довжини $h = \tau_m/m$ і на кожному з них подамо функцію $u_F(s, \tau)$ у вигляді

$$u_F(s, \tau) = u_F^{(i-1)}(s) \frac{\tau_i - \tau}{h} + u_F^{(i)}(s) \frac{\tau - \tau_{i-1}}{h}, \quad (s, \tau) \in [0, \infty) \times [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad (12)$$

де $\tau_i = hi$, $u_F^{(i)}(s) = u_F(s, \tau_i)$. Підставивши подання (12) у рівняння (11), отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$u_F^{(1)}(s) = \frac{h\Phi_F^{(1)}(s)}{B_1},$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \Theta_{ki} u_F^{(i)}(s) + u_F^{(k)}(s) = \frac{h\Phi_F^{(k)}(s)}{B_k}, \quad k = 2, \dots, m, \quad (13)$$

яка апроксимує інтегральне рівняння (11). Тут

$$\Phi_F^{(k)}(s) = \Phi_F(s, \tau_k), \quad \Theta_{ki} \equiv a_{k-i} = \frac{A_{i+1} + B_i}{B_k},$$

$$A_i = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [\tau_i - \theta] A(s, x_0, x_1, \tau_k - \theta) d\theta,$$

$$B_i = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [\theta - \tau_{i-1}] A(s, x_0, x_1, \tau_k - \theta) d\theta.$$

Вигляд системи (13) дає змогу безпосередньо записати рекурентну формулу для визначення невідомих $u_F^{(i)}(s)$, $1 \leq i \leq m$. Матриця системи (13) є нижньою трикутною з піддіагонально рівними елементами:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_{i+1} < a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Знайшовши $u_F^{(i)}(s)$, $1 \leq i \leq m$, за формулою обернення для інтегрального перетворення Фур'є [6]

$$u^{(i)}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u_F^{(i)}(s) \cos(sy) ds, \quad 0 \leq i \leq m, \quad (14)$$

чисельно знаходимо розв'язок задачі оптимізації у дискретні моменти часу τ_i .

3. Числова апробація методики. Як приклад розглянемо побудову розв'язку задачі забезпечення нульових вертикальних температурних переміщень, $\varphi_*(y, \tau) = 0$, граничної поверхні півпростору, який нагрівається тепловим потоком за законом

$$q(y, \tau) = q_0 \exp(-\beta^2 R^2 y^2) (1 - \exp(-c_0 \tau)), \quad (15)$$

де β^2 , q_0 , $c_0 = \text{const}$.

Оскільки з граничної умови теплообміну третього роду (2) можна отримати граничну умову другого роду, то розв'язок такої задачі знаходимо за формулами (13), (14), поклавши у них $Ht(y, \theta) = q(y, \theta)$ і $H = 0$.

Розподіл безрозмірного теплового потоку $q(y, \tau)/q_0$ за координатою y , розрахований за формулою (15), для значень параметрів $\beta^2 R^2 = 9$, $c_0 = 10$ показано на рис. 1 у моменти часу $\tau = 0.1, 0.3, 0.5$ відповідно. На рис. 2 наведено поведінку безрозмірної функції керування $\tilde{u}(y, \tau) = -\beta R u(y, \tau) / \sqrt{\pi} q_0$ за просторовою координатою y у момент часу $\tau = 0.1$ відповідно для значень координати $x_0 = 0, 0.3, 0.6$. Бачимо, що при $x_0 = 0$ знайдене керування співпадає з розподілом потоку $q(y, \tau)/q_0$, що отримуємо також безпосередньо із формул (13), (14), поклавши $x_0 = 0$. Знайдене керування має осцилюючий характер, який супроводжується збільшенням амплітуди та частоти зі збільшенням значення координати x_0 . Зростання параметра $\beta^2 R^2$ за сталого x_0 призводить до аналогічного результату (див. рис. 3). Криві на цьому рисунку відповідають значенням $\beta^2 R^2 = 4, 9, 16$ при $x_0 = 0.3$ і $\tau = 0.1$.

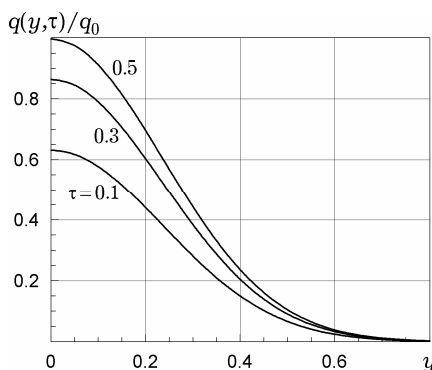


Рис. 1

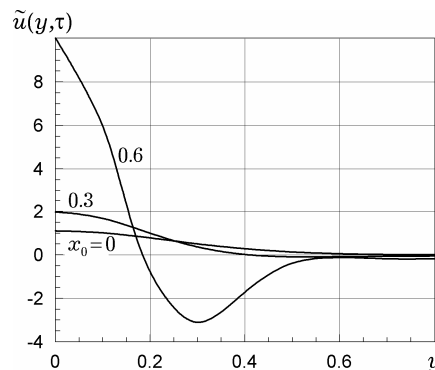


Рис. 2

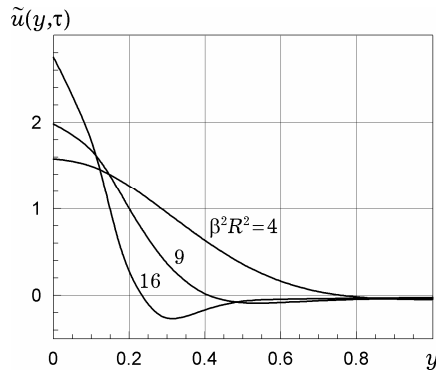


Рис. 3

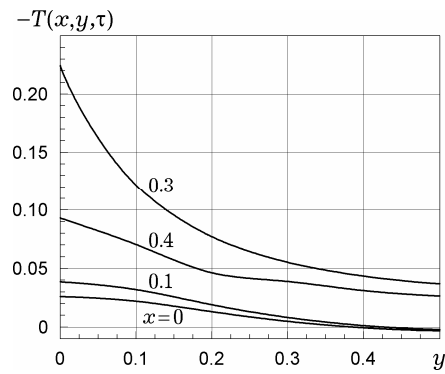


Рис. 4

Розподіл температурного поля $T(x, y, \tau)$ за координатою y при $x_0 = 0.3$ і $\tau = 0.1$ для значень координати $x = 0, 0.1, 0.3, 0.4$ показано на рис. 4.

Поведінку за координатою y безрозмірних температурних переміщень $u_x = -\pi(1-\nu)u_x^*/(1+\nu)\alpha_T R$, які відповідають температурному полю, зображеному на рис. 4 (для координат $x = 0, 0.1, 0.3, 0.4$), наведено на рис. 5. Як видно на рис. 4, температурне поле $T(x, y, \tau)$ досягає мінімального від'ємного значення за координатою x при $x = x_0$ і прямує до нуля, коли x безмежно зростає. Аналогічно є поведінка за координатою x і переміщень u_x , які досягають мінімального від'ємного значення у деякому околі точки x_0 .

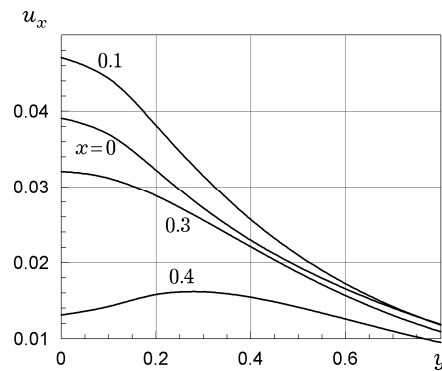


Рис. 5

Висновки. Сформульовано задачу оптимального керування розподілом нестационарних вертикальних температурних переміщень заданого перерізу півпростору, паралельного до граничної поверхні. За критерій оптимальності вибрано мінімальне значення рівномірного відхилення керованого розподілу вертикальних переміщень від заданого розподілу, а за функцію керування – потужність внутрішніх теплових джерел, зосереджених у деякій площині, паралельній до граничної. На основі припущення про існування точної нижньої грані критерію оптимальності сформульовану задачу оптимізації зведено до оберненої задачі термопружності. Побудовано інтегральне рівняння, яке описує обернену задачу, та визначено його розв'язок.

Для випадку нагрівання півпростору тепловим потоком, розподіленим за законом Гаусса, досліджено поведінку знайденого оптимального керування, яке забезпечує нульові вертикальні переміщення граничної поверхні півпростору.

1. Бочков Н. А., Гордеев В. Ф., Колесов В. С. и др. Параметры геометрической стабильности оптической поверхности лазерных зеркал // Поверхность. Физика, химия, механика. – 1983. – № 11. – С. 89–96.
2. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Київ: Наук. думка, 1988. – 312 с.

3. Вигак В. М., Колесов В. С., Ясинский А. В. Оптимальное управление температурными перемещениями оптической поверхности лазерного зеркала // Физика и химия обработки материалов. – 1985. – № 3. – С. 25–30.
4. Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А. Сплаины в инженерной геометрии. – Москва: Машиностроение, 1985. – 224 с.
5. Коваленко А. Д. Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
6. Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В. Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 5.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
8. Ткаченко О. А., Чиж І. Г. Термодефокусування зображень в оптичних системах // Наук. вісті Нац. техн. ун-ту України «КПІ». – 2012. – № 1. – С. 126–131.
9. Цеснек Л. С., Сорокин О. В., Золотухин А. А. Металлические зеркала. – Москва: Машиностроение, 1983. – 232 с.
10. Ясінський А. В., Шипка Р. Й. Оптимізація вертикальних осесиметричних переміщень тонкої круглої пластинки при нестационарному тепловому навантаженні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 3. – С. 148–153.
11. Ashida F., Noda N. Control of transient thermoelastic displacement in a piezoelectric based intelligent plate // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 2001. – 12, No. 2. – P. 93–103.
12. Ashida F., Tauchert T. R. Control of transient thermoelastic displacement in a composite disk // J. Therm. Stresses. – 2002. – 25, No. 2. – P. 99–121.
13. Choi J.-S., Ashida F., Noda N. Control of thermally induced elastic displacement of an isotropic structural plate bonded to a piezoelectric ceramic plate // Acta Mech. – 1997. – 122, No. 1-4. – P. 49–63.
14. Nyashin Y., Lokhov V., Ziegler F. Stress-free displacement control of structures // Acta Mech. – 2005. – 175, No. 1-4. – P. 45–56.
15. Ootao Y., Tanigawa Y. Control of the transient thermoelastic displacement of a functionally graded rectangular plate bonded to a piezoelectric plate due to nonuniform heating // Acta Mech. – 2001. – 148, No. 1-4. – P. 17–33.
16. Ootao Y., Tanigawa Y. Control of transient thermoelastic displacement of a two-layered composite plate constructed of isotropic elastic and piezoelectric layers due to nonuniform heating // Arch. Appl. Mech. – 2001. – 71, No. 4-5. – P. 207–220.

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАННОМ СЕЧЕНИИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НАХОДЯЩЕГОСЯ В СОСТОЯНИИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Построено решение задачи оптимального управления распределением нестационарных вертикальных температурных перемещений полупространства, находящегося в плоском деформируемом состоянии. В качестве функции управления выбрана мощность внутренних тепловых источников, расположенных в плоскости, параллельной к граничной поверхности. В предположении существования управления, обеспечивающего точную нижнюю грань равномерного отклонения управляемого распределения вертикальных перемещений от заданного, задача оптимизации сведена к обратной задаче термоупругости. Построено и проанализировано решение полученной обратной задачи.

OPTIMIZATION OF THE TRANSIENT TEMPERATURE DISPLACEMENTS IN THE GIVEN CROSS-SECTION OF HALF-SPACE WHICH IS IN A PLANE STRAIN STATE

The solution of the problem of optimal control of distribution of transient vertical temperature displacements of a half-space under plane-strain condition is constructed. The capacity of internal heat sources located in a plane parallel to the boundary surface is chosen as the control function. Under the assumption of the existence of control providing the infimum uniform deviation of controlled distribution of vertical displacements from the given one, the optimization problem is reduced to the inverse thermoelasticity problem. The solution of the resulting inverse problem is constructed and analyzed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
03.03.14